Acerca de los homomorfismos

1. Homomorfismos

1.1. La idea de homomorfismo:

Definición 1_1
Dados dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpos k de escalares, *(V,k)* y *(V',k)* se denomina homomorfismo del espacio *(V,k)* al espacio *(V',k)* a toda aplicación $f: V \to W$ que verifique las condiciones de linealidad

$$\forall x, y \in V, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$\forall x \in V, \forall \alpha \in K, \; f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Representaremos por *Hom(V,V')* al conjunto de todos los homomorfismos, aplicaciones lineales, del espacio *(V,k)* en el espacio *(V',k)*.

Si un homomorfismo es biyectivo, se llamará isomorfismo, y si es inyectivo, monomorfismo. Si la aplicación es sobreyectiva, diremos que es un epimorfismo.

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata de la definición de homomorfismo.

Proposición 1_1
Si f es homomorfismo se cumple que:
a) $f(0)=0$
b) $f(-x)=-f(x), \forall x \in V$

En efecto:
a) Aplicamos la segunda condición de linealidad: $\forall x \in V, f(0)=f(0x)=0.f(x)=0$
b) Igualmente: $\forall x \in V$, $f(-x)=f((-1).x)=(-1).f(x)=-f(x)$

Esta otra proposición permite caracterizar los homomorfismos mediante una sencilla condición.

Proposición 1_2:
La condición necesaria y suficiente para que la aplicación $f: V \to V'$ sea lineal, es que

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \;\; \forall x, y \in V, \;\; \forall \alpha, \beta \in K$$

Demostración:
- condición necesaria: aplicamos directamente ambas condiciones de linealidad

$$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) + f(\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \;\; \forall x, y \in V, \;\; \forall \alpha, \beta \in K$$

- condición suficiente: hacemos $\alpha=1$, $\beta=1$ para obtener la primera condición de linealidad, y hacemos $q=0$ para obtener la segunda:

Hacemos $\alpha=1, \beta=1$:

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y),\ \forall x,y\in V \rightarrow f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x,y\in V$$

- Hacemos $\beta=0$:

$$f(\alpha x+0y)=\alpha f(x)+0f(y),\ \forall x,y\in V \rightarrow f(\alpha x)=\alpha f(x), \forall x\in V, \forall \alpha\in K$$

En el caso de que el espacio origen y el espacio imagen coincidan ($V=V'$), se introduce la idea de *endomorfismo*.

Definición 1_2: Se denomina *endomorfismo* en el espacio (V,k) a un homomorfismo $f:V\rightarrow V$, esto es, un homomorfismo de V en V. El endomorfismo se llama *epimorfismo* si la aplicación f es sobreyectiva, *monomorfismo* si es inyectiva y *automorfismo* si es biyectiva. Representaremos por $End(V)$ al conjunto de todos los endomorfismos en V.

1.2. Homomorfismos y variedades lineales

Definición 1_3:
Un subconjunto L de vectores de un espacio vectorial (V,k) es una variedad lineal de V si tiene también estructura de espacio vectorial con respecto al mismo cuerpo de escalares k.

Proposición 1_3:
La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto $L\subset V$ sea variedad lineal del espacio (V,k) es que $\forall x,y\in L, \forall a,b\in k, ax+by\in L$

Demostración:

- Condición suficiente:

Haciendo $a=1,b=1$, $\forall x,y\in L,\forall a,b\in k, ax+by\in L\rightarrow x+y\in L$, luego la suma de vectores es interna en L, y tiene las mismas propiedades de grupo que tiene en V.
Haciendo $b=0$, $\forall x\in L, \forall a\in K, ax\in L$, y tiene las mismas propiedades del producto de un vector por un escalar que tiene en V. Luego (L,k) es espacio vectorial, subespacio del espacio vectorial (V,k).

- Condición necesaria: trivialmente, $\forall x,y\in L,\forall a,b\in K\wedge L\ espacio\ vect\rightarrow$

$\rightarrow ax\in L, by\in L\rightarrow ax+by\in L$

Proposición 1_4:
Para todo homomorfismo $f:V\rightarrow W$ se verifica que

a) Si L es variedad lineal de V, entonces $f(L)$ es variedad lineal de W.
b) Si L' es variedad lineal de W, entonces $f^{1}(L')$ es variedad lineal de V.

Demostración:

a) Hemos de probar que $\forall x',y'\in f(L), \alpha x'+\beta y'\in f(L), \forall \alpha,\beta\in K$.

$\forall x',y'\in f(L), \exists x,y\in L / f(x)=x', f(y)=y' \wedge L\, \mathrm{var} lineal\rightarrow \alpha x+\beta y\in L, \forall\alpha,\beta\in K\rightarrow$

$\rightarrow f(\alpha x+\beta y)\in f(L)\rightarrow \alpha f(x)+\beta f(y)\in f(L)\rightarrow \alpha x'+\beta y'\in f(L)$

b) Hemos de probar que $\forall x,y\in f^{-1}(L), \alpha x+\beta y\in f^{-1}(L), \forall\alpha,\beta\in K$.

$\forall x,y\in f^{-1}(L)\rightarrow f(x),f(y)\in L\wedge L\, \mathrm{var} lineal\rightarrow \alpha f(x)+\beta f(y)\in L, \forall\alpha,\beta\in K\rightarrow$

$\rightarrow f(\alpha x+\beta y)\in L\rightarrow \alpha x+\beta y\in f^{-1}(L)$

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata de la proposición 1_4.

Proposición 1_5:
a) $f(V)$ es variedad lineal de V'.

b) $f^{-1}(0)$ es variedad lineal de V.
Ambas variedades lineales se denominan respectivamente variedad *imagen, y núcleo del homomorfismo*. Pueden ser simbolizadas por $img\,(V)$ y $\ker f$, respectivamente.
Demostración:

a) Trivialmente, puesto que V es una variedad lineal de si misma, $img\,(V)=f(V)$ es variedad lineal del espacio imagen V'.
b) Análogamente, al ser $\{0\}$ variedad lineal de W, es $ker\, f=f^{1}(0)$ variedad lineal del espacio V.

