La holomorfía y la analiticidad

Introducción

Una función $f(z)$ de variable compleja es analítica en un abierto conexo D si puede expresarse como una serie de potencias convergente en todo punto de D.

Una función $f(z)$ de variable compleja es holomorfa en un abierto conexo D del plano complejo si es una función complejo-diferenciable en todo punto de D.

Vamos a ver a continuación que toda función analítica en D es también holomorfa en D, y recíprocamente, toda función holomorfa en el recinto D es también analítica en dicho recinto. O sea, la holomorfía y la analiticidad resultan ser equivalentes.

La holomorfía de una función analítica, esto es, de una función desarrollable en serie convergente de las potencias de la variable compleja resulta ser trivial si observamos la derivabilidad de las potencias de la serie, mientras que la analiticidad de una función holomorfa requiere probar que es desarrollable en serie de potencias de la variable compleja, lo que haremos aquí usando el desarrollo y teorema de Taylor para una función holomorfa.

Sobre las funciones analíticas

1. Definición:

Sea $f: D \rightarrow C$ una función definida en un abierto conexo D del plano complejo. Se dice que $f(z)$ es analítica en un punto $z_0 \in D$ si existe una serie de potencias centrada en z_0 con radio de convergencia positivo, tal que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \ \forall z \in D$$

La función $f(z)$ se dice analítica en D si es analítica en todo punto de D.
Una función que es analítica en todo el plano se denomina *función entera.*

2. Ejemplos:

- Los polinomios con coeficientes complejos
- Las funciones trigonométricas directas
- La función exponencial.
- Funciones logaritmo (en su rama principal)
- $1/z$, salvo en el origen.

3. Operaciones elementales con funciones analíticas:

De la teoría de series:

a) La suma y producto de funciones analíticas son también analíticas.
b) Si una función *f* es analítica en un punto $z_0 \in D$, entonces $1/f$ es también analítica si $f(z) \neq 0$.
c) Para dos funciones $f: D \rightarrow C$ y $g: D' \rightarrow C$, se tiene que si $f(D) \subseteq D'$ se

cumple que si f es analítica en z_0 y g es analítica en $f(z_0)$, entonces $g \circ f$ es analítica en z_0.

4. El carácter analítico de la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ en $z_0 \neq 1$:

$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$, pues la suma corresponde a los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término la unidad y de razón z $(|z| < 1)$.

Mediante una pequeña modificación podemos expresarla como una serie convergente de potencias de $z - z_0$:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{1-z_0}.\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}} = \frac{1}{1-z_0}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(1-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$$

5. Holomorfía de las funciones analíticas:
Teorema:
Toda función analítica en un abierto conexo D es también holomorfa en D.
Demostración:
Trivialmente, al ser la derivación una propiedad local, las potencias de la variable z son derivables, es decir, son holomorfas, por lo que la suma de todas las derivadas es también la derivada de la función que se desarrolla en serie convergente de potencias. La función desarrollable en serie de potencias es holomorfa.

Sobre las funciones holomorfas

1. Definición:
Sea $f: D \to C$ una función definida en un abierto conexo D del plano complejo. Se dice que $f(z)$ es holomorfa en un punto $z_0 \in D$ (o que tal punto es regular respecto a la función) si $f(z)$ es derivable en todos los puntos de un entorno de z_0. La función es holomorfa en D si es holomorfa en todo punto de D.

2. Precisamos el concepto de derivada compleja:
Diremos que la función $f: D \to C$ es derivable en el punto $z_0 \in D$ si existe el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in C$$

que llamaremos *derivada de* f *en* z_0.

3. Propiedades de la derivación:
Las propiedades elementales son análogas a las de la derivada de funciones reales.

a) Si f *es derivable en* z_0*, entonces* f *es continua en* z_0.
b) La suma de funciones derivables es derivable y su derivada es la suma de las derivadas: $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.
c) La multiplicación es derivable y es $(f.g)'f(z_0) = f'(z_0).g(z_0) + g'(z_0).f(z_0)$
d) Si $f(z_0) \neq 0$ entonces la inversa es derivable y es $(1/f)'(z_0) = -f'(z_0)/f(z_0)^2$
e) Si $f: D \to C$ y $g: D' \to C$, con $f(D) \subseteq D'$ se tiene que si f es derivable en z_0 y g es derivable en $f(z_0)$ entonces $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.

f) Si $f: D \to C$ es inyectiva y derivable en z_0 con $f'(z_0) \neq 0$, y si $f(D)$ es abierto y f^{-1} es continua en $f(z_0)$, entonces f^{-1} es derivable en $f(z_0)$ y se verifica que $(f^{-1})'(f(z_0)) = 1/f'(z_0)$.

