ECUACIONES INTEGRALES LINEALES-II

Resolución de ecuaciones con núcleo de variables separables

01. Ecuaciones integrales de Fredholm

Se trata de ecuaciones integrales lineales con límites constantes (dominio de integración constante).

	Ecuaciones integrales de Fredholm
Primer tipo o clase	$\int_a^b k(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = f(x)$ Homogénea: $\int_a^b k(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = 0$
Segundo tipo o clase	$\varphi(x) - \int_a^b k(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = f(x)$ Homogénea: $\varphi(x) - \int_a^b k(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = 0$

En el caso n-dimensional, para un dominio de integración D del espacio R^n :

1ª clase: $\int_D k(x_1,...,x_n,\mu_1,...,\mu_n)\varphi(\mu_1,...,\mu_n).d\mu_1...d\mu_n = f(x_1,...,x_n)$

2ª clase: $\varphi(u_1,...,u_n) - \int_D k(x_1,...,x_n,\mu_1,...,\mu_n)\varphi(\mu_1,...,\mu_n).d\mu_1...d\mu_n = f(x_1,...,x_n)$

o bien, de forma más compacta, si llamamos $P = x_1,...,x_n, Q = \mu_1,...,\mu_n$, se tiene:

1ª clase o tipo: $\int_D k(P,Q)\varphi(Q).dQ = f(P)$

2ª clase o tipo: $\varphi(Q) - \int_D k(P,Q)\varphi(Q).dQ = f(P)$

Conocida la forma del núcleo $k(P,Q)$ de la integral, el proceso de actuación consiste en transformar la ecuación integral para obtener un sistema de ecuaciones lineales equivalente, que requiere el tratamiento algebraico correspondiente. Estudiamos aquí aquellas ecuaciones integrales en las que el núcleo es de variables separables (núcleo degenerado), que es quizás el caso más elemental.

02. La separabilidad del núcleo

Se trata de estudiar ecuaciones integrales en las que el núcleo de la integral admite separación de variables, esto es, de la forma

$$k(P,Q)=\sum_{k=1}^{m}a_k(P).b_k(Q) \qquad [1]$$

donde las funciones $\{a_1(P),...,a_m(P)\}$ son linealmente independientes, lo mismo que las funciones $\{b_1(Q),...,b_m(Q)\}$. Si no lo fueran, reduciríamos el número m de todas ellas mediante el proceso que detallamos a continuación.

Supongamos que las $a_k(P),\ k=1,...,m$ son linealmente dependientes, es decir, tales que alguna combinación lineal igualada a cero admite algún coeficiente distinto de cero, es decir:

Sea $\sum_{k=1}^{m}C_k a_k(P)=0$,y sea, por ejemplo, $C_m\neq 0$. Si es así, se puede despejar $a_m(P)=\sum_{k=1}^{m-1}C_k^* a_k(P)$, y al sustituir en la expresión [1] del núcleo de la integral, se tiene:

$$k(P,Q)=\sum_{k=1}^{m}a_k(P).b_k(Q)=a_m(P).b_m(Q)+\sum_{k=1}^{m-1}a_k(P).b_k(Q)=\sum_{k=1}^{m-1}a_k(P).b_k(Q)+$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}C_k^* a_k(P).b_m(Q)=\sum_{k=1}^{m-1}a_k(P)\left[b_k(Q)+C_k^* b_m(Q)\right]=\sum_{k=1}^{m-1}a_k(P).b_k^*(Q)$$

Es decir, hemos disminuido el número de funciones desde m a m-1. Si todavía no fuera el conjunto linealmente independiente se repetiría el proceso hasta que quedaran solo funciones linealmente independientes. Lo mismo para las funciones $b_k(Q),\ k=1,...,m$

En definitiva, pues, podemos considerar que en estas ecuaciones integrales, el núcleo se expresa de forma general como una suma de productos de funciones linealmente independientes.

