

INTERPOLACIÓN Y POLINOMIOS DE LAGRANGE

Existen en todas las ramas de la ciencia, en la Física, en la Matemática, en la Química, en la Astronomía, en Biología, etc.. situaciones en las que conociendo un conjunto de datos experimentales en un cierto intervalo de la variable independiente, esto es, conociendo una cierta cantidad de datos tabulados, se hace preciso encontrar una función que verifique todos esos datos y permita, por consiguiente, predecir la existencia de otros valores con la aproximación adecuada.

El problema de la interpolación es de gran importancia en el análisis numérico. En este artículo vemos muy brevemente una manera elemental de interpolación y la obtención de la conocida Fórmula Interpoladora de Lagrange.

La interpolación:

La fórmula de interpolación permite calcular de manera aproximada los valores de la función $f(x)$, y consiste en sustituir la función $f(x)$ a aproximar por otra función $g(x)$ que pudiera convenir por razones de simplicidad, operatividad, etc..

Se trataría de construir otra función $g(x)$ con adecuados parámetros a_i :

$$g(x) \equiv g(x; a_1, \dots, a_n)$$

de modo que se cumplan las condiciones de interpolación prefijadas en un conjunto de puntos del dominio de la función $f(x)$, que se denominan *nodos de interpolación*.

Estas condiciones consisten, en general, que coincidan los valores que presenta la función dada en los nodos de interpolación con los valores que en dichos nodos presenta la función interpoladora:

$$g(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$
$$(x_0, x_1, \dots, x_n, \text{ nodos de interpolación})$$

o bien, por ejemplo, que coincidan en dichos nodos las derivadas de ambas funciones:

$$g'(x_k) = f'(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$
$$(x_0, x_1, \dots, x_n, \text{ nodos de interpolación})$$

Siempre aparecerá, obviamente, un término residual, $r_n(x)$, como diferencia entre la función a interpolar y la función interpoladora:

$$r_n(x) = f(x) - g(x)$$

Interpolación lineal:

La forma de interpolación más usada es la interpolación lineal, corresponde al caso de función interpoladora cuya expresión es de la forma

$$g(x; a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x)$$

viniendo referida, pues, a un cierto conjunto de funciones $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$, que llamaremos *Base de la interpolación*.

Para que cualquiera que sea la función $f(x)$ definida en el segmento $[a, b]$, y para cualquier conjunto de $n+1$ nodos $x_0, x_1, \dots, x_n$, $x_i \in [a, b]$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, exista un único polinomio interpolador de la forma dada es suficiente que el conjunto de funciones $\{\varphi_i(x)\}$ sea un sistema de Chebyshev (linealmente independientes y generadoras). Pueden adoptarse como funciones $\{\varphi_i(x)\}$, por ejemplo:

- La sucesión de potencias de x :

$$\varphi_i(x) = x^i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

(es el caso de interpolación con polinomios algebraicos)

- La sucesión de funciones trigonométricas dada por:

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$$

- La sucesión de funciones exponenciales:

$$1, e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}$$

(donde los a_i son números reales distintos)

Se tendría entonces, para el caso de la interpolación habitual de identificación en los nodos:

$$g(x_k) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

o sea:

$$\begin{aligned}
a_0 \cdot \varphi_0(x_0) + \dots + a_n \cdot \varphi_n(x_0) &= f(x_0) \\
a_0 \cdot \varphi_0(x_1) + \dots + a_n \cdot \varphi_n(x_1) &= f(x_1) \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\
a_0 \cdot \varphi_0(x_n) + \dots + a_n \cdot \varphi_n(x_n) &= f(x_n)
\end{aligned}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \dots \\ \dots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Y podemos describir, por simplificar, así: $\Phi \cdot A = F$, lo que permitiría obtener la matriz de los coeficientes del polinomio interpolador: $A = \Phi^{-1} \cdot F \equiv L \cdot F$ (donde hemos hecho $L = \Phi^{-1}$)

Si llamamos B a la matriz de la base de la interpolación: $B = [\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)]$, se tiene:

$$g(x) \equiv g(x; a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \varphi_i(x) = [\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = B \cdot A$$

o bien, finalmente:

$$g(x) = B \cdot L \cdot F$$

Interpolación con polinomios algebraicos:

La interpolación con polinomios algebraicos corresponde al caso en el que las funciones del sistema de Chebyshev son precisamente las potencias de la variable x : $1, x, \dots, x^n$:

$$\varphi_i(x) = x^i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Y las relaciones de identificación en los nodos se expresan por

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot x_k^i = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

y si la condición de interpolación lo exigiera, las relaciones de identificación de las derivadas serían:

$$\sum_{i=0}^n i.a_i.x_k^{i-1} = f'(x_k), \quad k = 0,1,\dots,n$$

Es obvio que el polinomio de interpolación es único, pues por tratarse de un sistema de Chebyshev las funciones $\{\varphi_i(x)\}$ generan un único polinomio.

