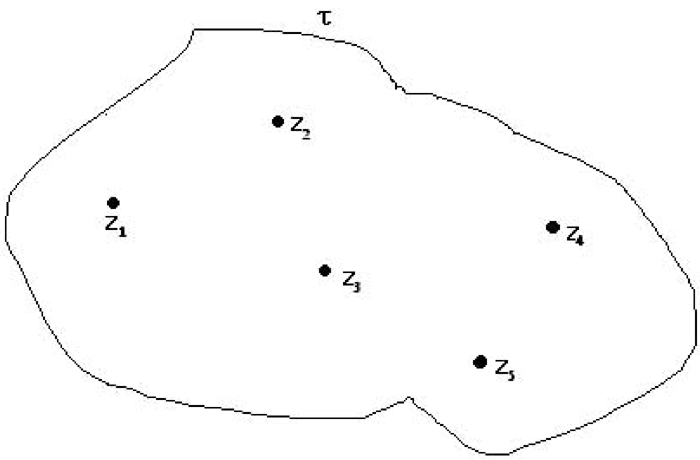
# Integración en variable compleja. Método de los residuos

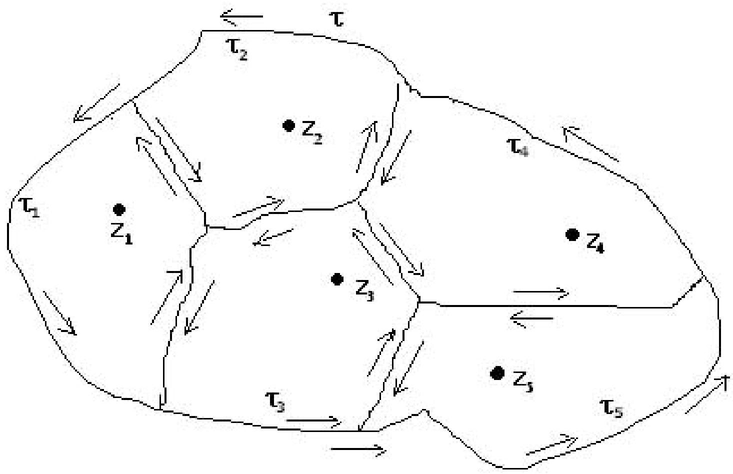
## 1. Residuos:

Sea D un dominio simplemente conexo y consideremos la integral de una función $f(z)$ a lo largo de un circuito $\tau$ que rodea un numero finito de singularidades aisladas, $z_i, i = 1,2,...,n$.




Puesto que cada una de las singularidades puede rodearse por un contorno $\tau_1, \tau_1, ..., \tau_n$ de modo que la integral en el contorno total sea la suma de los contornos correspondientes a cada singularidad, al cancelarse los tramos interiores:

$$\oint_{\tau} f(z).dz = \oint_{\tau_1} f(z).dz + \oint_{\tau_2} f(z).dz + ... + \oint_{\tau_n} f(z).dz$$




Calculemos cada uno de los sumandos integrales:

$$\oint_{\tau_i} f(z).dz, i = 1,2,...,n$$

para ello sustituimos la función por su desarrollo de Laurent en un entorno de la singularidad correspondiente, $z_i, i = 1,2,...,n$ :

$$\oint_{\tau_i} f(z).dz = \oint_{\tau_i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^i (z - z_i)^k .dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^i \oint_{\tau_i} (z - z_i)^k .dz \qquad [6.1.1]$$

Veamos el valor que puede tomar la integral. Para ello expresamos el integrando en la forma módulo argumental: $z - z_i = R.e^{i\theta}, dz = R.i.e^{i\theta}.d\theta$, donde es R el radio de una circunferencia centrada en la singularidad $z_i$ y rodeada por el circuito $\tau_i$. Se tiene:

$$\oint_{\tau_i} (z - z_i)^k .dz = \int_0^{2\pi} R^k .e^{ik\theta} .R.i.e^{i\theta} .d\theta = R^{k+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\theta} .d\theta$$

Evaluemos esta integral para los diferentes valores de *k*:

- Si $k + 1 = 0 \rightarrow k = -1 \rightarrow \oint_{\tau_i} (z - z_i)^k .dz = R^0 i \int_0^{2\pi} e^{i.0.\theta} .d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$
- Si $k + 1 \neq 0 \rightarrow \oint_{\tau_i} (z - z_i)^k .dz = R^{k+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\theta} .d\theta = R^{k+1} i \left. \frac{e^{i(k+1)\theta}}{(k+1)i} \right|_0^{2\pi} = R^{k+1} \frac{1-1}{k+1} = 0$

En definitiva, la integral es nula salvo para *k=-1*:

$$\oint_{\tau_i} (z - z_i)^{-1} .dz = 2\pi i$$

por lo que, al sustituir en [1]:

$$\oint_{\tau_i} f(z).dz = \oint_{\tau_i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^i (z - z_i)^k .dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^i \oint_{\tau_i} (z - z_i)^k .dz = a_{-1}^i 2\pi i$$

denominándose residuo de la función $f(z)$ en $z_i$ al valor $a_{-1}^i$, y la integral de contorno total alrededor de las *n* singularidades es

$$\oint_{\tau} f(z).dz = \oint_{\tau_1} f(z).dz + \oint_{\tau_2} f(z).dz + ... + \oint_{\tau_n} f(z).dz = (a_{-1}^1 + a_{-1}^2 + ... + a_{-1}^n) 2\pi i$$

En definitiva, es importante realizar el cálculo de los residuos de la función en los puntos donde hay singularidades aisladas a fin de obtener la integral de contorno correspondiente.

Representaremos el residuo $a_{-1}^i$ de $f(z)$ en el punto $z_i$ por

$$\mathrm{Re}\, s(f(z), z_i) = a_{-1}^i, i = 1,...,n$$

## 2. Cálculo de los residuos en singularidades aisladas:

a) En una singularidad evitable:

Si la función $f(z)$ tiene en una singularidad evitable en $z_0$, es decir, si tiene límite en dicho punto, entonces es prolongable a una función holomorfa en $z_0$ por lo que es desarrollable en serie de Taylor y todos los términos de su desarrollo son de exponente positivo, o sea, no existe el término de exponente -1 y por consiguiente el residuo es cero.

$$\mathrm{Re}s(f(z), z_0) = 0$$

b) En una singularidad esencial:

En una singularidad esencial existen, por definición, infinitos términos de exponente negativo en su desarrollo, por lo que el cálculo del residuo exige la determinación directa del coeficiente del término de exponente -1. Necesariamente, por tanto, es preciso calcular en el desarrollo $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, el coeficiente $a_{-1}$.

$$\mathrm{Re}s(f(z), z_0) = a_{-1}$$

c) En una singularidad no esencial (polo):

En este caso podemos utilizar una sencilla fórmula que nos permite calcular mediante un límite, el coeficiente $a_{-1}$ del desarrollo de Laurent. Sea $f(z)$ una función que tiene una singularidad no esencial, un polo de orden h, en el punto $z_0$. Se puede expresar en la forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^h}$$

donde la función $g(z)$ es holomorfa en un entorno de $z_0$ y h es la multiplicidad del polo.

Como es $g(z)$ holomorfa, puede desarrollarse en serie de Taylor en un entorno de la singularidad

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

siendo, entonces

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^{k-h}$$

y la integral

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^{k-h}.dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k)}(z_0)}{k!} \oint_C (z - z_0)^{k-h}.dz$$

y como el desarrollo es nulo, salvo para $k - h = -1$, se tiene:

$$\oint_C f(z)dz = \frac{g^{h-1)}(z_0)}{(h-1)!}\oint_C (z-z_0)^{-1}.dz = \frac{g^{h-1)}(z_0)}{(h-1)!}2\pi i$$

en definitiva:

$$\left.\begin{array}{l}\oint_C f(z)dz = a_{-1}2\pi i \\ \oint_C f(z)dz = \dfrac{g^{h-1)}(z_0)}{(h-1)!}2\pi i\end{array}\right\} \to a_{-1} = \frac{g^{h-1)}(z_0)}{(h-1)!} = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(h-1)!}\frac{d^{h-1}}{dz^{h-1}}g(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(h-1)!}\frac{d^{h-1}}{dz^{h-1}}(z-z_0)^h f(z)$$

es decir, el residuo correspondiente a un polo de orden h de la función $f(z)$ en el punto $z_0$ es:

$$\operatorname{Re}s(f(z),z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(h-1)!}\frac{d^{h-1}}{dz^{h-1}}(z-z_0)^h f(z)$$