$$k(P,Q)=\sum_{k=1}^{m}a_k(P).b_k(Q)$$

03. Un sistema equivalente

Consideremos la ecuación integral

$$\varphi(P)=\int_D k(P,Q).\varphi(Q).dQ+f(P) \qquad [2]$$

donde el núcleo es $k(P,Q)=\sum_{i=1}^{m}a_i(P).b_i(Q)$, siendo linealmente independientes las funciones $a_i(P)$ y las $b_i(Q)$. Podemos extraer fuera de la integral una parte del núcleo, quedando:

$$\varphi(P)=\sum_{i=1}^{m}a_i(P)\int_D b_i(Q).\varphi(Q).dQ+f(P) \qquad [3]$$

Si llamamos

$$\int_D b_i(Q).\varphi(Q).dQ=C_i,\ i=1,...,m \qquad [4]$$

se tiene, al sustituir en [3]:

$$\varphi(P)=\sum_{i=1}^{m} C_i.a_i(P)+f(P) \qquad [5]$$

Sustituyendo esta expresión en [4], obtenemos

$$C_i=\int_D b_i(Q).\varphi(Q).dQ=\int_D b_i(Q)\left[\sum_{j=1}^{m} C_j a_j(Q)+f(Q)\right]dQ=\sum_{j=1}^{m} C_j\int_D b_i(Q)a_j(Q)dQ+$$
$$+\int_D b_i(Q)f(Q)dQ$$

Y, si llamamos

$$k_{ij}=\int_D b_i(Q)a_j(Q)dQ\,, \qquad f_i=\int_D b_i(Q)f(Q)dQ\,,\ i=1,...,m \qquad [6]$$

Se tendrá, al sustituir

$$C_i=\sum_{j=1}^{m} C_j k_{ij}+f_i, \quad i=1,...,m \qquad [7]$$

A cada una de las soluciones de la ecuación integral [2] le corresponde en definitiva una solución $\left(C_1,...,C_m\right)$ de este sistema de ecuaciones lineales, y, al ser linealmente independientes las funciones $a_j(P)$, tal solución es única.
Recíprocamente, si el sistema [7] tiene solución única, $\left(C_1,...,C_m\right)$, al sustituirla en [5] se obtiene la solución $\varphi(P)$ de la ecuación integral dada, ya que son reversibles las operaciones que nos han llevado desde la ecuación integral al sistema equivalente [7].

Por analogía, de la ecuación integral traspuesta

$$\mu(P)=\int_D k(Q,P).\mu(Q).dQ+f^*(P) \qquad [8]$$

se obtiene asimismo el sistema de ecuaciones lineales equivalente

$$C_i^*=\sum_{j=1}^{m} C_j^* k_{ji}+f_i^*, \quad i=1,...,m \qquad [9]$$

04. La verificación de los teoremas de Fredholm

Puesto que las funciones $a_i(P)$ y $b_i(Q)$, $i=1,...,m$ que figuran en la descomposición del núcleo son linealmente independientes, esto nos indicará que a cada conjunto de *h* soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo, [7] o [9], le corresponden *h* soluciones linealmente independientes para las respectivas ecuaciones integrales lineales asociadas, [2] y [8]. Queda, pues, definida una correspondencia biunívoca entre el conjunto de las *h* soluciones de cada sistema de ecuaciones lineales y el conjunto de las *h* soluciones de su ecuación integral lineal asociada. Y como los teoremas primero y segundo de Fredholm se verifican para el sistema de ecuaciones lineales(*), también han de verificarse para las ecuaciones integrales lineales asociadas correspondientes.

En el segundo caso de la alternativa de Fredholm, es decir, en el tercer teorema de Fredholm, sabemos que el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo tiene solución si y solo si

$$\sum_{i=1}^{m} f_i C_i^* = 0$$

siendo $C_1^*,...,C_m^*$ una solución del sistema homogéneo correspondiente. De la expresión [6] se tiene que

$$\sum_{i=1}^{m} C_i^* f_i = \sum_{i=1}^{m} C_i^* \left(\int_D b_i(Q) f(Q) dQ \right) = \int_D f(Q) \left(\sum_{i=1}^{m} C_i^* b_i(Q) \right) dQ$$

y como $C_1^*,...,C_m^*$ es solución del sistema homogéneo [9], será $\sum_{i=1}^{m} C_i^* b_i(Q) = z(Q)$ solución de la ecuación integral lineal homogénea [8], por lo que la condición se puede escribir así:

$$\int_D f(Q) z(Q) dQ = 0$$

que es el tercer teorema de Fredholm.

