El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces pitagóricas

María Cecilia Tomasini *

Introducción

La estructura matemática de la escala musical asombró a los pensadores de la Escuela Pitagórica (siglos VI- V a.C.) quienes recurrieron a la música para ilustrar los principios de su filosofía. Los biógrafos de Pitágoras[1] nos relatan que el sabio griego se interesó en los fundamentos matemáticos de esta ciencia cuando escuchó casualmente que los golpes de diferentes martillos sobre el yunque de un herrero emitían sonidos concordantes[2]. También nos cuentan que el maestro habría adquirido sus conocimientos musicales durante sus viajes por Egipto y Babilonia[3].

Los fundamentos matemáticos de la música, estudiados y enunciados por los pitagóricos, constituyeron la base de todos los manuales de música que se elaboraron posteriormente. Entre estos manuales, uno de los más importantes es el *Tratado sobre la música* escrito por Boecio en el siglo VI d.C. Este autor latino desarrolló y extendió los principios del Pitagorismo, basándose en los principios enunciados por los pensadores pitagóricos. Esta tratado fue la base de toda la teoría musical elaborada durante el Medioevo en el Occidente Cristiano. Boecio consideraba que la música era una de las ciencias que permitía al hombre alcanzar la sabiduría. Por ese motivo denominó *quadrivium* o ***cuádruple vía hacia la sabiduría*** al conjunto de las cuatro ciencias matemáticas por excelencia: la música, la aritmética, la geometría y la astronomía.

A lo largo de los siglos la estructura matemática de la música siguió despertando el interés de los filósofos, de los científicos y de los musicólogos. Según veremos más adelante, aún las modificaciones implementadas por J. S. Bach en el siglo XVIII en su obra *El clave bien temperado* son factibles de una interpretación matemática.

En este artículo analizaremos los fundamentos matemáticos de la escala tonal vigente en Occidente, vinculándolos con las fuentes de la Escuela Pitagórica; y describiremos brevemente algunas de las experiencias diseñadas por el legendario Pitágoras con el fin de entender los principios subyacentes a la música.

---

* Docente de la Facultad de Ciencias Sociales y de la Facultad de Ingeniería - UP.

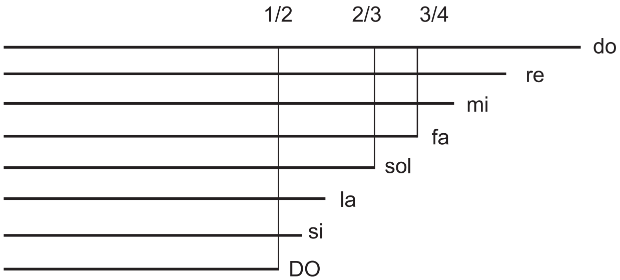
1. Los pitagóricos atribuyeron todos los descubrimientos de la Escuela Pitagórica a la figura de su legendario maestro, Pitágoras. Sin embargo, a pesar de que es indudable la existencia de la Escuela y de los Pitagóricos, no es posible corroborar la existencia histórica de su maestro. A partir del siglo II d.C. se escribieron diversas biografías de Pitágoras. Los biógrafos pitagóricos –Jámblico, Porfirio, Diógenes Laercio y Focio- nunca pusieron en duda la existencia real del maestro. Para más detalles sobre el tema, ver W. K. C. Guthrie, *Los filósofos presocráticos*.
2. Jámblico, *Vida Pitagórica*, 26. E. K. S. Guthrie, *The Pythagorean Sourcebook and Library*, pág. 86.
3. Porfirio, *Vida Pitagórica*, 6. En *Ibid.*, pág. 124.

La octava musical

Es un hecho por todos conocido que al pulsar una cuerda tensada se obtiene un sonido. El sonido obtenido dependerá de la longitud de la cuerda. Cuando la cuerda pulsada se divide en porciones de cierta longitud bien determinada, entonces surgen ocho sonidos que se conocen como las ocho notas de la escala musical (Diagrama 1).

