Axiomática de conjuntos
La gran unión y la gran intersección. Axiomas de la gran unión y del conjunto vacío

Introducción:
Dentro del sistema axiomático NBGQ (Neumann-Bernays-Gödel-Quine) se estudian como signos fundamentales:

a) Variables: las letra del alfabeto latino.
b) Relatores binarios: "=" ("es igual que"), "$\in$" ("es elemento de"), "$\subseteq$" ("…está contenido en")
c) Cinco conectores: "$\approx$" ("no"), "$\wedge$" ("y"), "$\vee$" ("o"), "$\rightarrow$" ("si…entonces"), "$\leftrightarrow$" ("sii")
d) Cuantificadores: "$\forall$" ("para todo"), "$\exists$" ("existe un … tal que"), "$\dot{\exists}$" ("existe un único… tal que")
e) Un descriptor: "i" ("el … tal que").

Dentro del sistema son equivalentes expresiones como: $x \neq y$ y $\approx (x = y)$, que indicaríamos por $x \neq y \equiv \approx (x = y)$, o bien: $x \notin y$ y $\approx (x \in y)$, que indicaríamos asimismo por $x \notin y \equiv \approx (x \in y)$.

Los cuantificadores y el descriptor siempre van seguidos de una variable, de la que decimos queda *ligada* por ellos en la fórmula que sigue a continuación. Así, diremos que en la fórmula

$$(\forall x)(x \in y \rightarrow y \in x \vee x \in y)$$

la variable x está ligada, mientras que la variable y está libre.

Mediante $p(x)$ indicaremos una fórmula cualquiera, en la que la variable x está libre.

En este sistema, las variables se referirán a **clases**. Entre las clases podemos distinguir dos tipos: aquellas que son a su vez elementos de otras clases, y aquellas que no son elementos de clase alguna. A las primeras las llamaremos **conjuntos**, y a las segundas **clases últimas**. Quedan, finalmente, los **objetos concretos**, que son elementos de otras clases, pero que ellos mismos carecen de elementos.

$$\left[\textit{objetos concretos}\right]\left[\textit{conjuntos}\right]\left[\textit{clases últimas}\right]$$

siendo:

elementos: $\left[\textit{objetos concretos}\right]\left[\textit{conjuntos}\right]$

clases: $\left[\text{conjuntos}\right]\left[\text{clases últimas}\right]$

Tenemos, en definitiva, tres tipos de entidades: objetos concretos, conjuntos y clases últimas. Simbolizaremos por C el predicado monádico que se lee "… es un conjunto". En concreto, la definición de conjunto es la de una clase que pertenece a otra clase, esto es:

$$Cx \leftrightarrow \left(\exists y\right)\left(x \in y\right)$$

Usaremos en el presente estudio de los axiomas de la gran unión y del conjunto vacío, el resultado obtenido desde los axiomas de extensionalidad y formación de clases siguiente:

$$\left(\overset{*}{\exists} y\right)\left(\forall x\right)\left(x \in y \leftrightarrow Cx \wedge \varphi(x)\right), \text{ donde } y \text{ no es libre en } \varphi(x).$$

(que denominaremos en el texto, teorema de referencia, y puede verse su justificación en "Los axiomas de extensionalidad y formación de clases", http://casanchi.org/mat/eformacionclases01.htm)

La gran unión y la gran intersección

-La gran unión:
Dada una clase y, la gran unión de y puede definirse como la clase cuyos elementos x son a su vez elementos de al menos uno de los elementos z de la clase y.

$$\bigcup y = \left\{x \,/\, (\exists z)(x \in z \wedge z \in y)\right\}$$

Ejemplo: si la clase y tuviera sólo dos elementos, z_1 y z_2, la gran unión se podría establecer como

$$\bigcup y \equiv z_1 \cup z_2 = \left\{x \,/\, (x \in z_1 \vee x \in z_2) \wedge (z_1, z_2 \in y)\right\}$$

la unicidad de la gran unión es inmediata, pues bastará en el teorema de referencia hacer $\varphi(x) = (\exists z)(x \in z \wedge z \in y)$. Es decir:

$$\left(\overset{*}{\exists} y\right)\left(\forall x\right)\left(x \in y \leftrightarrow Cx \wedge \varphi(x)\right), \ \varphi(x) = (\exists z)(x \in z \wedge z \in y)$$

-La gran intersección:
Dada una clase y, la gran intersección se define, en cambio, como la clase cuyos elementos x son también elementos de todos y cada uno de los elementos z de la clase y.

$$\bigcap y = \left\{ x / (\forall z)(z \in y \to x \in z) \right\}$$

Ejemplo: si la clase y tuviera sólo dos elementos, z_1 y z_2, la gran intersección se podría establecer como

$$\bigcap y \equiv z_1 \cap z_2 = \left\{ x / (x \in z_1 \wedge x \in z_2) \wedge (z_1, z_2 \in y) \right\}$$

la unicidad de la gran intersección es inmediata, pues bastará en el teorema de referencia hacer $\varphi(x) = (\forall z)(z \in y \to x \in z)$. Es decir:

$$\left(\overset{*}{\exists} y \right) \left(\forall x \right) \left(x \in y \leftrightarrow Cx \wedge \varphi(x) \right), \ \varphi(x) = (\forall z)(z \in y \to x \in z)$$

Son propiedades inmediatas:

$$\forall (x, y) \left(x \in y \to x \in \bigcup y \right)$$

$$\bigcup \phi = \phi$$

$$\bigcup \mu = \mu \ \ (\mu \ clase \ univ)$$

$$\bigcap \phi = \mu \ \ (\mu \ clase \ univ)$$

Axioma de la gran unión:

Para que la unión de conjuntos sea también un conjunto hemos de postular un axioma que declare como conjunto a la gran unión:

Axioma de la gran unión:

$$\left(\forall x \right) \left(Cx \to C \bigcup x \right)$$

De este modo resulta inmediato, que para dos conjuntos cualesquiera se tiene:

$$\left(\forall x, y \right) \left(Cx \wedge Cy \to C(x \cup y) \right)$$

Axioma del conjunto vacío:
Para establecer que la gran intersección de la clase universal es la clase vacía debemos postular como sexto axioma que la clase vacía, que existe y es única, es un conjunto:

Axioma del conjunto vacío:

$$C\phi$$

De lo que se deduce de inmediato que $\bigcap \mu = \phi \ \ (\mu \ clase \ univ)$

La idea del elemento siguiente:
Se define el elemento siguiente s(x) de una clase cualquiera x, como la unión de x con la clase unitaria de elemento x:

$$s(x) = x \cup \left\{ x \right\}$$

De esta definición de elemento siguiente de otro se deducen de forma inmediata algunas propiedades básicas:

$$1. \left(\forall x\right)\left(Cx \rightarrow C(s(x))\right)$$
$$2. \left(\forall x, y\right)\left(x \in y \rightarrow x \in s(y)\right)$$
$$3. \left(\forall x, y\right)\left(Cy \wedge x \in s(y) \rightarrow x \in y \vee x = y\right)$$
$$4. \left(\forall x\right)\left(Cx \rightarrow x \in s(x)\right)$$

Bibliografía:
Bernays, P.: Axiomatic set theory, Amsterdam, 1958
Halmos, P.R.: Naive set theory, New York, 1960
Mosterin, J.: Teoría axiomática de conjuntos, Barcelona, 1980