Definición 1_4:
Se denomina *rango* del homomorfismo $f:V\to V'$ al cardinal de una base B_f de la variedad lineal $f(V)$, o bien, si es $f(V)$ de dimensión finita, a su dimensión:

$$rang(f)=card(B_f) \text{ o bien } rang(f)=dim\, img(f(V))$$

Se denomina *nulidad* del homomorfismo $f:V\to W$ al cardinal de una base B'_f de la variedad lineal $f^{1}(0)$, o bien, si es $f^{1}(0)$ de dimensión finita, a su dimensión:

$$nulid(f)=card(B'_f) \text{ o bien } nulid(f)=dimkerf=dim\, f^{1}(0)$$

Proposición 1_6:
La condición necesaria y suficiente para que el homomorfismo $f:V\to V'$ sea inyectivo, es que $\ker f=\{0\}$.
- condición necesaria:

$$f\ inyectivo \leftrightarrow \forall x,y\in V, f(x)=f(y)\Rightarrow x=y.$$

$$\forall x\in\ker f,\ f(x)=0\wedge f(0)=0\to f(x)=f(0)\to x=0\to\ker f=\{0\}$$

- condición suficiente:

$$\ker f=\{0\}\wedge f(x)=f(y)\to f(x)-f(y)=0\to f(x-y)=0\to x-y\in\ker f\to$$

$$\to x-y=0\to x=y\to f\ inyectivo$$

Proposición 1_7:
Si B es una base del espacio V, entonces $f(B)$ contiene a una base de la variedad lineal imagen $f(V)$.
Demostración:
Sea $B=\{e_k\}$ una base de V. Se tiene que:

$$\forall x'\in f(V),\exists x\in V\,/\,f(x)=x'\to f(x)=f\left(\sum x^k e_k\right)=\sum x^k f(e_k)=x'\to f(B)=\{f(e_k)\}$$

genera a la variedad $f(V)$. Como todo sistema de generadores contiene subconjuntos linealmente independientes maximales, $f(B)$ contiene al menos una base de $f(V)$.

Proposición 1_8:
Sea B una base de V y sea B' una base de $Ker\, f$. Si es B'' el conjunto de vectores de V tal que $B=B'\bigcup B''$ y $B'\bigcap B''=\phi$, entonces $f(B'')$ es base de $f(V)$.
Demostración:
Por la proposición 1_7, $f(B)=f(B'\bigcup B'')$ es un sistema de generadores conteniendo una base de f(V). Como f(B')=0, tal base está contenida en f(B'').
Veamos que f(B'') es un conjunto de vectores linealmente independientes. Sea una familia cualquiera de vectores de f(B''), $\{e_k''\}_k$, que cumple que $\sum\alpha^k e_k''=0\to$

$\to \sum \alpha^k f(e_k) = f\left(\sum \alpha^k e_k\right) = 0 \to \sum \alpha^k e_k = 0$,y siendo $B = B' \cup B''$ base de V, se tiene que $\sum \alpha^k e_k = 0 \to \alpha^k = 0$, por lo cual $\sum \alpha^k e_k^{''} = 0 \to \alpha^k = 0$ y *f(B'')* es linealmente independiente, y como también es sistema de generadores de f(V), es una base.

Proposición 1_9:
Sea B una base de V. La condición necesaria y suficiente para que f sea suprayectiva es que *f(B)* sea sistema de generadores de *V'*.
Demostración:
-condición necesaria:
Puesto que por la Proposición 1_7 sabemos que *f(B)* es sistema de generadores de *f(V),* si f es suprayectiva será *V'=f(V)* y *f(B)* será sistema de generadores de *V'*.
-condición suficiente:
Si *f(B)* es sistema de generadores de V', entonces $\forall x' \in V',\ x' = \sum x^k f(e_k),$ siendo $\{f(e_k)\} \subseteq f(B)$, luego $x' = \sum x^k f(e_k) = f\left(\sum x^k e_k\right) = f(x),\ x \in V \to x' \in f(V)$, de donde, $V' \subseteq f(V) \to V' = f(V) \to$ f suprayectiva

2. Operaciones

En lo que sigue, consideraremos el conjunto *Hom(V,V')* de todos los homomorfismos de *V* en *V'*. Veremos como, con la definición que damos de suma y producto por un escalar, es un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo k del espacio V. Veremos también que con la operación de composición o producto de homomorfismos que exponemos, se trata de una álgebra asociativa.

2.1. Suma y producto por un escalar. Estructura de espacio vectorial:

Definición 2_1:
- suma:
$\forall f, g \in Hom(V,V'),\ (f+g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in V$
-Producto por un escalar:
$\forall f \in Hom(V,V'),\ \forall \alpha \in K,\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x),\ \forall x \in V$

Proposición 2_1:
(Hom(V,V'), +) es un grupo conmutativo.
Demostración:
-La suma es ley interna en Hom(V,V'):
$\forall f, g \in Hom(V,V'),\ \forall \alpha, \beta \in K,\ (f+g)(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x + \beta y) + g(\alpha x + \beta y) =$
$= f(\alpha x) + f(\beta y) + g(\alpha x) + g(\beta y) = \alpha(f(x) + g(x)) + \beta(f(y) + g(y)) =$
$= \alpha(f+g)(x) + \beta(f+g)(y) \to f + g \in Hom(V,V')$
-La suma es asociativa:
$\forall f, g, h \in Hom(V,V'),\ \left[(f+g)+h\right](x) = (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) =$
$= f(x) + (g(x) + h(x)) = \left[f + (g+h)\right](x),\ \forall x \in V$
-La suma es conmutativa:
$\forall f, g \in Hom(V,V'),\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x),\ \forall x \in V$
-Existe elemento nulo:
Sea $f_o \in Hom(V,V') / f_o(x) = 0, \forall x \in V.$

$\forall f \in Hom(V,V'), f(x)+f_o(x)=f_o(x)+f(x)=f(x)+0=0+f(x)=f(x)$

-Existe elemento opuesto:

Sea $-f \in Hom(V,V')/(-f)(x)=-f(x), \forall x \in V.$

$(f+(-f))(x)=((-f)(x)+f(x))=f(x)-f(x)=0, \forall x \in V \to f+(-f)=f_o$

Proposición 2_2:

El producto de los elementos del grupo *(Hom(V,V'), +)* por los elementos del cuerpo de escalares de ambos espacios tiene las siguientes propiedades: a) es ley interna en *(Hom(V,V'), +)*, b) Tiene asociatividad mixta, c) El producto de un escalar por una suma de homomorfismos es distributivo, d) El producto de una suma de escalares por un homomorfismo es distributivo, d) el elemento unidad del cuerpo de escalares es neutro al multiplicarlo por un homomorfismo del grupo.