La propiedad que relaciona la longitud de un objeto vibrante con una nota musical determinada se verifica para cualquier clase de objeto. Así, por ejemplo, dividiendo en diferentes partes la longitud de un tubo por el cual circula aire se generan también las diversas notas musicales.

Diagrama 1



La sucesión de las ocho notas de la escala musical:

do re mi fa sol la si DO

se denomina ***octava***. Cada una de estas notas tiene sus correspondientes octavas superior e inferior. Por ejemplo, la nota ***DO*** es la ***octava superior*** de la nota ***do***. La nota tomada como base de la escala- en este caso la nota ***do***- se denomina ***tónica***.

El principio que relaciona la ***longitud de una cuerda vibrante*** con las ***notas de la escala musical*** era muy bien conocido por los pensadores de la Escuela Pitagórica, quienes habrían empleado un ***monocordio*** –esto es, una cuerda tensada sobre la cual se desliza un puente móvil- para realizar sus experiencias. En la actualidad las notas musicales no se definen a partir de la longitud del objeto vibrante, sino a partir de la ***frecuencia de vibración de la onda sonora*** emitida por dicho objeto. La frecuencia y la longitud de una onda sonora se encuentran vinculadas por medio de la ecuación

$$f = \frac{v}{l} \qquad (1)$$

donde ***f*** es la frecuencia expresada en *hertz*; ***v*** es la velocidad del sonido en *metros/seg*; y ***l*** es la longitud de la onda en *metros*. Las bajas frecuencias corresponden a tonos graves, mientras que las altas frecuencias caracterizan a los tonos agudos.

Las frecuencias que identifican a las ocho notas de la escala son, aproximadamente, las siguientes[4]:

Tabla 1

Nota musical	Frecuencia en hertz
do	261
re	293
mi	328,8
fa	348,3
sol	391,1
la	438,9
si	492,7
DO	522

Relaciones de proporción entre las notas de la octava

La construcción de la escala musical descansa sobre ciertas ***relaciones de proporción*** existentes entre sus notas. Los filósofos pitagóricos fueron los primeros en enunciar este principio en Occidente. Efectivamente, Arquitas de Tarento (siglo V a.C.) expresaba que *"…en la música existen tres medias: la primera es la media aritmética; la segunda es la geométrica; la tercera es la media subcontraria, llamada armónica…"*[5].

La primera de las proporciones mencionadas por Arquitas –la ***media aritmética***- se escribe matemáticamente como[6]

$$b = \frac{a + c}{2} \qquad (2)$$

4. Las frecuencias del cuadro corresponden a las notas centrales del piano. Datos extraídos de J. Jeans, *Matemáticas de la música*.

5. *Fragmentos*, 16. En K. S. Guthrie, *Op. cit.*, pág. 185.

6. Las expresiones algebraicas correspondientes a los tres tipos de medias citadas por Arquitas no eran conocidas por los antiguos griegos, puesto que el lenguaje algebraico fue introducido en Europa por los árabes durante el transcurso de la Edad Media. Ver A. C. Crombie, *Historia de la ciencia. De San Agustín a Galileo*.

Reemplazando en ***a*** el valor de la frecuencia de la nota ***do*** y en ***c*** el que corresponde a la nota ***DO*** –es decir, reemplazando ***a*** y ***c*** por los extremos de la octava- obtenemos

$$b = \frac{261+522}{2} \cong 391{,}5$$

que es aproximadamente el valor de la frecuencia de la nota ***sol***. Es decir que la ***media aritmética*** determina la relación existente entre las notas ***do*** y ***sol***; o entre la nota ***do*** y su ***quinta***. Esta relación se denomina ***intervalo de quinta***. El cociente entre las frecuencias de la nota ***sol*** y la nota ***do*** da por resultado el valor del intervalo de quinta:

$$\frac{391{,}1}{261} \cong \frac{3}{2} \qquad \textbf{\textit{intervalo de quinta}} \qquad (3)$$

