# Operadores de Hamilton. Los grupos simétricos

## 01. Definición de los operadores de Hamilton.

En el espacio vectorial $\Phi_R = \{\varphi / \varphi : E_n \to R\}$ de las funciones definidas del espacio euclidiano $E_n$ en $R$ podemos definir el operador

$$H(x) : \Phi_R \to \Phi_R$$

por la condición

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \ \forall x \in E_n$$

Es decir

$$\forall \varphi_r \in \Phi_R, \exists \varphi_s \in \Phi_R / H(x)\varphi_r(x) = \varphi_s(x), \ x \in E_n$$

Ejemplo:
Si consideramos el espacio bidimensional euclidiano real $(E_2, +, .; R)$ y la función $\varphi_r : E_2 \to R$ tal que $\forall x = (x_1, x_2) \in E_2, \varphi_r(x) = x_1^2 + x_2^3 \in R$, se tiene:

$$H(x)\varphi_r(x) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 \varphi_r(x)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \varphi_r(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_r(x)}{\partial x_2^2} = 2 + 6x_2 = \varphi_s(x)$$

## 02. Invariancia. El grupo simétrico de un operador de Hamilton.

Dado un operador $\tau$ en el espacio euclidiano $E_n$, $\tau : E_n \to E_n$, diremos que $H(x)$ es invariante respecto a $\tau$ sii

$$H(\tau x) = H(x), \ \forall x \in E_n$$

Si el operador $H(x)$ es invariante respecto a un grupo $T$ de operadores de $E_n$

$$T = \{\tau / \tau : E_n \to E_n\}$$

diremos que $T$ es grupo simétrico de $H(x)$.

Consideremos el operador $\tau : E_n \to E_n$ y sea $A$ su matriz asociada:

$$\forall x \in E_n, \exists x' \in E_n / \tau x = x', \text{ o bien, } \forall x \in E_n, \exists x' \in E_n / Ax = x'$$

podemos escribir, entonces:

$$\begin{pmatrix} x_1^{'} \\ \dots \\ \dots \\ x_n^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

o bien

$$x_j^{'} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k, \quad (j = 1,\dots,n)$$

y la derivada parcial respecto a $x_k$:

$$\frac{\partial x_j^{'}}{\partial x_k} = a_{jk}, \ (j,k = 1,\dots,n)$$

por tanto es

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j^{'}} \frac{\partial x_j^{'}}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j^{'}}, \ (k = 1,\dots,n)$$

de donde

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j^{'}} \frac{\partial x_j^{'}}{\partial x_k} \right)^2$$

donde el exponente 2 indica el orden de la diferenciación parcial.

En definitiva, si $x' = A.x$, y es $A = \left(a_{jk}\right)_n$ la matriz asociada al operador $\tau$:

En $x \in E_n \to H(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$

En $x' \in E_n \to H(x') = \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j^{'}} \right)^2$

Y la condición de invariancia respecto al operador $\tau$ exige que

$$H(x) = H(\tau x) = H(x') \to \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^{'}}$$

o sea, ha de ser

$$x' \in E_n \to H(x') = \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j^{'}} \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j^{'}} \right) \left( \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i^{'}} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{jk} a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_j^{'}} \frac{\partial}{\partial x_i^{'}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^{'2}}$$

con lo que observamos que para que se verifique la última igualdad ha de cumplirse

$$(a_{jk}).(a_{ik}) = \delta_{jk}.\delta_{ik}$$

Lo que nos indica que la matriz A ha de ser ortogonal:

$$(a_{jk})_n.(a_{kj})_n = I$$

Entonces, los operadores de Hamilton son invariantes respecto a aquellos operadores del espacio euclidiano real, $\tau : E_n \to E_n$, cuya matriz asociada sea ortogonal.

Estos operadores tienen, en definitiva, asociada una matriz ortogonal, que puede tener determinante igual a 1, o bien igual a -1.

Si el determinante es -1, el operador $\tau : E_n \to E_n$ define una simetría.
Si el determinante es 1, el operador $\tau : E_n \to E_n$ define una rotación.

Las matrices asociadas a rotaciones se denominan *unimodulares*, y el conjunto de todas estas matrices de orden n-simo se representa por RO(n).

Las matrices asociadas a simetrias de denominan polimodulares, y el conjunto de todas las de orden n-simo se representa por SO(n).

Veamos a continuación el caso de un espacio vectorial euclidiano de solo dos dimensiones, en el que comprobaremos además que los conjuntos de las matrices asociadas a simetrías y rotaciones, SO(2) y RO(2) respectivamente, tienen estructura de grupo multiplicativo, y son, por consiguiente, grupos simétricos de los operadores de Hamilton.