Demostración:

a)El producto por un escalar es ley externa de $kxHom(V,V')$ *en* $Hom(V,V')$:

$\forall \alpha \in k, \forall f \in Hom(V,V'), (\alpha f)(px+qy)=\alpha f(px+qy)=\alpha pf(x)+\alpha qf(y)=$
$=p\alpha f(x)+q\alpha f(y)=p(\alpha f)(x)+q(\alpha f)(y), \forall x \in V \to \alpha f \in Hom(V,V')$

b)Asociatividad mixta:

$\forall \alpha, \beta \in k, \forall f \in Hom(V,V'), \alpha(\beta f)(x)=\alpha(\beta f(x))=(\alpha\beta)f(x)=((\alpha\beta)f)(x), \forall x \in V$

O sea: $\alpha(\beta f)=(\alpha\beta)f$

c)Distributividad del producto de escalares por suma de homomorfismos:

$\forall \alpha \in k, \forall f,g \in Hom(V,V'), \alpha(f+g)(x)=\alpha(f(x)+g(x))=\alpha f(x)+\alpha g(x)=$
$=(\alpha f+\alpha g)(x) \to \alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$

d)Distributividad del producto de una suma de escalares por un homomorfismo:

$\forall \alpha, \beta \in k, \forall f \in Hom(V,V'), (\alpha+\beta)f(x)=\alpha f(x)+\beta f(x))=(\alpha f+\beta f)(x) \to$
$\to (\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$

e)El producto por el elemento unidad del cuerpo de escalares:

$\forall f \in Hom(V,V'), \forall x \in V, 1.f(x)=f(x) \to 1.f=f$

Corolario:

$(Hom(V,V'),+,.k)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo k de escalares que definen los espacios vectoriales $(V,+,.k)$ y $(V',+,.k)$.

2.2. La composición de Homomorfismos. Estructura de álgebra asociativa:

Consideremos tres espacios vectoriales, $(V,+,.k)$, $(V',+,.k)$ y $(V'',+,.k)$, definidos sobre el mismo cuerpo de escalares, k, y sean $f \in Hom(V,V'), g \in Hom(V',V'')$. Se define entonces el homomorfismo composición de ambos como la aplicación compuesta gof. Esto es:

$$\forall f \in Hom(V,V'), g \in Hom(V',V''), \; gof \in Hom(V,V'')$$

definido por la condición:

$$\forall x \in V, (gof)(x)=g[f(x)] \in V''$$

Proposición 2_3:

La composición de los homomorfismos $f \in Hom(V,V'), g \in Hom(V',V'')$ es un homomorfismo $gof \in Hom(V,V'')$.

Demostración:

$(gof)(\alpha x+\beta y)=g[f(\alpha x+\beta y)]=g(\alpha f(x)+\beta f(y))=g(\alpha f(x))+g(\beta f(y))=$
$=\alpha g(f(x)+\beta g(f(y))=\alpha(gof)(x)+\beta(gof)(y), \forall x,y \in V, \forall f \in Hom(V,V'),$
$\forall g \in Hom(V',V''),$

Proposición 2_4:
Sea *End(V)* el conjunto de los homomorfismos de V en V (endomormismos).
1) El conjunto *End(V)* de los endomorfismos de V en V es un álgebra asociativa respecto a las operaciones de suma, producto escalar y composición de homomorfismos.
2) El anillo *(End(V),+,.)* no es un anillo íntegro.
Demostración:
1) Veamos que *(End(V),+,.K,o)* es un álgebra asociativa:

1.1. La composición de endomorfismos es ley interna:

$$\forall f,g \in End(V), \forall x,y \in V, \forall \alpha,\beta \in K, (fog)(\alpha x+\beta y) = f[g(\alpha x+\beta y)] =$$
$$= f(\alpha g(x)+\beta g(y)) = \alpha f(g(x)) + \beta f(g(y)) = \alpha(fog)(x) + \beta(fog)(y)$$

1.2. Es asociativa:

$$\forall f,g,h \in End(V), [fo(goh)](x) = f[(fog)(x)] = f[g(h(x))] = (fog)(h(x)) =$$
$$= [(fog)oh](x) \rightarrow fo(goh) = (fog)oh$$

1.3. Tiene elemento neutro:

Sea el endomorfismo $i: V \rightarrow V / \forall x \in V, i(x) = x$

$$\forall f \in End(V), (foi)(x) = f(i(x)) = f(x), (iof)(x) = i(f(x)) = f(x)$$

Por tanto, $foi = iof = f$, resulta que i es elemento neutro para la composición.

1.4. Es distributiva respecto de la suma:

$$\forall f,g,h \in End(V), [(f+g)oh)](x) = (f+g)[h(x)] = f[h(x))] + g[h(x))] =$$
$$= (foh)(x) + (goh)(x) \rightarrow (f+g)oh = foh + goh$$

1.5. No es conmutativa en general:

Veamos que la operación no es conmutativa encontrando al menos un caso en el cual no lo es (se trata de encontrar un contraejemplo):
Sea el espacio vectorial R^2 $(V=R^2)$ y sean los homomorfismos f y g definidos por:

$$f: R^2 \rightarrow R^2 / \forall(x,y) \in R^2, f(x,y) = (y,x) \in R^2$$
$$g: R^2 \rightarrow R^2 / \forall(x,y) \in R^2, f(x,y) = (x,0) \in R^2$$

Se tiene:

$$(gof)(x,y) = g[f(x,y)] = g(y,x) = (y,0)$$
$$(fog)(x,y) = f[g(x,y)] = f(x,0) = (0,x)$$

por tanto $gof \neq fog$ y la operación no es conmutativa.