La tercera de las proporciones citadas por Arquitas –la ***media armónica***- tiene la forma

$$b = \frac{2ac}{a+c} \qquad (4)$$

Reemplazando respectivamente ***a*** y ***c*** por las frecuencias de las notas ***do*** y ***DO*** obtenemos

$$b = \frac{2 \times 261 \times 522}{261+522} = 348$$

que corresponde aproximadamente a la frecuencia de la nota ***fa***. En consecuencia la proporción armónica define la relación entre las notas ***do*** y ***fa***, o la relación entre la nota ***do*** y su ***cuarta***. A esta relación se la denomina ***intervalo de cuarta*** o ***cuarta perfecta***, y su valor puede obtenerse a partir del cociente entre las frecuencias de ambas notas:

$$\frac{348{,}3}{261} \cong \frac{4}{3} \qquad \textbf{\textit{intervalo de cuarta}} \qquad (5)$$

Por último la ***media geométrica*** se expresa algebráicamente como

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \qquad (6)$$

y caracteriza la relación entre octavas sucesivas. Por ejemplo, si reemplazamos ***a*** por la frecuencia de la nota ***do*** y ***b*** por la frecuencia de su octava -la nota ***DO-*** entonces podemos obtener la frecuencia en *hertz* que caracteriza a la siguiente octava:

$$\frac{261}{522} = \frac{522}{c} \Rightarrow c = \frac{(522)^2}{261} \cong 1044$$

Este valor corresponde a la octava de la nota ***DO***, que llamaremos ***DO´***. La relación entre octavas –o intervalo de octava- tiene el valor

$$\frac{522}{261} \cong \frac{2}{1} \qquad \textbf{\textit{intervalo de octava}} \qquad (7)$$

El cociente entre la media aritmética y la media armónica

$$\frac{\left(\dfrac{a+c}{2}\right)}{\left(\dfrac{2ac}{a+c}\right)} \qquad (8)$$

determina el valor de la relación entre ***tonos***. Efectivamente, si reemplazamos ***a*** y ***c*** por las frecuencias de la nota ***do*** y de su octava obtenemos

$$\frac{\left(\dfrac{261+522}{2}\right)}{\left(\dfrac{2\times 261\times 522}{261+522}\right)} \cong \frac{9}{8} \qquad \textbf{\textit{intervalo de tono}} \qquad (9)$$

De esta manera, si a la frecuencia correspondiente a la nota ***fa*** la multiplicamos por 9/8 obtenemos

$$348{,}3\times\frac{9}{8} \cong 391{,}8$$

que es, aproximadamente, la frecuencia que corresponde a la nota ***sol***, distante en ***un tono*** de la nota ***fa***.

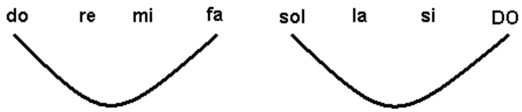
La octava musical satisface también la siguiente relación proporcional:

$$\frac{a}{\left(\dfrac{2ac}{a+c}\right)} = \frac{\left(\dfrac{a+c}{2}\right)}{c} \qquad (10)$$

Dado que la proporción armónica *(2ac/a+c)* define la relación de una nota con su cuarta perfecta, y la proporción aritmética *(a+c/2)* determina la relación de una nota con su quinta, la expresión anterior puede enunciarse de la siguiente manera:

*"La relación entre el extremo menor de la octava y la cuarta nota es **idéntica** a la relación entre la quinta nota y el extremo mayor"*.

