El funtor Producto Tensorial

0. Introducción. La idea de categoría y funtor

La teoría de categorías y funtores se construye de forma elemental desde el concepto de categoría, entendida como una clase cuyos objetos cumplen la condición de que cualquier par ordenado de los mismos tiene asociado un conjunto que denominamos *conjunto de los morfismos* correspondientes al par.

Así, si consideramos la categoría Φ, de objetos a,b,c,..., el conjunto asociado, por ejemplo, al par (a,b), diremos que se trata del conjunto de morfismos de dominio a y codominio b:

$(a,b)_\Phi$: conjunto de los morfismos de dominio a y codominio b dentro de la categoría Φ.

Se define también lo que se entiende como objeto inicial y objeto final de una categoría del modo siguiente:

- Un objeto α se dice que es *objeto inicial* de la categoría Φ, si el conjunto $(\alpha,b)_\Phi$ tiene un único elemento, cualquiera que sea el objeto b de la categoría.
- Un objeto β se dice que es *objeto final* de la categoría Φ, si el conjunto $(a,\beta)_\Phi$ tiene un único elemento, cualquiera que sea el objeto a de la categoría.

Si definimos una función tal que a los objetos de una determinada categoría Φ le correspondan los objetos de otra categoría Γ hemos de especificar también que a los morfismos asociados a cada par de la primera le correspondan los morfismos asociados al correspondiente par de la segunda. Se trata, por tanto, de definir dos funciones, una que establezca la correspondencia entre los objetos (función-objeto) y otra que establezca la correspondencia entre los morfismos asociados a cada par ordenado de la primera y los morfismos asociados al correspondiente par ordenado de la segunda (función-morfismo). Con la función-morfismo pueden darse dos situaciones, a saber, que el morfismo imagen de un morfismo dado tenga por dominio la imagen del dominio del morfismo original y por codominio la imagen del codominio del morfismo original (función-morfismo covariante), o bien, que ocurra lo contrario, es decir, que el morfismo imagen de un morfismo dado tenga por dominio la imagen del codominio del morfismo original y por codominio la imagen del dominio del morfismo original (función-morfismo contravariante).

Función objeto:

$$f_o : \Phi \to \Gamma, \ \forall x \in \Phi, f_o(x) \in \Gamma \ \text{(si } x = y \to f_o(x) = f_o(y)\text{)}$$

Función morfismo-covariante:

$$f_{m1} : (a,b)_\Phi \to \left(f_o(a), f_o(b)\right)_\Gamma, \quad \forall f \in (a,b)_\Phi, f_{m1}(f) \in (f_o(a), f_o(b))_\Gamma$$

Función morfismo-contravariante:

$$f_{m2} : (a,b)_\Phi \to \left(f_o(b), f_o(a)\right)_\Gamma, \quad \forall f \in (a,b)_\Phi, f_{m2}(f) \in (f_o(b), f_o(a))_\Gamma$$

Un funtor entre la categoría Φ y la categoría Γ es el par constituido por una función-objeto, f_o, y una función-morfismo, f_m:

Funtor covariante: (f_o, f_{m1})

Funtor contravariante: (f_o, f_{m2})

Un funtor es una función entre categorías que está, pues, realmente constituida por dos funciones, una función-objeto y una función-morfismo. Un funtor es covariante o contravariante según lo sea su correspondiente función-morfismo. Ha de cumplir las condiciones de definición (axiomas) siguientes:
Sobre la identidad: $(\forall a)(a \in \psi, f_m I_a = I_{f_0 a})$
Sobre la composición de morfismos:
Covariante: $(\forall f, g)(f \in (b,c)_\psi, g \in (a,b)_\psi, f_{m1}(f \circ g) = f_{m1}(f) \circ f_{m1}(g))$
Contravariante: $(\forall f, g)(f \in (b,c)_\psi, g \in (a,b)_\psi, f_{m2}(f \circ g) = f_{m2}(g) \circ f_{m2}(f))$

Podemos imaginar de manera obvia diversas categorías:
- La categoría de los grupos: GRUP, cuyos objetos son los grupos y cuyos morfismos asociados a cada par ordenado de grupos son los homomorfismos de grupo.
- La categoría de los anillos: ANILL, cuyos objetos son los anillos y cuyos morfismos asociados a cada par ordenado de anillos son los homomorfismos de anillos.