Ejemplos:

Ejemplo de cálculo de residuos en una singularidad evitable:

La función $f(z) = \frac{senz}{z}$ presenta una singularidad en $z=0$. Como también es $senz = 0$, se da la conocida indeterminación $0/0$ que acostumbramos a resolver mediante la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{z\to 0}\frac{senz}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{\frac{d}{dz}senz}{\frac{d}{dz}z} = \lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{1} = \cos 0 = 1$$

Por tanto, tiene límite 1. O sea, en $z=0$ aparece una singularidad en la que la función $f(z)$ tiene límite. Esto quiere decir que se trata de una singularidad evitable y, por consiguiente, al tener desarrollo en serie de Taylor, tiene todos los términos con exponente no negativo. Es decir, el residuo $a_{-1}$, que correspondería al exponente -1, es nulo:

$$\operatorname{Re}s(f(z),0) = 0$$

Ejemplo de cálculo de residuos en una singularidad esencial:

Sea la función $f(z) = e^{1/z}$ (exponencial de exponente 1/z).
Presenta el problema de que para $z \to 0$ la función se hace infinita. Para ver que su desarrollo en serie tiene infinitos términos de exponente negativo, veamos el desarrollo de Taylor de $e^z$:

$$e^z = \sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{e^0}{n!}(z-0)^n = \sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

Veamos lo mismo para $e^{1/z}$:

$$e^{1/z} = \sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}$$

El residuo correspondería al coeficiente del término de exponente -1, es decir, al término que se obtiene para *n=1*: $a_{-1} = \frac{1}{1!} = 1$. Por tanto:

$$\operatorname{Re} s(f(z),0)=1$$

Ejemplo de cálculo de residuos en una singularidad no esencial:

Podemos considerar la función $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z+3)^2}$, que nos presenta un polo simple en *z=1* y un polo doble en *z=-3*.

Residuos:

$$\operatorname{Re} s(f(z),1)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(1-1)!}\frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}}(z-1)^1\frac{z^2}{(z-1)(z+3)^2}=\lim_{z\to 1}\frac{z^2}{(z+3)^2}=1/16$$

$$\operatorname{Re} s(f(z),-3)=\lim_{z\to -3}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}(z+3)^2\frac{z^2}{(z-1)(z+3)^2}=\lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z-1)}=15/16$$

## 3. Integrales:

Para un circuito simple $\gamma$ que encierra un conjunto de singularidades aisladas, $z_1,\ldots,z_n$, se verifica que

$$\oint_\gamma f(z).dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}a_{-1}^{j}$$

donde son $a_{-1}^1,\ldots,a_{-1}^n$ los residuos correspondientes a las *n* singularidades aisladas encerradas por el contorno.

Ejemplos elementales:

- En el disco $|z|\leq 1$ es $\oint_C \frac{senz}{z}dz=0, si C:|z|=1,$ pues la función es holomorfa en el disco $|z|\leq 1$, y por tanto la curva C no encierra ninguna singularidad.

- En el disco $|z|\leq 2$ es $\oint_C e^{\frac{1}{z}}dz=2\pi i, si C:|z|=1,$ pues en el disco $|z|\leq 2$ la función tiene una singularidad esencial en $z=0$ de residuo 1.

- En el dominio anular $1/2\leq|z|\leq 3$ es $\oint_C e^{\frac{1}{z}}dz=0, si C:|z|=1$, pues en tal dominio anular la curva C no encierra ninguna singularidad.

- En el disco $|z|\leq 2$ es $\oint_C \frac{z^2}{(z-1)(z+3)^2}dz=2\pi i\frac{1}{16}=\frac{\pi}{8}i$, $si C:|z|=\frac{3}{2}$, pues en tal disco la curva C solamente encierra la singularidad $z=1$ de residuo $1/16$.

- En el disco $|z| \leq 5$ es $\oint_C \frac{z^2}{(z-1)(z+3)^2} dz = 2\pi i\left(\frac{1}{16}+\frac{15}{16}\right) = 2\pi i$, si $C:|z|=4$, pues en tal disco la curva C encierra las singularidades aisladas $z=1$ y $z=-3$, de residuos respectivos $\frac{1}{16}$ y $\frac{15}{16}$.