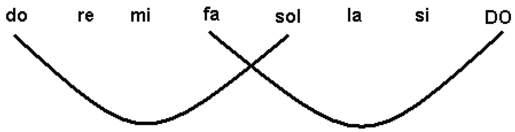
Gráficamente esta relación puede representarse en el siguiente diagrama:



Por otra parte, si escribimos la ecuación (10) como

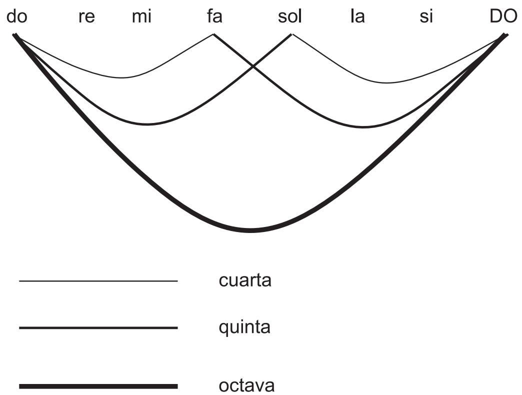
$$\frac{c}{\left(\dfrac{2ac}{a+c}\right)} = \frac{\left(\dfrac{a+c}{2}\right)}{a} \qquad (11)$$

podemos decir que *"la relación entre el extremo mayor de la octava y la cuarta nota es **idéntica** a la relación entre la quinta nota y el extremo menor de la octava"*. Esta relación puede representarse en un diagrama análogo al anterior:



Los dos últimos diagramas pueden dibujarse conjuntamente de la siguiente manera:

Diagrama 2



Esta diagrama –o, de manera alternativa, las expresiones algebraicas (10) y (11)- son formas equivalentes de mostrar la ***simetría*** que presenta la escala musical en su estructura matemática. El diagrama 2 permite visualizar, además, la relación existente entre el intervalo de cuarta, el de quinta y el de octava. Esta relación era perfectamente conocida en la Antigua Grecia, y fue enunciada por el pitagórico Filolao (siglo V a.C.) de la siguiente manera: *"la extensión de la octava es una cuarta más una quinta"*[7].

Las relaciones matemáticas hasta aquí expuestas se encuentran sintetizadas en la siguiente tabla:

Tabla 2

Nombre del intervalo	Valor del intervalo	Tipo de proporción	Expresión algebraica
Cuarta perfecta	$\frac{4}{3}$	*armónica*	$b = \frac{2ac}{a+c}$
Quinta	$\frac{3}{2}$	*aritmética*	$b = \frac{a+c}{2}$
Octava	$\frac{2}{1}$	*geométrica*	$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$
Tono	$\frac{9}{8}$	$\frac{\textit{aritmética}}{\textit{armónica}}$	$b = \frac{\frac{a+c}{2}}{\frac{2ac}{a+c}}$

La serie 6, 8, 9, 12

Las propiedades de la escala musical eran ilustradas en la Antigüedad por medio de los números

6, 8, 9, 12

En efecto, Jámblico –biógrafo de Pitágoras que vivió entre los siglos III y IV d.C.- describe los descubrimientos musicales de la Escuela Pitagórica haciendo uso de esta serie numérica[8]. También Calcidio –filósofo neoplatónico del siglo IV d.C.- explica detalladamente las relaciones entre cuartas, quintas y octavas recurriendo a esta misma serie[9]. Finalmente Boecio, en su *Tratado sobre la aritmética*, refiere que la relación

7. *Fragmentos*, DK6. En K. S. Guthrie, *Op. cit.*, pág. 168.
8. *Vida Pitagórica*., 26. En *Ibid.*, pág. 86 y ss.
9. *In Timeo*, cap. XL y ss.

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12} \qquad (12)$$

representa la armonía fundamental del mundo[10] .

La relación numérica (12) equivale a la relación algebraica (10). Efectivamente, al simplificar en (12) obtenemos

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

que es el valor del ***intervalo de cuarta perfecta***. En otras palabras, este valor denota la relación existente entre el extremo menor de la octava y la cuarta nota; o bien, la relación existente entre la quinta nota y el extremo mayor de la octava.

Por otra parte, efectuando los cocientes entre los distintos elementos de la serie es posible obtener las relaciones de proporción que caracterizan a los diferentes intervalos musicales. Por ejemplo

$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ o ***intervalo de quinta***

$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ o ***intervalo de octava***

$\frac{8}{9}$ o ***intervalo de tono***

Por lo tanto, la serie ***6, 8, 9, 12*** permite ejemplificar perfectamente todas las relaciones de proporción que vinculan a las notas de la escala musical.