Vemos a continuación que podemos definir la idea de producto tensorial de espacios vectoriales como objeto inicial de una cierta categoría, estableciéndose de forma natural el concepto de funtor.

1. Producto tensorial

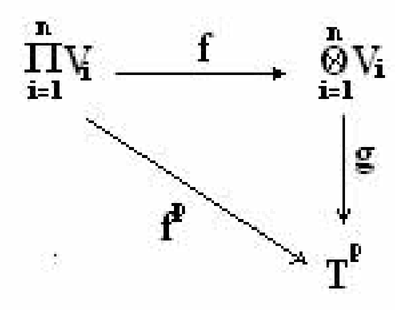
Sea K un cuerpo conmutativo. Un K-espacio vectorial es un espacio vectorial cuyo cuerpo de definición es K.

El producto tensorial de un conjunto de n K-espacios vectoriales, $V_1,\ldots,V_n$, es un par constituido por una aplicación multilineal (n-lineal), f, desde el conjunto producto cartesiano de dichos K-espacios en otro K-espacio vectorial T, tal que para cualquier otra aplicación n-lineal f' de dicho conjunto producto cartesiano en cualquier otro K-espacio vectorial T' existe exista un único homomorfismo de K-espacios vectoriales de T a T' tal que $g \circ f = f'$. El producto tensorial se define, pues, como el par (f, T).

Si representamos al espacio producto tensorial T por

$$T = \bigotimes_{i=1}^{n} V_i = V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$$

se tiene la conmutatividad del siguiente diagrama:



Dados n K-espacios vectoriales $V_1,...,V_n$, dentro de la teoría de categorías podemos considerar la categoría Φ cuyos objetos son los pares $(f,T),(f^p,T^p),...$, donde los T, T^p,... son K-espacios vectoriales, y las f, f^p,... son aplicaciones n-lineales desde el conjunto producto cartesiano de los n K-espacios vectoriales dados, y cuyos morfismos asociados a cada par $\left((f,T),(f^p,T^p)\right)$ son los homomorfismos $g:T\to T^p$, de forma que se verifique $g\circ f=f^p$, es obvio que el producto tensorial $T=\bigotimes_{i=1}^{n}V_i=V_1\otimes...\otimes V_n$ es un objeto inicial de dicha categoría, pues es el único objeto desde el que existe un único morfismo hacia cualquier otro objeto de la misma categoría, por definición de objeto inicial.

2. El funtor producto tensorial

Consideremos las dos categorías siguientes:

- Categoría Γ: Es la categoría cuyos objetos son las n-plas de K-espacios vectoriales

$$\left(V_1,...,V_n\right),\left(V_1^{'},...,V_n^{'}\right),...$$

y cuyos morfismos asociados a cada par $\left(\left(V_1,...,V_n\right),\left(V_1^{'},...,V_n^{'}\right)\right)$ son las aplicaciones producto

$$\prod_{i=1}^{n}f_i:\prod_{i=1}^{n}V_i\to\prod_{i=1}^{n}V_i'$$

siendo las $f_i:V_i\to V_i^{'}, i=1,...,n$, aplicaciones lineales entre espacios vectoriales.

- Categoría Φ: La categoría cuyos objetos son los productos tensoriales de los k-espacios de cada n-pla de la categoría Γ:

$$(f,\bigotimes_{i=1}^{n}V_i),\ (f',\bigotimes_{i=1}^{n}V_i^{'}),\ (f'',\bigotimes_{i=1}^{n}V_i^{''}),...$$

siendo los morfismos asociados a cada par de objetos $\left((f,\bigotimes_{i=1}^{n}V_i),\ (f',\bigotimes_{i=1}^{n}V_i^{'})\right)$ los homomorfismos $g:\bigotimes_{i=1}^{n}V_i\to\bigotimes_{i=1}^{n}V_i^{'}, i=1,...,n$ tales que $g\circ f=f'\circ\prod_{i=1}^{n}f_i$, tal como se muestra en el diagrama.