Otros ejemplos:

1_ Usando el método de los residuos, calcular

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\phi . d\phi$$

para actuar como en los ejemplos elementales anteriores, introduzcamos la variable compleja z:

llamando $z = e^{i\phi}$, es $dz = ie^{i\phi}d\phi = izd\phi \rightarrow d\phi = \frac{1}{iz}dz$, y $\cos\phi = \frac{1}{2}\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

por tanto $\cos^{2n}\phi = \frac{1}{2^{2n}}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}$ y resulta que siendo $C:|z|=1$ se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\phi . d\phi = \oint_C \frac{1}{2^{2n}}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{1}{iz}dz = \frac{1}{i2^{2n}}\oint_C \frac{\left(z^2+1\right)^{2n}}{z^{2n+1}}dz$$

y la función presenta en el origen un polo de orden *2n+1.*
Debido a la complejidad del orden del polo en el origen, no utilizaremos la fórmula del residuo como limite de la derivada de orden 2n, sino que determinaremos elementalmente el coeficiente de $z^{-1}$ usando el desarrollo del binomio de Newton:

$\frac{1}{i2^{2n}}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{1}{z} = \frac{1}{i2^{2n}}\sum_{h=0}^{2n}\binom{2n}{h}z^{2n-h}\left(\frac{1}{z}\right)^h\frac{1}{z} = \frac{1}{i2^{2n}}\sum_{h=0}^{2n}\binom{2n}{h}z^{2(n-h)-1}$, el coeficiente de $z^{-1}$ exige que $2(n-h)-1=-1 \rightarrow n=h$, por lo que el término sería

$$a_{-1}z^{-1} = \frac{1}{i2^{2n}}\binom{2n}{n}z^{-1} \rightarrow a_{-1} = \frac{1}{i2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{i2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!.n!} = \frac{1}{i}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

Resultado el valor de la integral:

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\phi . d\phi = \oint_C \frac{1}{2^{2n}}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{1}{iz}dz = 2\pi i . a_{-1} = 2\pi i\frac{1}{i}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = 2\pi\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

2_ Calcular

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz$$

a) Cuando es $C:|z|=3/2$.
b) Cuando es $C:|z|=10$.

Las singularidades aisladas son $z=1$ (polo simple) y $z=-3$ (polo doble).
Veamos los residuos aplicando la fórmula del limite:

$$a_{-1}^1 = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} = \lim_{z\to 1}\frac{e^z}{(z+3)^2} = \frac{1}{16}e$$

$$a_{-1}^2 = \lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}(z+3)^2\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} = \lim_{z\to -3}\frac{d}{dz}\frac{e^z}{(z-1)} = \lim_{z\to -3}\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2} = -\frac{5}{16}e^{-3}$$

a) Si es $C:|z|=3/2$, el contorno donde está definida la integral es una circunferencia de radio 3/2 y centrada en el origen, que rodea solamente al polo simple *z=1*, por tanto:

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz = 2\pi i.a_{-1}^1 = 2\pi i.\frac{1}{16}e = \frac{\pi i e}{8}$$

b) Si es $C:|z|=10$, el contorno es ahora una circunferencia de radio 10 y centrada en el origen, rodeando ahora a ambos polos de la función, por lo que es

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}dz = 2\pi i.(a_{-1}^1 + a_{-1}^2) = 2\pi i.\left(\frac{1}{16}e - \frac{5}{16}e^{-3}\right) = \frac{\pi i}{8}\left(e - \frac{5}{e^3}\right)$$

Dejamos al lector el cálculo de la siguiente integral, de la que mostramos la solución

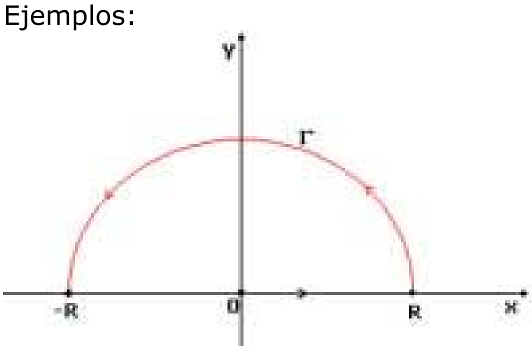
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b.sen\theta}, \text{ siendo } a^2 > b^2 > 0, a.b > 0$$

Solución: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$

## 4. Aplicación del método de los residuos al cálculo de integrales impropias:

Cuando hemos de calcular integrales impropias tales como $\int_o^{+\infty} f(x).dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx$, $\int_{-\infty}^{0} f(x).dx$, ..., podemos realizar el tratamiento consistente en considerar el intervalo real de integración como parte de un contorno, de forma que podamos establecer que la suma de las integrales a lo largo de los tramos del circuito es la integral de contorno total, calculable mediante el método de los residuos.