Tonos y semitonos

Las ocho notas de la octava se encuentran separadas entre sí por intervalos de ***tono*** o de ***semitono***. Según se ha visto, el valor del intervalo de tono es 9/8. Sin embargo, y a pesar de su nombre, el intervalo de semitono no equivale, desde el punto de vista matemático, a la mitad de un intervalo de tono, puesto que está definido por la fracción

$\frac{256}{243}$ ***semitono*** (12)

Los filósofos de la Antigua Grecia conocían muy bien los intervalos musicales más pequeños que el tono. Efectivamente, según relata Boecio, Filolao habría definido matemáticamente varios de estos intervalos[11] . Del mismo modo, en el *Timeo* de Platón

10. *De aritm.*, 1164- 1165.

11. *De inst. mus.*, 3.5. En K. S. Guthrie, *Op. cit.*, pág. 169.

(siglo IV a.C.) se encuentran enumerados, además de los intervalos de cuarta y de quinta, los que corresponden al tono y al semitono[12] .

La ***octava*** está compuesta por ***cinco tonos y dos semitonos***, distribuidos de la siguiente manera:

do* — *re* — *mi* ∩ *fa* — *sol* — *la* — *si* ∩ *do

donde — denota un ***tono*** (**T**) y ∩ denota un ***semitono*** (**S**). La distribución de tonos y semitonos es ***simétrica*** respecto de la nota re:

re* — *mi* ∩ *fa* — *sol* — *la* — *si* ∩ *do* — *re* — *mi* ∩ *fa* — *sol* — *la* — *si* ∩ *do* — *re

Es decir que la distribución de tonos y de semitonos es similar tanto si se asciende como si se desciende en la escala musical, tomando como punto de partida a la nota ***re***. Por esta motivo, durante la Edad Media los clérigos componían sus piezas religiosas partiendo de esta nota.

La estructura tonal del ***intervalo de quinta*** es siempre de ***tres tonos y un semitono***:

Intervalo de quinta: **3T** y **1S**

Sin embargo, como consecuencia de la peculiar distribución tonal de la octava, encontramos que el ***intervalo de cuarta*** puede tener una de las dos siguientes composiciones tonales:

Intervalo de cuarta perfecta: **2T** y **1S**.

o bien

Intervalo de cuarta aumentada o tritono: **3T**.

En otras palabras, el intervalo de cuarta perfecta no siempre se verifica entre las notas de la octava. Hay ***intervalo de cuarta perfecta*** entre los siguientes pares de notas:

do- fa
re- sol
mi- la
sol- do
la- re
si- mi

12. *Timeo*, 36 a-b.

mientras que entre las notas

fa- si

existe un ***tritono o intervalo de cuarta aumentada***.

A modo de síntesis, podemos citar nuevamente a Filolao, quien en los siguientes términos describe, de manera breve pero completa, la estructura de la escala musical: *"La extensión de la octava es una cuarta más una quinta. La quinta excede a la cuarta por 8/9.… el intervalo de cuarta (vale) 3/4; el de quinta, 2/3; el de octava, 1/2. Luego, la octava contiene cinco tonos completos y dos semitonos; la quinta, tres tonos y un semitono, y la cuarta, dos tonos y un semitono".*[13]