Definamos ahora un funtor desde la categoría Γ hacia la categoría Φ:

$$\psi:\mathrm{T}\to\Phi$$

Función-objeto: A cada objeto de la categoría Γ, es decir, a cada n-pla de k-espacios vectoriales $\left(V_1,...,V_n\right)$ le hace corresponder su producto tensorial, objeto de la categoría Φ:

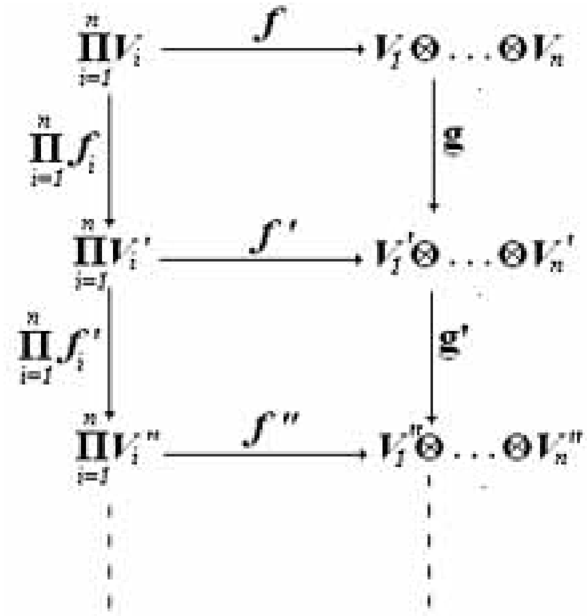
$$\forall\left(V_1,...,V_n\right)\in\Gamma,\psi_0\left(V_1,...,V_n\right)=\left(f,\bigotimes_{i=1}^{n}V_i\right)\in\Phi$$

Función-morfismo: Puesto que $\prod_{i=1}^{n} f_i : \prod_{i=1}^{n} V_i \to \prod_{i=1}^{n} V_i'$, se tiene (ver diagrama) que

$$f' \circ \prod_{i=1}^{n} f_i : \prod_{i=1}^{n} V_i \to V_1' \otimes \ldots \otimes V_n'$$

y por ser $(f, V_1 \otimes \ldots \otimes V_n)$ producto tensorial de los k-espacios $V_1,\ldots,V_n$ existe un único homomorfismo $g : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to V_1' \otimes \ldots \otimes V_n'$ tal que $g \circ f = f' \circ \prod_{i=1}^{n} f_i$, por tanto, podemos definir la función morfismo ψ_m por la condición:

$$\forall \prod_{i=1}^{n} f_i \in \left((V_1,\ldots,V_n),(V_1',\ldots,V_n')\right)_\Gamma, \; \psi_m(\prod_{i=1}^{n} f_i) = g$$



Vemos que, efectivamente, se trata de un funtor ya que se verifican las dos condiciones de la definición de funtor, o sea, la condición sobre el morfismo identidad y sobre la composición de morfismos:

$$\Psi_m\left(\prod_{i=1}^{n} f_i' \circ \prod_{i=1}^{n} f_i\right) = g' \circ g = \Psi_m\left(\prod_{i=1}^{n} f_i'\right) \circ \Psi_m\left(\prod_{i=1}^{n} f\right)$$

$$\Psi_m\left(\prod_{i=1}^{n} Id_i\right) = Id$$

Tal funtor se denomina *funtor producto tensorial*, siendo, en definitiva las funciones constituyentes:

- Función-objeto:

$$\forall (V_1,\ldots,V_n) \in \Gamma, \; \psi_0(V_1,\ldots,V_n) = \left(f, \bigotimes_{i=1}^{n} V_i\right) \in \Phi$$

- Función-morfismo:

$$\forall \prod_{i=1}^{n} f_i \in \left((V_1,\ldots,V_n),(V_1',\ldots,V_n')\right)_\Gamma, \; \psi_m(\prod_{i=1}^{n} f_i) = g \in \left((V_1 \otimes \ldots \otimes V_n),(V'_1 \otimes \ldots \otimes V_n')\right)_\Phi$$

Bibliografía:

Bobillo Ares, Nilo C., Dehesa Martinez, C.; Introducción al cálculo tensorial, Universidad de Oviedo, 2005.
Mc Lane, S., Birkhoff, J. H.; Algèbre, Gauthiers-Villars, 1973.
Ryand, Raymond A.; Introduction to Tensor Products of Banach Spaces, Springer, 2002.