## 03. El caso bidimensional. Los grupos simétricos de las simetrías y las rotaciones.

### 03.1. La condición de invariancia en el caso bidimensional:

Si es $x' = A.x$, y es $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ la matriz asociada al operador $\tau$ se tiene:

En $x \in E_2 \to H(x) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$

En $x' \in E_2 \to H(x') = \sum_{k=1}^{2} \left( \sum_{j=1}^{2} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j^{'}} \right)^2 = \sum_{k=1}^{2} \left( a_{1k} \frac{\partial}{x_1^{'}} + a_{2k} \frac{\partial}{x_2^{'}} \right)^2 =$

$$= \sum_{k=1}^{2} \left( a_{1k}^2 \frac{\partial^2}{x_1^{'2}} + a_{2k}^2 \frac{\partial^2}{x_2^{'2}} + 2a_{1k}a_{2k} \frac{\partial}{x_1^{'}} \frac{\partial}{x_2^{'}} \right)$$

Y la condición de invariancia respecto al operador $\tau$ exige que

$$H(x) = H(\tau x) = H(x') \to \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k'^2}$$

o sea, ha de ser

$$x' \in E_n \to H(x') = \sum_{k=1}^{2} \left( a_{1k}^2 \frac{\partial^2}{x_1'^2} + a_{2k}^2 \frac{\partial^2}{x_2'^2} + 2a_{1k}a_{2k} \frac{\partial}{x_1'} \frac{\partial}{x_2'} \right) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2'^2}$$

o bien, desarrollando el sumatorio:

$$(a_{11}^2 + a_{12}^2)\frac{\partial^2}{x_1'^2} + (a_{21}^2 + a_{22}^2)\frac{\partial^2}{x_2'^2} + 2(a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})\frac{\partial}{x_1'}\frac{\partial}{x_2'} = \frac{\partial^2}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2'^2}$$

lo cual exige que se cumplan las relaciones siguientes entre los términos de la matriz asociada:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1,\ \ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1,\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$$

lo que implica su ortogonalidad, pues

$$A.A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**03.2. El grupo simétrico de las matrices unimodulares RO(2):**

En el caso de que el operador $\tau$ defina una rotación o giro de ángulo $\theta$, sabemos que las ecuaciones del giro son

$$x' = \tau x \to \begin{cases} x_1' = & x_1 \cos\theta + x_2 sen\theta \\ x_2' = & -x_1 sen\theta + x_2 \cos\theta \end{cases} \to \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

con lo que la matriz $A$ asociada al operador podemos representarla, en función del ángulo de la rotación $\theta$, como

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

que obviamente cumple la condición de ortogonalidad y de determinante igual a 1:

$$A.A^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1$$

Veamos que estas matrices constituyen un grupo multiplicativo:

a) La multiplicación es ley interna:

$$\forall A(\theta), A(\varepsilon) \in RO(2),\ A(\theta).A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varepsilon & sen\varepsilon \\ -sen\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varepsilon) & sen(\theta+\varepsilon) \\ -sen(\theta+\varepsilon) & \cos(\theta+\varepsilon) \end{pmatrix} = A(\theta+\varepsilon) \in RO(2)$$

b) La multiplicación es asociativa:

$$\forall A(\theta), A(\varepsilon), A(\mu) \in RO(2), \left[A(\theta).A(\varepsilon)\right].A(\mu) = A(\theta+\varepsilon).A(\mu) = A((\theta+\varepsilon)+\mu) =$$
$$= A(\theta+(\varepsilon+\mu)) = A(\theta).A(\varepsilon+\mu) = A(\theta).\left[A(\varepsilon).A(\mu)\right]$$

c) Existe una matriz unidad:

$$\forall A(\theta) \in RO(2), \exists A(0) \in RO(2) / A(\theta).A(0) = A(\theta+0) = A(0+\theta) = A(\theta)$$

d) Toda matriz tiene una matriz inversa dentro del conjunto:

$$\forall A(\theta) \in RO(2), \exists A(-\theta) \in RO(2) / A(\theta).A(-\theta) = A(\theta-\theta) = A(0)$$

En definitiva, $(RO(2),.)$ es grupo multiplicativo y, por consiguiente, grupo simétrico de los operadores de Hamilton en el espacio de las funciones sobre $(E_2,+,.;R)$.

### 03.3. El grupo simétrico de las matrices polimodulares SO(2):

Estas matrices son ortogonales y de determinante -1. Podemos representarlas a efectos operativos con la notación trigonométrica que hemos usado para las matrices unimodulares:

$$A = \begin{pmatrix} -\cos\theta & sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

cumpliendo las condiciones de ortogonalidad y de determinante -1:

$$A.A^t = \begin{pmatrix} -\cos\theta & sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\cos\theta & sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} -\cos\theta & sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = -1$$

Teorema: El producto de dos matrices del conjunto SO(2) es la matriz de una rotación.
Dem.:

$$\forall A(\theta), A(\varepsilon) \in SO(2),\ A(\theta).A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\cos\theta & sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\cos\varepsilon & sen\varepsilon \\ sen\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta-\varepsilon) & sen(\theta-\varepsilon) \\ -sen(\theta-\varepsilon) & \cos(\theta-\varepsilon) \end{pmatrix} \in RO(2)$$

Veamos que los pares de estas matrices constituyen un grupo multiplicativo, ya que el producto de dos matrices polimodulares es una matriz unimodular, es decir, el producto de dos matrices correspondientes a dos simetrías en el espacio bidimensional es una matriz correspondiente a una rotación en dicho espacio. Y como hemos visto en el apartado anterior, las rotaciones forman grupo multiplicativo.