Ejemplos:



CIRCUITO C

Podemos considerar el circuito C que se muestra en esta figura constituido por dos ramas o caminos: el camino curvo, semicircunferencia $\Gamma$, y el camino rectilíneo, que va desde el punto –R hasta el punto R, dentro de la recta real.

Si consideramos la integral de contorno a lo largo del circuito, podemos realizar la descomposición siguiente, integrando, como siempre, en sentido antihorario:

$$\oint_C f(z).dz = \int_\Gamma f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

donde el circuito C rodea las singularidades aisladas que puedan figurar en su interior.

o bien:

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = \oint_C f(z).dz - \int_\Gamma f(z)dz$$

y si tomamos el límite para $R \to \infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \oint_C f(z).dz - \lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)dz$$

y el circuito encerraría ahora todas las singularidades aisladas que hubiera en todo el semiplano superior.

Asimismo, podemos expresar, si la función $f(x)$ fuera par:

$$2\int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \oint_C f(z).dz - \lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)dz$$

con lo que

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} \oint_C f(z).dz - \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)dz$$

En definitiva, el cálculo de la integral impropia, requiere determinar la integral de contorno a lo largo del circuito mediante el método de los residuos, y la integral a lo largo del camino constituido por la semicircunferencia usando algún procedimiento que dependa de la función que se integra (acotación, discontinuidad, etc.). Para este último paso resulta útil el siguiente teorema de acotación.

Teorema:
Siendo $M$ y $k$ constantes reales tales que $M > 0$ y $k > 1$, se verifica que si en la semicircunferencia $\Gamma$ de radio $R$ es $|f(z)| \le \frac{M}{R^k}$, entonces $\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 0$.

Demostración:

Para $z = R.e^{i\theta}$, $\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \le \int_\Gamma |f(z)||dz| \le \int_\Gamma \frac{M}{R^k}\left|i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\, d\theta\right| = \frac{M}{R^k} R\int_0^\pi d\theta = \pi \frac{M}{R^{k-1}}$

de lo cual

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \le \lim_{R\to\infty} \pi \frac{M}{R^{k-1}} = 0$$

por tanto:

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| = 0 \to \lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Ejemplo de integración de una función par sobre el eje real en el que aplicamos el teorema anterior. Cálculo de la integral

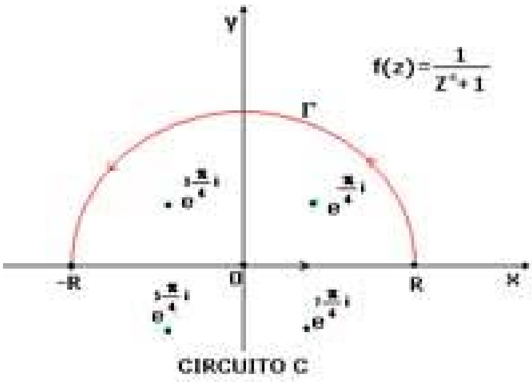
$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$$

Comprobamos en primer lugar que está acotada sobre la semicircunferencia $\Gamma$:

$$z = R.e^{i\theta} \rightarrow |f(z)| = \left|\frac{1}{z^4+1}\right| = \left|\frac{1}{(R.e^{i\theta})^4+1}\right| \leq \left|\frac{1}{R^4.e^{i4\theta}-1}\right| \leq \frac{1}{\left|R^4.e^{i4\theta}\right|-1} = \frac{1}{R^4-1} \leq \frac{2}{R^4}$$

Determinamos las singularidades de la función $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$:

$$z^4+1=0 \rightarrow z^4 = -1 \rightarrow z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}, z_2 = e^{3\frac{\pi}{4}i}, z_3 = e^{5\frac{\pi}{4}i}, z_4 = e^{7\frac{\pi}{4}i}$$




son polos simples, de los cuales solamente los dos primeros quedan rodeados por el circuito (están en el semiplano superior).