La importancia de esta forma de interpolación lineal, con polinomios algebraicos, consiste en la posibilidad de obtener la representación explícita de polinomios interpoladores sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones que imponen las condiciones de interpolación.

La Fórmula de Interpolación de Lagrange:

Corresponde al caso de interpolación lineal con polinomios algebraicos e identificación de los valores de la función en los nodos de interpolación.

Base de la interpolación: $B = [1, x, \dots, x^n]$

Soporte (nodos) de la interpolación: $S = [x_0, x_1, \dots, x_n]$

Y el polinomio interpolador sería:

$$g_n(x) = B.L.F = [1, x, \dots, x^n] \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & \dots & x_n^n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \dots \\ \dots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

a) Los polinomios de Lagrange:

El producto de las dos primeras matrices tiene como resultado una matriz fila cuyos elementos son polinomios

$$B.L = [1, x, \dots, x^n] \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & \dots & x_n^n \end{bmatrix}^{-1} = [l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)]$$

Los polinomios $l_k(x)$, $k = 0,1,\dots,n$ se llaman *Polinomios de Lagrange* para la base B y el soporte de interpolación S dado.

Así, pues, usando los polinomios de Lagrange, la fórmula de interpolación en la base y soporte indicados tendría esta expresión para la función $f(x)$:

$$g_n(x) = B.L.F = [l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)] \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \dots \\ \dots \\ f(x_n) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^n l_k(x) \cdot f(x_k)$$

En definitiva:

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) \cdot f(x_k)$$

Se hace necesario, por consiguiente, determinar la expresión que tienen los polinomios de Lagrange para poder utilizar de manera práctica esta fórmula de interpolación.

b) Expresión de los polinomios de Lagrange:

Sean $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ los valores de la función a interpolar en los nodos de la interpolación. Se tiene:

- para $x=x_0$:

$$g_n(x_0) = f(x_0) \Rightarrow l_0(x_0) \cdot f(x_0) = f(x_0) \Rightarrow l_0(x_0) = 1 \wedge l_i(x_0) = 0, \text{ si } i \neq 0$$

- para $x=x_1$:

$$g_n(x_1) = f(x_1) \Rightarrow l_1(x_1) \cdot f(x_1) = f(x_1) \Rightarrow l_1(x_1) = 1 \wedge l_i(x_1) = 0, \text{ si } i \neq 1$$

...
...

- para $x=x_k$:

$$g_n(x_k) = f(x_k) \Rightarrow l_k(x_k) \cdot f(x_k) = f(x_k) \Rightarrow l_k(x_k) = 1 \wedge l_i(x_k) = 0, \text{ si } i \neq k$$

o lo que es lo mismo:

$$l_k(x_i) = \delta_{ik} \quad (\text{Cronecker})$$

Esto nos permite plantear los términos del polinomio $l_k(x)$ de modo que:

$$l_0(x) = c_0(x-x_1) \dots (x-x_n) = c_0 \prod_{j \neq 0}^n (x-x_j)$$

$$l_0(x_0) = 1 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{(x-x_1) \dots (x-x_n)} = \frac{1}{\prod_{j \neq 0}^n (x-x_j)}$$

con lo cual resulta:

$$l_0(x) = c_0 \cdot \prod_{j \neq 0}^n (x-x_j) = \prod_{j \neq 0}^n \frac{(x-x_j)}{(x_0-x_j)}$$

Repitiendo el proceso con cada uno de los $l_k(x)$:

$$l_k(x) = c_k (x-x_1) \dots (x-x_n) = c_k \prod_{j \neq k}^n (x-x_j)$$

$$l_k(x_k) = 1 \Rightarrow c_k = \frac{1}{(x-x_1) \dots (x-x_n)} = \frac{1}{\prod_{j \neq k}^n (x-x_j)}$$

con lo cual resulta:

$$l_k(x) = c_k \cdot \prod_{j \neq k}^n (x-x_j) = \prod_{j \neq k}^n \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$$

y la fórmula de interpolación de Lagrange queda finalmente en la forma:

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \cdot \prod_{j \neq k}^n \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$$

c) Un ejemplo de aplicación de la fórmula de interpolación de Lagrange:

Sea el caso de una función $f(x)$ desconocida, que toma los valores 0, -3 y 1 en los puntos 1, 2 y 4, respectivamente. Encontrar un polinomio de interpolación.