2) Veamos que el anillo *(End(V),+,.)* tiene divisores de cero:

Sea $V = V_1 \oplus V_2$. Esto es, $\forall x \in V, \exists x_1 \in V_1, x_2 \in V_2 / x = x_1 + x_2$, de manera única.

Sea el endomorfismo nulo: $f_o: V \rightarrow V / f_0(x) = 0, \forall x \in V$, Y consideremos los homomorfismos

$$f_1: V_1 \rightarrow V / \forall x \in V_1, f_1(x) = x_1,\ f_1 \neq f_0$$
$$f_2: V_2 \rightarrow V / \forall x \in V_2, f_2(x) = x_2,\ f_2 \neq f_0$$

Se tiene:

$$\forall x \in V, (f_1 o f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = f_1(x_2) = 0 \equiv f_o(x)$$
$$\forall x \in V, (f_2 o f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(x_1) = 0 \equiv f_o(x)$$

En definitiva: $f_1 o f_1 = f_2 o f_1 = f_0 \wedge f_1 \neq f_0, f_2 \neq f_0$

Proposición 2_5:
El conjunto de los automorfismos de V es un grupo para la composición de homomorfismos, que se denomina *Grupo Lineal General, GL(V).*
Demostración:

Puesto que la composición de automorfismos (endomorfismos biyectivos o isomorfismos en V) es ley interna, asociativa y con elemento neutro, solo queda probar la existencia de inverso para todo $f \in GL(V)$.

$$\forall f \in GL(V), \exists f^{-1} \in GL(V) / fof^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x \to fof^{-1} = f^{-1}of = i$$

3. Relaciones

3.1 Relaciones de equivalencia compatibles con la estructura de espacio vectorial. Espacio cociente:

Si *(V,+,.k)* es un espacio vectorial sobre k, una relación de equivalencia R en V es una relación entre sus elementos que es reflexiva, simétrica y transitiva. Cada uno de los subconjuntos de V constituido por elementos entre sí equivalentes por la relación R, se llama *clase de R-equivalencia*. Así, representaremos por $clase_R[x]$ al conjunto de elementos equivalentes a $x \in V$ por la relación de equivalencia R. El conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia se denomina conjunto cociente de V por la relación de equivalencia R y se puede representar por V/R.

Veamos que definiendo adecuadamente la suma de clases y el producto de una clase por un escalar, puede dotarse al conjunto cociente, V/R, de estructura de espacio vectorial.

Definición 3.1:
Se define la suma de clases en V/R por:

$$clase_R[x] + clase_R[x] = clase_R[x+y], \forall x, y \in V$$

Proposición 3.1.
El conjunto cociente V/R dotado de la suma de clases, *(V/R, +),* tiene estructura de grupo conmutativo.
Demostración:

1. Es uniforme:
   Se verifica que $xRx' \wedge yRy' \to (x+y)R(x'+y')$, ya que:
   $$\left.\begin{array}{l} xRx' \to clase_R[x] = clase_R[x'] \\ yRy' \to clase_R[y] = clase_R[y'] \end{array}\right\} \to clase_R[x] + clase_R[y] = clase_R[x'] + clase_R[y'] \to$$
   $$\to clase_R[x+y] = clase_R[x'+y'] \to (x+y)R(x'ý')$$
2. Es asociativa:
   $$\forall clase_R[x], clase_R[y], clase_R[z] \in V/R, (clase_R[x] + clase_R[y]) + clase_R[z] =$$
   $$= clase_R[x+y] + clase_R[z] = clase_R[(x+y)+z] = clase_R[x+(y+z)] =$$
   $$= clase_R[x] + clase_R[y+z] = clase_R[x] + (clase_R[y] + clase_R[z])$$
3. Es conmutativa:
   $$\forall clase_R[x], clase_R[y] \in V/R, clase_R[x] + clase_R[y] = clase_R[x+y] = clase_R[y+x] =$$
   $$= clase_R[y] + clase_R[x]$$
4. Tiene elemento neutro:
   Sea $clase_R[0] = \{u \in V / uR0\}$
   $$\forall clase_R[x] \in V/R, clase_R[x] + clase_R[0] = clase_R[x+0] = clase_R[x]$$
5. Existe el opuesto de cualquier elemento:

$$\forall clase_R[x] \in V/R, clase_R[x] + clase_R[-x] = clase_R[x-x] = clase_R[0]$$

Definición 3.2:
Se define el producto de una clase por un escalar de la manera siguiente:

$$\forall \alpha \in K, \forall x \in V, \alpha.clase_R[x] = clase_R[\alpha.x]$$

Proposición 3.2:
El conjunto cociente, V/R, dotado de la suma de clases y del producto de una clase por un escalar, es un espacio vectorial definido sobre el cuerpo k de escalares del espacio V.
Demostración:

1. Asociatividad mixta:

$$\forall \alpha, \beta \in k, \forall clase_R[x] \in V/R, \alpha.(\beta.clase_R[x]) = \alpha.clase_R[\beta x] = clase_R[\alpha.\beta(x)] =$$
$$= clase_R[(\alpha.\beta).x] = (\alpha.\beta).clase_R[x]$$

2. Distributividad del producto de escalares por suma de clases:

$$\forall \alpha \in k, \forall clase_R[x], clase_R[y] \in V/R, \alpha.(clase_R[x] + clase_R[y]) = \alpha.clase_R[x+y] =$$
$$= clase_R[\alpha(x+y)] = clase_R[\alpha.x + \alpha.y)] = clase_R[\alpha.x)] + clase_R[\alpha.y] = \alpha.clase_R[x] +$$
$$+ \alpha clase_R[y]$$

3. Distributividad del producto de clases por suma de escalares:

$$\forall \alpha, \beta \in k, \forall clase_R[x] \in V/R, (\alpha+\beta).clase_R[x] = clase_R[(\alpha+\beta).x] = clase_R[(\alpha+\beta)x] =$$
$$= clase_R[\alpha.x + \beta.x] = clase_R[\alpha.x] + clase_R[\beta.x] = \alpha.clase_R[x] + \beta.clase_R[x]$$

4. Propiedad del 1 del cuerpo:

$$\forall clase_R[x] \in V, 1.clase_R[x] = clase_R[1.x] = clase_R[x)]$$

Definición 3.3:
Se denomina *espacio vectorial cociente $(V/R,+,.k)$* al conjunto cociente V/R dotado de la suma de clases y producto por un escalar.