La escala templada o temperada de J. S. Bach

En el siglo XVIII Juan Sebastián Bach (1685- 1750), en su obra ***El clave bien temperado***, implementó ciertas modificaciones fundamentales que habían sido introducidas a la escala musical. Desde entonces la escala corrientemente empleada en Occidente es la ***escala temperada***. En esta escala existen ***once*** frecuencias intermedias entre una nota y su octava superior. Las ***doce frecuencias de la escala temperada*** se denotan

do- do#- re- re#- mi- fa- fa#- sol- sol#- la- la#- si

donde el signo # indica una nota "sostenida". En el piano, estas doce frecuencias se corresponden con las sucesivas series de ***siete teclas blancas y cinco teclas negras***. Según se observa en el esquema anterior, en la escala temperada se intercalan notas (las notas #) entre aquellos sonidos de la octava que distan entre sí en un intervalo de un tono. Es decir que se intercalan notas entre ***do*** y ***re***; ***re*** y ***mi***; ***fa*** y ***sol***; ***sol*** y ***la*** ; ***la*** y ***si***. Pero en cambio no se intercalan notas entre ***si*** y ***do***, y tampoco entre ***mi*** y ***fa***, ya que la distancia entre estos sonidos es de un semitono. Como resultado de estas modificaciones ***todos los sonidos sucesivos de la escala temperada están separados entre sí por una distancia de un semitono***. En otras palabras, entre dos notas consecutivas cualesquiera de la escala temperada existe siempre, exactamente, el mismo intervalo.

En la escala temperada las frecuencias f_n y f_{n+1} de dos notas sucesivas verifican la siguiente relación:

$$f_{n+1} = f_n K \qquad \text{donde } n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (13)$$

Partiendo de ***n = 0*** podemos calcular los primeros términos de la serie

---

13. *Fragmentos*, DK6. En K. S. Guthrie, *Op. cit.*, pág. 168. Los pitagóricos no trabajaban con frecuencias sino con longitudes de cuerdas; por esa razón es que las fracciones en la cita aparecen invertidas.

$$f_1 = f_0\, K$$
$$f_2 = f_1\, K = f_0\, K^2$$
$$f_3 = f_2\, K = f_0\, K^3$$

y así sucesivamente, obtenemos

$$f_m = f_0\, K^m \quad ; \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots. \qquad (14)$$

Esta ecuación caracteriza la relación entre las diferentes frecuencias de la escala templada. En esta expresión f_0 es la frecuencia de la nota menor o nota tónica; y la constante K tiene el valor

$$\boldsymbol{K \cong 1{,}059}$$

Suponiendo que tomamos como nota tónica a la nota ***do*** entonces

$$f_0 = \mathbf{261}$$

y la expresión (14) toma la forma

$$f_m = 261 \times (1{,}059)^m \qquad (15)$$

A partir de esta expresión podemos calcular, por ejemplo, la frecuencia correspondiente a la octava superior de la nota ***do*** –esto es, la frecuencia de la nota ***DO***- Para ello reemplazamos en la anterior el valor $m=12$ obteniendo

$$f_{DO} = 261 \times (1{,}059)^{12}$$

Aplicando logaritmos *m.a.m* en la última expresión nos queda

$$\ln f_{DO} = \ln(261) + 12\ln(1{,}059)$$

de donde despejamos el valor de f_{DO}

$$f_{DO} \cong 519{,}25$$

que, efectivamente, corresponde con bastante aproximación a la frecuencia de la nota ***DO***. En el siglo XVIII fue posible realizar este tipo de cálculos gracias a la invención de la ***función logarítmica***, descubrimiento realizado por John Neper (1550-1617) en el transcurso del siglo XVI.

Las experiencias de Pitágoras

Según nos relata Jámblico en su biografía de Pitágoras, el sabio de Samos habría comprendido las relaciones matemáticas subyacentes a la escala musical en virtud de un hecho fortuito. Ciertamente, como ya hemos dicho, al pasar cerca del taller de un herrero el maestro habría percibido que, al golpear el yunque con diferentes martillos, se generaban sonidos armoniosos que se combinaban entre sí según intervalos de cuarta, de quinta y de octava. Así habría descubierto que los sonidos no dependen ni de la fuerza de los golpes ni de la forma de los martillos, sino del "tamaño" de estos últimos. Posteriormente habría diseñado una serie de experimentos con la finalidad de dilucidar los fundamentos matemáticos de la música. En uno de esos experimentos habría tensado cuatro cuerdas suspendiendo diferentes pesos en sus extremos, y habría comprobado la existencia de ciertas relaciones bien determinadas entre los pesos suspendidos y los sonidos emitidos por las cuerdas. Si bien el experimento descripto por Jámblico presenta ciertos errores conceptuales en cuanto a las relaciones existentes entre los pesos y los sonidos, este relato demuestra que los pensadores de la Antigüedad tenían una idea bastante clara del vínculo que se establece entre la tensión de una cuerda y la propagación de un sonido.