4. Desarrollo y teorema de Taylor:
- Desarrollo en serie de Taylor

Teorema:
Para toda función compleja $f(z)$, holomorfa en un abierto conexo D, se verifica que $\forall z_0 \in D$ existe una serie formal $S(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ tal que

$$f(z) = S(z - z_0), \ \forall z \in B(z_0; r), \forall r > 0 / B(z_0; r) \subseteq D$$

Demostración:
Llamemos $F(D)$ a la frontera del abierto conexo. $\forall z_0 \in D$, sea $d = d(z_0, F(D))$ la distancia de z_0 a dicha frontera. Se tiene que $\forall z \in B(z_0, r) \subseteq D \to d(z, z_0) < d$, y además $\exists r' > 0 / 0 < d(z, z_0) < r' < d$.
Consideremos la bola $B(z_0, r')$ y su frontera $F(B(z_0, r'))$. Si es C el ciclo definido por dicha frontera, $C = F(B(z_0, r'))$, será el numero de vueltas a z_0: $\vartheta(C, z) = 1$.
Por tanto, al considerar la fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i \vartheta(C,z)} \oint_C \frac{f(u)}{u-z} du = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{u-z} du$$

se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{u-z} du = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{(u-z_0)-(z-z_0)} du = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{u-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{u-z_0}} du \qquad [1]$$

por ser $u \in C$ será $|u - z_0| > |z - z_0| \to \left|\frac{z-z_0}{u-z_0}\right| < 1$, con lo cual vemos que el término $\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{u-z_0}}$ que figura en la integral es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término la unidad y razón $\frac{z-z_0}{u-z_0}$ tal que $\left|\frac{z-z_0}{u-z_0}\right| < 1$. (es el caso de $1 + x + x^2 + ... = 1/_{1-x}$, si $|x| < 1$)

por consiguiente $\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{u-z_0}} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^n$, y la integral [1] puede expresarse así:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{u-z_0} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^n du = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n\geq 0} \frac{(z-z_0)^n}{(u-z_0)^{n+1}} f(u) du$$

la cual queda, integrando término a término:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du$$

y de la fórmula de Cauchy para la derivada n-sima $\left(f^{n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}du \right)$ se tiene finalmente que

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{n)}(z)}{n!}\left(z-z_0\right)^n$$

que es el desarrollo de Taylor de la función holomorfa $f(z)$.

Podemos encontrar una expresión integral para tal suma infinita mediante un teorema fundamental conocido como *teorema del resto de Taylor* o simplemente *teorema de Taylor*.

-Teorema de Taylor
Teorema:
$\forall z_0 \in D, \forall n \in N, \forall z \in B(z_0;r), \forall r > 0$, tal que $B(z_0;r) \subseteq D$, se verifica:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(u)}{u-z}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^{n+1} du$$

siendo C la circunferencia de radio r' y centro z_0 tal que $z_0 \in B(z_0;r'), B(z_0;r') \subseteq D$

Demostración:
Podemos expresar el desarrollo de Taylor en la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(z)}{k!}\left(z-z_0\right)^k + R_n(z)$$

Donde $R_n(z)$ es la suma de los términos que van desde el n+1-esimo en adelante, y que llamaremos *Resto n-simo de la serie*.

$$R_n(z) = \sum_{k\geq n+1} \frac{f^{k)}(z)}{k!}\left(z-z_0\right)^k = \sum_{k\geq n+1}\left(z-z_0\right)^k . \frac{f^{k)}(z)}{k!} = \sum_{k\geq n+1}\left(z-z_0\right)^k . \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(u)}{(u-z_0)^{k+1}}du =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(u)}{u-z_0}\sum_{k\geq n+1}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^k du \qquad [2]$$

y aplicando nuevamente la expresión que da la suma infinita de primer termino $\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^{n+1}$ y razón $\frac{z-z_0}{u-z_0}$, se tiene:

$$\sum_{k\geq n+1}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^k = \frac{\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^{n+1}}{1-\frac{z-z_0}{u-z_0}} = \frac{u-z_0}{u-z}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^{n+1}$$

por lo que, al sustituir en [2]:

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(u)}{u-z_0}\frac{u-z_0}{u-z}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^{n+1} du = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(u)}{u-z}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^{n+1} du$$

en definitiva:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(u)}{u-z}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^{n+1} du$$

5. Analiticidad de las funciones holomorfas:

Teorema:
Toda función holomorfa en un abierto conexo D es también analítica en D.
Demostración:
Es consecuencia del desarrollo y teorema de Taylor para una función holomorfa, pues lo que indica es que toda función holomorfa es desarrollable en serie de potencias convergente en el abierto conexo D.

Bibliografía

Ahlfors, L. V.; Análisis de variable compleja, McGraw-Hill, New York 1979.
Apostol, T.M.; Análisis Matemático, Editorial Reverté, Barcelona, 1986
Caratheodory; Theory of functions of a complex variable, Chelsea, 2001.
Cartan, H.; Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas, Madrid, Selecciones Científicas, 1968.
Chinea, C.S., El teorema de la integral de Cauchy-Goursat (http://casanchi.com/mat/cauchygoursat01.pdf)
Chinea, C.S., La fórmula de la Integral de Cauchy (http://casanchi.com/mat/formulacauchy01.pdf)
Copson, E. T.: An introduction to the theory of functions of a complex variable, Oxford University Press, 1970.
Goursat, E.; Cours d'analyse Mathematique, Gauthier Villars, Imprimeur Libraire, 1905, Paris.
Markushevich, A. I; Teoría de las funciones analíticas, Editorial Mir: Moscú 1970.
Philips, E. G.; Funciones de una variable compleja, Dossat, Madrid, 1963.