Proposición 3.3:
Dado un espacio vectorial V y una relación de equivalencia R, la aplicación f de V en V/R tal que a cada elemento x del espacio le corresponde la clase de equivalencia cuyo representante es x, es un homomorfismo cuyo núcleo es $\ker f = \{x / xR0\}$.
Demostración:

$$\forall a,b \in k, \forall x,y \in V, f(ax+by) = clase_R[ax+by] = a.clase_R[x] + b.clase_R[y] = af(x) + bf(y)$$
$$\forall x \in \ker f, f(x) = clase_R[0] = clase_R[x] \to xR0$$

Obviamente, tal homomorfismo es sobreyectivo, es decir, se trata de un epimorfismo, ya que para cualquier elemento del espacio cociente, $clase_R[x]$, existe un elemento $x \in V$ tal que $f(x) = clase_R[x]$

3.2. Relación de equivalencia definida por una variedad lineal y relación de equivalencia definida por un homomorfismo:

Hemos visto, en la proposición 3.3, que una relación de equivalencia induce un homomorfismo del espacio vectorial dado en el espacio cociente por la relación de equivalencia. Interesa saber cómo definir una relación de equivalencia mediante una condición de pertenencia a una variedad lineal, y también, por la igualdad de imágenes de un homomorfismo del espacio dado en otro espacio cualquiera. En lo que sigue vamos a ver que las relaciones definidas de uno u otro modo son, para una determinada variedad lineal, equivalentes entre sí.

3.2.1. Relación de equivalencia definida por una variedad lineal del espacio:
Definición 3.4:
Dado un espacio vectorial *(V,+,.k)* y una variedad lineal L del mismo, se define la relación R_L del modo siguiente:

$$\forall x, y \in V,\ xR_L y \leftrightarrow x - y \in L$$

Proposición 3.4:
La relación R_L es de equivalencia y compatible con la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar. El núcleo del homomorfismo e inducido es precisamente la variedad lineal L.
Demostración:
- Es relación de equivalencia:
Reflexiva:
$\forall x \in V,\ x - x = 0 \in L \to xR_L x$
Simétrica:
$\forall x, y \in V,\ xR_L y \to x - y \in L \to y - x \in L \to yR_L x$
Transitiva:
$\forall x, y, z \in V, xR_L y \to x - y \in L \wedge yR_L z \to y - z \in L \to x - y + y - z \in L \to x - z \in L \to xR_L z$
Es, por tanto, relación de equivalencia, cuyo espacio cociente podemos representar por *V/L*.
- Es compatible con las operaciones del espacio:
Compatibilidad con la suma de vectores:
$xR_L x' \wedge yR_L y' \to x - x' \in L \wedge y - y' \in L \to (x + y) - (x' + y') \in L \to (x + y)R_L (x' + y')$
Compatibilidad con el producto por un escalar:
$xR_L x' \wedge \alpha \in K \to x - x' \in L \wedge \alpha \in K \to \alpha x - \alpha x' \in L \to \alpha x R_L \alpha x'$
- El núcleo del homomorfismo inducido es la variedad lineal L:
El homomorfismo inducido $e : V \to V / L$ está definido por la condición:

$$\forall x \in V, e(x) = clase_L[x]$$

$$\forall x \in \ker e,\ e(x) = \left.\begin{matrix} clase_L[x] = x + L \\ clase_L[0] = 0 + L \end{matrix}\right\} \to x - 0 \in L \to x \in L \to \ker e \subseteq L$$

$\forall x \in L,\ x - 0 \in L \to x \in clase_L[0] \to clase_L[x] = clase_L[0] \to e(x) = clase_L[x] = clase_L[0] \to$
$\to x \in \ker e \to L \subseteq \ker e$
Por tanto: $L = \ker e$
3.2.2. Relación de equivalencia inducida por un homomorfismo del espacio en otro espacio cualquiera:
Definición 3.5:
Dado un espacio vectorial *(V,+,.k)* y un homomorfismo $f : V \to V'$ en otro espacio V' cualquiera, se define la relación R_L del modo siguiente:

$$\forall x, y \in V,\ xR_f y \leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Proposición 3.5:
La relación R_f es de equivalencia y compatible con la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar.
Demostración:
- Es relación de equivalencia:
Reflexiva:
$\forall x \in V, f(x) = f(x) \to xR_f x$
Simétrica:
$\forall x, y \in V,\ xR_f y \to f(x) = f(y) \to f(y) = f(x) \to yR_f x$

Transitiva:
$\forall x, y, z \in V, xR_f y \to f(x) = f(y) \wedge yR_L z \to f(y) = f(z) \to f(x) = f(z) \to xR_L z$
Es, por tanto, relación de equivalencia, cuyo espacio cociente podemos representar por *V/f*.
- Es compatible con las operaciones del espacio:
  Compatibilidad con la suma de vectores:

$$xR_f x' \wedge yR_f y' \to f(x) = f(x') \wedge f(y) = f(y') \to f(x) + f(y) = f(x') + f(y') \to f(x+y) =$$
$$= f(x'+y') \to (x+y)R_f(x'+y')$$

  Compatibilidad con el producto por un escalar:

$$xR_f x' \wedge \forall \alpha \in k \to f(x) = f(x') \wedge \alpha \in k \to \alpha f(x) = \alpha f(x') \to f(\alpha x) = f(\alpha x') \to \alpha x R_f \alpha x'$$