Se tiene:

Soporte (nodos) de la interpolación: $S = [x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4]$

Base de la interpolación: $B = [1, x, x^2]$

Valores de la función en los nodos: $[f(x_0) = 0, f(x_1) = -3, f(x_2) = 1]$

$$\begin{aligned}
g_2(x) &= \sum_{k=0}^2 f(x_k) \cdot \prod_{j \neq k} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} = f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \\
&\quad + f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = f(1) \frac{(x - 2)(x - 4)}{(1 - 2)(1 - 4)} + f(2) \frac{(x - 1)(x - 4)}{(2 - 1)(2 - 4)} + \\
&\quad + f(4) \frac{(x - 1)(x - 2)}{(4 - 1)(4 - 2)} = \frac{0}{3}(x - 2)(x - 4) + \frac{3}{2}(x - 1)(x - 4) + \frac{1}{6}(x - 1)(x - 2)
\end{aligned}$$

Resulta, por tanto:

$$g_2(x) = \frac{5}{3}x^2 - 8x + \frac{19}{3}$$

y se comprueba fácilmente que verifica la condición de obtener en los nodos los valores de la función desconocida $f(x)$ indicados en el enunciado del ejemplo:

$$g_2(1) = f(1) = 0, \quad g_2(2) = f(2) = -3, \quad g_2(4) = f(4) = 1$$

d) Error residual en la fórmula de interpolación de Lagrange:

Si la función a interpolar, $f(x)$, es al menos $n+1$ veces derivable se obtiene el error de interpolación mediante una expresión análoga al resto de Lagrange en el desarrollo de Taylor de una función:

$$r(x) = f(x) - g_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

siendo $\xi \in [y_1, y_2]$, $y_1 = \min(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$, $y_2 = \max(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$

e) Interpolación mediante polinomios trigonométricos:

En el año 1795 Joseph-Louis de Lagrange propuso una fórmula de interpolación en donde la base estaba constituida por expresiones trigonométricas. Esta fórmula es:

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \cdot \prod_{j \neq k} \frac{\sin[(x - x_j)/2]}{\sin[(x_k - x_j)/2]}$$

de expresión muy similar, como puede observarse, a la forma de interpolación mediante polinomios algebraicos.

f) Otras fórmulas de interpolación:

Aparte de la fórmula de interpolación de Lagrange pueden obtenerse otras representaciones explícitas para la fórmula de interpolación con polinomios algebraicos.

Estas representaciones pueden resultar más apropiadas para resolver ciertos problemas específicos que se plantean en situaciones prácticas diversas. Las más conocidas son: La fórmula de interpolación de Bessel, las de Gauss, la de Newton, la de Everett, la de Stirling, la de Steffensen, etc..

El problema de la interpolación algebraica utilizando los valores de la función y también de sus derivadas en los nodos de interpolación se puede resolver mediante la llamada Fórmula de interpolación de Hermite.

En los casos en los que resulta complicado determinar la potencia del polinomio interpolador para obtener una cierta exactitud en la interpolación de bloques de datos o tablas de valores, se puede recurrir a los denominados Esquemas de Aitken, en donde los polinomios de interpolación se construyen con potencias cada vez mayores, lo que permite controlar la exactitud del proceso de cálculo.

Bibliografía:

Atkinson, K.E., "An Introduction to Numerical Analysis", John Wiley, New York (1978).

Bajválov, N.S., "Métodos numéricos", Paraninfo, Madrid, 1966.

Bakhavalov, N., "Numerical Methods: Análisis, Álgebra, Ordinary Differential Equations", Mir, Moscú, 1977.

Cheney, W.; Kincaid, D., "Numerical Mathematics and Computing", Brooks/Cole, Monterrey (California) (1980).

Davis, P.J., "Interpolation and Approximation", Dover, New York (1975).

Rivlin, T.J., "An Introduction to the Approximation of Functions", Dover, New York (1981).

Stoer, J.; Bulirsch, R., "Introduction to Numerical Analysis", Springer-Verlag, New York (1980).

Carlos S. Chinae
casanchi@teleline.es