EL GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR EN COORDENADAS RECTANGULARES, ESFÉRICAS Y CILÍNDRICAS:

De la definición de gradiente:

$$df = gr\vec{ad}(f).d\vec{r}$$

y podemos escribir en forma diferencial para coordenadas generales q_1, q_2, q_3:

$$\boxed{gr\vec{ad}(f) = \left(\frac{1}{dr_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}.dq_1, \frac{1}{dr_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}.dq_2, \frac{1}{dr_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}.dq_3 \right)}$$

Expresión en coordenadas rectangulares o cartesianas:

En estas coordenadas es: $dr_1 = dx,\ dr_2 = dy,\ dr_3 = dz$

Por tanto:

$$gr\vec{ad}(f) = \frac{1}{dx}\frac{\partial f}{\partial x}dx.\vec{i} + \frac{1}{dy}\frac{\partial f}{\partial y}.dy\vec{j} + \frac{1}{dz}\frac{\partial f}{\partial z}.dz\vec{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

En definitiva:

$$\boxed{gr\vec{ad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}$$

Expresión en coordenadas esféricas:

En estas coordenadas es: $dr_1 = d\rho,\ dr_2 = \rho.d\theta,\ dr_3 = \rho.sen\theta.d\phi$

Por tanto:

$$gr\vec{ad}(f) = \frac{1}{d\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}d\rho.\vec{\rho}^o + \frac{1}{\rho.d\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}.d\theta.\vec{\theta}^o + \frac{1}{\rho.sen\theta.d\phi}\frac{\partial f}{\partial \iota}.d\phi\vec{\phi}^o$$

O sea:

$$\boxed{gr\vec{ad}(f) = \frac{\partial f}{\partial \rho}.\vec{\rho}^o + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}.\vec{\theta}^o + \frac{1}{\rho.sen\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}.\vec{\phi}^o}$$

Expresión en coordenadas cilíndricas:

En estas coordenadas es $dr_1 = d\rho,\ dr_2 = \rho.d\phi,\ \ dr_3 = dh$

Por tanto:

$$gra\vec{d}(f) = \frac{1}{d\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho}d\rho.\vec{\rho}^o + \frac{1}{\rho.d\phi}\frac{\partial f}{\partial \phi}.d\phi.\vec{\phi}^{oo} + \frac{1}{dh}\frac{\partial f}{\partial h}.dh.\vec{h}^o$$

O sea:

$$\boxed{gra\vec{d}(f) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{\rho}^o + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}.\vec{\phi}^{oo} + \frac{\partial f}{\partial h}.\vec{h}^o}$$

En resumen:

En cartesianas: $gra\vec{d}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$

En esféricas: $gra\vec{d}(f) = \frac{\partial f}{\partial \rho}.\vec{\rho}^o + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}.\vec{\theta}^o + \frac{1}{\rho.sen\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}.\vec{\phi}^o$

En cilíndricas: $gra\vec{d}(f) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{\rho}^o + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}.\vec{\phi}^{oo} + \frac{\partial f}{\partial h}.\vec{h}^o$