Residuos de los dos primeros polos:

$$a_{-1}^1 = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{z^4+1} = \lim_{z\to z_1}\left(\frac{1}{z^3+z_1z^2+z_1^2z+z_1^3}\right) = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i}$$

$$a_{-1}^2 = \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{1}{z^4+1} = \lim_{z\to z_1}\left(\frac{1}{z^3+z_2z^2+z_2^2z+z_2^3}\right) = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4}e^{-\frac{9}{4}\pi i}$$

Calculo de la integral:

Por ser la integral de una función par, puede expresarse como $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\oint_C \frac{dx}{z^4+1} - \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{dx}{z^4+1} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\oint_C \frac{dx}{z^4+1} - 0 = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\oint_C \frac{dx}{z^4+1} =$$

$$= \frac{1}{2}2\pi i(a_{-1}^1 + a_{-1}^2) = \frac{1}{2}2\pi i\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i} + \frac{1}{4}e^{-\frac{9}{4}\pi i}\right) = \frac{1}{2}2\pi e^{\frac{\pi}{2}i}\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i} + \frac{1}{4}e^{-\frac{9}{4}\pi i}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}\pi i} + \frac{1}{4}e^{-\frac{7}{4}\pi i}\right) = \frac{\pi}{4}\left[\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + \left(\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + isen\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

En este otro ejemplo podemos acotar rápidamente la integral sobre el tramo de la semicircunferencia $\Gamma$:

Sea el calculo de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\lim_{R\to\infty}\oint_C\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}-\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}$$

Veamos que se anula la integral sobre la semicircunferencia $\Gamma$:

$$\left|\int_\Gamma\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}\right|=\left|\int_0^\pi\frac{Rie^{i\theta}d\theta}{\left(\left(\mathrm{Re}^{i2\theta}\right)+1\right)^2}\right|\le\int_0^\pi\left|\frac{Rie^{i\theta}d\theta}{\left(\left(\mathrm{Re}^{i2\theta}\right)+1\right)^2}\right|\le\int_0^\pi\left|\frac{Rie^{i\theta}}{\left(\left(\mathrm{Re}^{i2\theta}\right)-1\right)^2}\right||d\theta|\le$$

$\le\dfrac{R}{(R^2-1)^2}\pi\to 0$ para $R\to\infty$. Luego $\lim\limits_{R\to\infty}\displaystyle\int_\Gamma\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}=0$.

y finalizamos el cálculo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\lim_{R\to\infty}\oint_C\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}$$

Singularidades:

$$(z^2+1)^2=0\to\left((z-i)(z+i)\right)^2=0\to\begin{cases} z=i(doble)\\ z=-i(doble)\end{cases}$$

De ampos polos, solo el primero está dentro del recinto rodeado por el circuito.

Calculemos el residuo:

$$a_{-1}^1=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}\right)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)=\lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3}=-\frac{1}{4}i$$

Finalmente: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\lim_{R\to\infty}\oint_C\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}=2\pi i(-\frac{1}{4}i)=\frac{\pi}{2}$

## 5. Bibliografía

*Ahlfors, L. V.; Análisis de variable compleja, McGraw-Hill, New York 1979.*
*Apostol, T.M.; Análisis Matemático, Editorial Reverté, Barcelona, 1986*
*Caratheodory; Theory of functions of a complex variable, Chelsea, 2001.*
*Cartan, H.; Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas, Madrid, Selecciones Científicas, 1968.*
*Chinea, C.S.:* Sobre el teorema de la Integral de Cauchy-Goursat.
*Chinea, C.S.:* La Fórmula de la Integral de Cauchy.
*Chinea, C.S.:* Variable Compleja. Holomorfía y analiticidad.
*Chinea, C.S.:* Serie de Laurent. Singularidades.
*Copson, E. T.: An introduction to the theory of functions of a complex variable, Oxford University Press, 1970.*
*Goursat, E.; Cours d'analyse Mathematique, Gauthier Villars, Imprimeur Libraire, 1905, Paris.*
*Markushevich, A. I; Teoría de las funciones analíticas, Editorial Mir: Moscú 1970.*
*Philips, E. G.; Funciones de una variable compleja, Dossat, Madrid, 1963.*