Habiendo comprendido la matemática de la música en las cuerdas, Pitágoras habría extendido sus experiencias a otros instrumentos, obteniendo siempre idénticas relaciones de proporción. Por lo tanto, habría concluido que las razones subyacentes a los intervalos de cuarta, de quinta y de octava se verifican siempre, independientemente de los materiales de los cuales están hechos los instrumentos[14]. La ilustración 1 muestra un grabado del siglo XVI en el cual se representa a Pitágoras ensayando las relaciones musicales mediante diferentes tipos de instrumentos[15].

A modo de conclusión podemos decir que, al ser analizado desde el punto de vista de la matemática, el maravilloso fenómeno de la música presenta asombrosas regularidades. Todo en ella obedece a la proporción y a la simetría. Los sabios de la Escuela Pitagórica fueron particularmente sensibles a los encantos sonoros de la música audible, y a la estructura racional de la ciencia musical. Por esta razón consideraron a la música como el más perfecto ejemplo del principio abstracto de la ***armonía***[16], y como el más adecuado bálsamo para los males del cuerpo y para las dolencias del alma[17].

---

14. Jámblico, *Vida Pitagórica*, 26. En *Ibid.*, pág. 86 y ss.
15. **Ilustración 1:** F. Gaffurio, *Theorica musica*, Milán, 1492. Extraído de R. Lawlor, *Geometría sagrada*, pág. 7; Ed. Debate, Madrid, 1996.
16. Filolao, *Fragmentos*, DK6. En K. S. Guthrie, *Op. cit.*, pág. 186.
17. Jámblico, *Vida Pitagórica*, 15. En *Ibid.*, pág. 72.

Ilustración 1

Bibliografía:

Crombie, A. C.: *"Historia de la ciencia. De San Agustín a Galileo"*. Ed. Alianza, Madrid, 1996.

de Bruyne, E.: *"Estudios de Estética Medieval"*. Tomo I: *De Boecio a Juan Escoto Erigena*. Tomo II: *Epoca Románica*. Biblioteca Hispánica de Filosofía, Gredos.

Eggers Lan, C.: *"El Nacimiento de la Matemática en Grecia"*. EUDEBA, Bs. As., 1995.

Eggers Lan, C.: *"Los Filósofos Presocráticos"*. Ed. Gredos, Madrid, 1994.

Guthrie, K. S.: *"The Pythagorean Sourcebook and Library"*. Ed. Phanes Press. Michigan. USA, 1987.

Guthrie, W. K. C.: *"Historia de la Filosofía Griega"*. Tomo I: *"Los primeros presocráticos y los pitagóricos"*. Ed. Gredos, Madrid, 1991.

Jeans, J.: *"Matemáticas de la música"* en *"El Mundo de las Matemáticas"*, Tomo VI. Ed. Grijalbo, Barcelona, 1976.

Poggio, M. A. y Ern, V.: *"Lecciones de Acústica"*. Centro de Estudiantes de Ingeniería, U. N. La Plata.

Resnick, R. y Halliday, D.: *"Física"*. Parte I: *"Mecánica, calor y sonido"*. Compañía Editorial Continental, México, 1973.

Sintes Olive, F. F.: *"Física general Aplicada"*. Ed. R. Sopena, Barcelona, 1955.

Tatarkiewics, W.: *"Historia de la Estética"*. Tomo I: *"La estética antigua"*. Ed. Akal, Madrid, 1987.