3.2.3. Ambas relaciones son entre si equivalentes cuando la variedad lineal es el núcleo del homomorfismo *f* que define una de las dos relaciones:
Dado el homomorfismo $f: V \to V'$, su núcleo, $\ker f$, es una variedad lineal de *V*, y como tal, define una relación de equivalencia R_k. Si consideramos también la relación de equivalencia R_f definida por el homomorfismo, podemos enunciar la proposición siguiente.
Proposición 3.6:
Si es R_f la relación de equivalencia definida por el homomorfismo $f: V \to V'$ y es R_k la relación de equivalencia definida por la variedad lineal $\ker f$, se verifica que

$$\forall x, y \in V, xR_f y \leftrightarrow xR_k y$$

Demostración:
- Si $xR_f y \to f(x) = f(y) \to f(x) - f(y) = 0 \to f(x-y) = 0 \to x - y \in \ker f \to xR_k y$
- Si $xR_k y \to x - y \in \ker f \to f(x-y) = 0 \to f(x) - f(y) = 0 \to f(x) = f(y) \to xR_f y$

Al ser equivalentes R_k y R_f, quiere esto decir que el espacio cociente es el mismo, esto es, *V/f = V/kerf*.

4. Los teoremas de isomorfía

De lo anterior, tenemos que todo homomorfismo, $f: V \to V'$, induce un epimorfismo canónico $e: V \to V/\ker f$. Como también se cumple $f(V) \subseteq V'$, podemos establecer que existe un monomorfismo de inmersión $j: f(V) \to V'$. El teorema siguiente permite obtener un tercer homomorfismo que cierra la descomposición del homomorfismo $f: V \to V'$.

4.1. Primer teorema de isomorfía:

Dado un espacio vectorial V y un homomorfismo $f: V \to V'$ en otro espacio vectorial, V', existe un isomorfismo $i: V/\ker f \to f(V)$, tal que

$$\forall (x + \ker f) \in V/Kerf, i(x + \ker f) = f(x)$$

Demostración:
a) Es una aplicación:

$$x + \ker f = y + \ker f \to x - y \in \ker f \to f(x-y) = 0 \to f(x) - f(y) = 0 \to f(x) = f(y) \to$$
$$\to i(x + \ker f) = (y + \ker f)$$

b) Es homomorfismo:

$$i(\alpha.(x+\ker f)+\beta.(y+\ker f))=i(\alpha x+\beta y+\ker f))=f(\alpha x+\beta y)=\alpha.f(x)+\beta.f(y)=$$
$$=\alpha.i(x+\ker f)+\beta.i(y+\ker f))$$

c) Es sobreyectiva:

$$\forall y\in f(V),\exists x\in V\,/\,f(x)=y\rightarrow\exists(x+\ker f)\in V/Kerf,\ i(x+\ker f)=y$$

d) Es inyectiva:

$$i(x+\ker f)=i(y+\ker f)\rightarrow f(x)=f(y)\rightarrow f(x)-f(y)=0\rightarrow f(x-y)=0\rightarrow$$
$$\rightarrow x-y\in\ker f\rightarrow x+\ker f=y+\ker f$$

Corolario: Todo homomorfismo $f:V\rightarrow V'$ puede descomponerse canónicamente en la composición de un monomorfismo, un isomorfismo y un epimorfismo:

$$f=j\circ i\circ e$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V} \arrow[r, "\mathbf{f}"] \arrow[d, "\mathbf{e}"'] & \mathbf{V'} \\
\mathbf{V/\ker f} \arrow[r, "\mathbf{i}"'] & \mathbf{f(V)} \arrow[u, "\mathbf{j}"']
\end{tikzcd}$$

4.2. Segundo teorema de isomorfía:

Consideremos un espacio vectorial *(V,+,.k)* y dos variedades lineales cualesquiera, L_1 y L_2, del mismo. Se tiene que los espacios cocientes L_1+L_2/L_1 y $L_2/L_1\cap L_2$ son isomorfos:

$$L_1+L_2\Big/L_1\cong L_2\Big/L_1\cap L_2$$

Demostración:

a) Puesto que L_2 y L_1 son subespacios vectoriales también lo son L_1+L_2 y $L_1\cap L_2$ por lo que existe un epimorfismo canónico de L_1+L_2 en L_1+L_2/L_1:

$$e:L_1+L_2\rightarrow L_1+L_2\Big/L_1$$

que podemos restringir a L_2, quedando

$$e:L_2\rightarrow L_1+L_2\Big/L_1$$

y por el primer teorema de isomorfía, sabemos que existe un isomorfismo entre las variedades $L_2/\ker e$ y $e(L_2)$:

$$L_2\Big/\ker e\cong e(L_2) \qquad [0]$$

veamos que *ker e* puede sustituirse por $L_1\cap L_2$:

$$\forall x\in L_2\,/\,x\in Ker\ e,\ e(x)=clase[0]=clase[x]=0+L_1=x+L_1\rightarrow x-0\in L_1\rightarrow x\in L_1\cap L_2$$

o sea, $\ker e\subseteq L_1+L_2$

$\forall x \in L_1 \bigcap L_2 / e(x) = 0 + L_1 \to x \in \ker e \to L_1 \bigcap L_2 \subseteq \ker e$

De ambas inclusiones, se deduce la igualdad $L_1 \bigcap L_2 = \ker e$, por lo que al sustituir en [0] queda:

$$L_2 \big/ L_1 \bigcap L_2 \cong e(L_2) \qquad \textbf{[1]}$$

b) Consideremos nuevamente el epimorfismo

$$e : L_1 + L_2 \to L_1 + L_2 \big/ L_1$$

podemos restringirlo ahora a $e^{-1}e(L_2)$, con lo que es

$$e : e^{-1}e(L_2) \to L_1 + L_2 \big/ L_1$$

y aplicando aquí también el primer teorema de isomorfía, se tiene que existe isomorfismo entre $e^{-1}e(L_2)/\ker e$ y $e(e^{-1}e(L_2)) = e(L_2)$:

$$\frac{e^{-1}e(L_2)}{\ker e} \cong e(L_2)$$

y repitiendo los pasos del proceso descrito en el apartado a), también aquí es posible sustituir $\ker e$, siendo ahora $\ker e = e^{-1}e(L_2) \bigcap L_1$, por lo cual queda:

$$\frac{e^{-1}e(L_2)}{e^{-1}e(L_2) \bigcap L_1} \cong e(L_2)$$

Veamos finalmente que $e^{-1}e(L_2)$ puede sustituirse por $L_1 + L_2$:

$\forall x \in e^{-1}e(L_2), e(x) = x + L_1 \in e(L_2) \to \exists (y + L_1), y \in L_2 / e(x) = x + L_1 = y + L_1 \to$

$\to x - y \in L_1 \to x - y = z \to x = y + z \in L_1 + L_2 \to \forall x \in e^{-1}e(L_2), x \in L_1 + L_2 \to$

$\to e^{-1}e(L_2) \subseteq L_1 + L_2$

$\forall x \in L_1 + L_2, x = x_1 + x_2 / x_1 \in L_1 \wedge x_2 \in L_2 \wedge e(x) = (x_1 + x_1) + L_1 = x_2 + L_1 \in e(L_2) \to$

$\to x \in e^{-1}e(L_2) \to L_1 + L_2 \subseteq e^{-1}e(L_2)$

De ambas inclusiones: $L_1 + L_2 = e^{-1}e(L_2)$, por lo que al sustituir en la expresión anterior

$$e^{-1}e(L_2) \bigcap L_1 = (L_1 + L_2) \bigcap L_1 = L_1$$

quedando:

$$\frac{e^{-1}e(L_2)}{e^{-1}e(L_2) \bigcap L_1} \cong e(L_2) \to \frac{L_1 + L_2}{L_1} \cong e(L_2) \qquad [2]$$

c) De los resultados [1] y [2] se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{L_2}{L_1 \bigcap L_2} \cong e(L_2) \\ \dfrac{L_1 + L_2}{L_1} \cong e(L_2) \end{array}\right\} \to \frac{L_2}{L_1 \bigcap L_2} \cong \frac{L_1 + L_2}{L_1}$$

4.3. Aplicación de los teoremas de isomorfía al estudio de la dimensión de variedades lineales:

Pueden aplicarse los enunciados de ambos teoremas de isomorfía para establecer la relación de la dimensión de un espacio vectorial con la dimensión de una variedad lineal cualquiera del mismo.

Proposición 4.1:
Dado el espacio vectorial *(V,+,.k)*, la dimensión de una variedad lineal L del mismo es la diferencia entre la dimensión del espacio vectorial V y la dimensión del espacio cociente de V por la variedad lineal:

$$\dim L = \dim V - \dim(V/L)$$

Demostración:
Sea L' tal que $V = L \oplus L'$ (V es suma directa de ambas, $V = L \bigcup L', L \bigcap L' = \phi$). Si llamamos $N=\dim V$, $n=\dim L$, $n'=\dim L'$, se tiene que $N = n+n'$.
Aplicando el segundo teorema de isomorfía:
$\frac{L \oplus L'}{L} \cong \frac{L'}{L \bigcap L'} \rightarrow \frac{L \oplus L'}{L} \cong \frac{L'}{\{0\}} = L'$, es decir: $\frac{V}{L} \cong L'$, con lo cual es $\dim(V/L) = n'$, y queda $\dim(V/L) = n' = N - n$, de donde $N = \dim(V/L) + n$, o bien $n = N - \dim(V/L)$:

$$\dim L = \dim V - \dim(V/L)$$

Proposición 4.2:
Dado el espacio vectorial *(V,+,.k)*, y un homomorfismo $f : V \rightarrow V'$, en otro espacio vectorial cualquiera V', la dimensión del espacio vectorial V es la suma de la dimensión de la variedad $Ker\, f$ y la dimensión de la variedad $f(V)$:

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(f(V))$$

Demostración:
Aplicando el primer teorema de isomorfía:

$V / \ker f \cong f(V)$ de donde $\dim(V / \ker f) = \dim f(V)$

y, puesto que $\ker f$ es una variedad del espacio V, podemos aplicar la proposición 4.1, quedando:

$$\dim L = \dim V - \dim(V/L) \rightarrow \dim(\ker f) = \dim V - \dim(V/\ker f) = \dim V - \dim f(V)$$

en definitiva:

$$\dim V = \dim(\ker f) + \dim(f(V))$$

Proposición 4.3:
Dado el espacio vectorial *(V,+,.k)*, y dos variedades lineales cualesquiera del mismo, L_1 y L_2, se cumple que la dimensión de la variedad suma de ambas es la suma de sus dimensiones menos la dimensión de su intersección:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \bigcap L_2)$$

Demostración:
Aplicamos el segundo teorema de isomorfía:

$$\frac{L_1 + L_2}{L_1} \cong \frac{L_2}{L_1 \bigcap L_2}$$

o sea: $\dim\left(\frac{L_1 + L_2}{L_1}\right) \cong \dim\left(\frac{L_2}{L_1 \bigcap L_2}\right)$

Aplicamos la proposición 4.1:

$\dim\left(\frac{L_1+L_2}{L_1}\right)\cong\dim\left(\frac{L_2}{L_1\bigcap L_2}\right)\to\dim(L_1+L_2)-\dim L_1=\dim L_2-\dim(L_1\bigcap L_2)$, de donde se obtiene la igualdad propuesta:

$$\dim(L_1+L_2)=\dim L_1+\dim L_2-\dim(L_1\bigcap L_2)$$

5. Existencia de homomorfismos

5.1. Teorema fundamental de existencia:

Sea $(V,+,.k)$ un espacio vectorial finitodimensional y sea $(V',+,.k)$ otro espacio vectorial sobre el mismo cuerpo k de escalares.

Sea $B=\{e_i\}_{1\le i\le n}$ una base de V.

Sea $\varphi=\{x_i'\}_{1\le i\le n}$ una familia de vectores de V'.

Se verifica:

a) Existe un homomorfismo único, $f:V\to V'$, tal que $f(e_i)=x_i', 1\le i\le n$.

b) Si la familia φ es linealmente independiente, entonces f es monomorfismo.
Si la familia φ es sistema de generadores, entonces f es epimorfismo.
Si la familia φ es una base, entonces f es isomorfismo.

Demostración:

a) Definamos la aplicación $f:V\to V'$ por la condición de que

$$\forall x\in V,\ f(x)=f\left(\sum_{i=1}^n a^i e_i\right)=\sum_{i=1}^n a^i x_i'$$

Probemos que se trata de un homomorfismo:

$$\forall x,y\in V,\ \forall\alpha,\beta\in k,\ f(\alpha x+\beta y)=f\left(\alpha\sum_{i=1}^n a^i e_i+\beta\sum_{i=1}^n b^i e_i\right)=f\left(\sum_{i=1}^n(\alpha a^i+\beta b^i)e_i\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^n(\alpha a^i+\beta b^i)x_i'=\sum_{i=1}^n\alpha a^i x_i'+\sum_{i=1}^n\beta b^i x_i'=\alpha\sum_{i=1}^n a^i x_i'+\beta\sum_{i=1}^n b^i x_i'=\alpha f\left(\sum_{i=1}^n a^i e_i\right)+$$

$$+\beta f\left(\sum_{i=1}^n b^i e_i\right)=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

Probemos que es único:

Si existiera otro homomorfismo $g:V\to V'$ que verifique la condición impuesta, se tiene que

$$\forall x\in V,\ g(x)=g\left(\sum_{i=1}^n a^i e_i\right)=\sum_{i=1}^n a^i g(e_i)=\sum_{i=1}^n a^i x_i'$$

por tanto $g=f$.

b) Si es $\varphi=\{x_i'\}_{1\le i\le n}$ linealmente independiente, veamos que el homomorfismo f ha de ser necesariamente inyectivo, y, por tanto, monomorfismo:

$$f(x)=f(y)\to f\left(\sum_{i=1}^n a^i e_i\right)=f\left(\sum_{i=1}^n b^i e_i\right)\to\sum_{i=1}^n a^i x_i'=\sum_{i=1}^n b^i x_i'\to\sum_{i=1}^n(a^i-b^i)x_i'=0\to$$

$$=a^i-b^i=0\to a^i=b^i\to\sum_{i=1}^n a^i e_i=\sum_{i=1}^n b^i e_i\to x=y$$

Si es $\varphi = \{x_i^{'}\}_{1\le i\le n}$ sistema de generadores, veamos que el homomorfismo f ha de ser necesariamente sobreyectivo, y, por tanto, epimorfismo:

$$\forall x' \in V', \exists a^i \in k, 1 \le i \le n \,/\, x' = \sum_{i=1}^{n} a^i x_i^{'} = \sum_{i=1}^{n} a^i f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a^i e_i\right) = f(x)$$

es decir, $\forall x' \in V', \exists x \in V \,/\, f(x) = x'$

Si es $\varphi = \{x_i^{'}\}_{1\le i\le n}$ una base entonces, obviamente, el homomorfismo f es inyectivo y sobreyectivo, por lo que es biyectivo, y por tanto isomorfismo.

5.2. Expresión analítica. Matriz de un homomorfismo:

Consideremos el homomorfismo entre los espacios vectoriales V y V', $f : V \to V'$, y sendas bases en dichos espacios.

$B = \{e_k\}_{1\le k\le n}$ base del espacio *(V,+,.k)*.

$B' = \{e'_k\}_{1\le k\le m}$ base del espacio *(V,+,.k)*.

Es decir, $\forall x \in V, x = \sum_{k=1}^{n} a^k e_k$, y, asimismo, $\forall x' \in V', x' = \sum_{k=1}^{m} a'^j\, e'_j$.

Si es $f(x) = x$, se tiene que

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} a^k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a^k f(e_k) = \sum_{k=1}^{m} a'^k\, e'_k ,$$

y como $f(e_k) \in V$, se puede expresar también en la base B':

$$f(e_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} e'_j ,$$

que al sustituir en la anterior expresión, queda:

$$\sum_{k=1}^{n} a^k f(e_k) = \sum_{j=1}^{m} a'^j\, e'_j \to \sum_{k=1}^{n} a^k \left(\sum_{j=1}^{m} a_{kj} e'_j\right) = \sum_{k=1}^{m} a'^j\, e'_j$$

o bien:

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} a^k\right) e'_j = \sum_{j=1}^{m} a'^j\, e'_j$$

por lo que al identificar coeficientes:

$$a'^j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} a^k , \quad j = 1,\dots,m$$

o sea, desarrollando la suma:

$$\left.\begin{array}{l} a'^1 = a_{11}a^1 + a_{21}a^2 + \dots + a_{n1}a^n \\ a'^2 = a_{12}a^1 + a_{22}a^2 + \dots + a_{n2}a^n \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a'^m = a_{1m}a^1 + a_{2m}a^2 + \dots + a_{nm}a^n \end{array}\right\} \to \begin{pmatrix} a'^1 \\ a'^2 \\ \dots \\ a'^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \dots \\ a^n \end{pmatrix}$$

La matriz del cambio de base es

$$\left(a_{kj}\right)_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

A todo homomorfismo entre espacios vectoriales de dimensiones n y m le corresponde una matriz de orden nxm.

Bibliografía

ABELLANAS, P., "Elementos de Matemática", Edit. Romo, Madrid, 1973
BIRKHOFF, G.-MCLANE, S.; "Álgebra Moderna", Editorial Vicens-Vives, Madrid, 1974
QUEYSANNE, M.; "Álgebra Básica", Editorial Vicens-Vives, Madrid, 1990
ABELLANAS, P., "Geometría Básica", Edit. Romo, Madrid, 1969
HOFFMAN, K., "Álgebra Lineal",Prentice Hall Interamericana, 1973.
CASTELLET, M.-LLERENA, I.; "Álgebra Lineal y Geometría", Ed. Reverté, Barcelona, 1996