06. Ejemplos

06.1. Ecuación integral lineal

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 \left(x^2 \varepsilon + x \varepsilon^2 \right) \varphi(\varepsilon).d\varepsilon = f(x)$$

Resolución:

Si hacemos $$C_2 = \int_0^1 \varepsilon \varphi(\varepsilon).d\varepsilon, \quad C_1 = \int_0^1 \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon).d\varepsilon \qquad [6.1.1]$$

será:

$$\varphi(x) + \lambda x^2 \int_0^1 \varepsilon \varphi(\varepsilon).d\varepsilon + \lambda x \int_0^1 \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon).d\varepsilon = f(x) \rightarrow \varphi(x) + \lambda x^2 C_2 + \lambda x C_1 = f(x) \qquad [6.1.2]$$

Sustituyendo en cada una de las dos igualdades [6.1.1]:

$$C_1 = \int_0^1 \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon).d\varepsilon = \int_0^1 \varepsilon^2 \left(-\lambda C_2 \varepsilon^2 - \lambda C_1 \varepsilon + f(\varepsilon) \right) .d\varepsilon$$

$$C_2 = \int_0^1 \varepsilon \varphi(\varepsilon).d\varepsilon = \int_0^1 \varepsilon \left(-\lambda C_2 \varepsilon^2 - \lambda C_1 \varepsilon + f(\varepsilon) \right) \varphi(\varepsilon).d\varepsilon$$

Resolviendo las integrales que figuran, se tiene:

$$C_1 = -\frac{\lambda}{5} C_2 - \frac{\lambda}{4} C_1 + \int_0^1 \varepsilon^2 f(\varepsilon).d\varepsilon$$

$$C_2 = -\frac{\lambda}{4} C_2 - \frac{\lambda}{3} C_1 + \int_0^1 \varepsilon f(\varepsilon).d\varepsilon$$

Haciendo

$$b_1 = \int_0^1 \varepsilon f(\varepsilon).d\varepsilon, \quad b_2 = \int_0^1 \varepsilon^2 f(\varepsilon).d\varepsilon \qquad [6.1.3]$$

Obtenemos ordenado el sistema resultante:

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{3}C_1 + \left(1+\frac{\lambda}{4}\right)C_2 = b_1 \\ \left(1+\frac{\lambda}{4}\right)C_1 + \frac{\lambda}{5}C_2 = b_2 \end{cases} \qquad [6.1.4]$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{3} & 1+\frac{\lambda}{4} \\ 1+\frac{\lambda}{4} & \frac{\lambda}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Discusión del sistema con respecto al parámetro λ:

$$|M| = \begin{vmatrix} \frac{\lambda}{3} & 1+\frac{\lambda}{4} \\ 1+\frac{\lambda}{4} & \frac{\lambda}{5} \end{vmatrix} = -1-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{240}$$

$$|M| \text{ será nulo si } -1-\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{240} = 0 \to \lambda = 60 \pm 16\sqrt{15}$$

Por tanto, el sistema tiene solución única para $\lambda \neq 60 \pm 16\sqrt{15}$, y el correspondiente sistema homogéneo tendrá soluciones no triviales si $\lambda = 60 \pm 16\sqrt{15}$

Obtención de las soluciones:

a) Resolviendo [6.1.4] mediante la regla de Cramer:

$$C_1 = \frac{\frac{\lambda}{5}b_1 - \left(1+\frac{\lambda}{4}\right)b_2}{\frac{\lambda^2}{240}-\frac{\lambda}{2}-1}, \qquad C_2 = \frac{\frac{\lambda}{3}b_2 - \left(1+\frac{\lambda}{4}\right)b_1}{\frac{\lambda^2}{240}-\frac{\lambda}{2}-1}$$

Por tanto, al sustituir en [6.1.2] y despejar $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = -\lambda C_2 x^2 - \lambda C_1 x + f(x) = -\lambda\left[\frac{\frac{\lambda}{5}b_1 - \left(1+\frac{\lambda}{4}\right)b_2}{\frac{\lambda^2}{240}-\frac{\lambda}{2}-1}x^2 + \frac{\frac{\lambda}{3}b_2 - \left(1+\frac{\lambda}{4}\right)b_1}{\frac{\lambda^2}{240}-\frac{\lambda}{2}-1}x\right] + f(x) =$$

$$= \frac{-\lambda}{\frac{\lambda^2}{240}-\frac{\lambda}{2}-1}\left\{\left[\frac{\lambda x^2}{5} - \left(1+\frac{\lambda}{4}\right)x\right]b_1 + \left[\frac{\lambda x}{3} - \left(1+\frac{\lambda}{4}\right)x^2\right]b_2\right\} + f(x)$$

y al sustituir las expresiones [6.1.3] se obtiene finalmente:

$$\varphi(x) = \frac{-\lambda}{\frac{\lambda^2}{240}-\frac{\lambda}{2}-1}\int_0^1\left\{\left[\frac{\lambda x^2}{5} - \left(1+\frac{\lambda}{4}\right)x\right]\varepsilon f(\varepsilon) + \left[\frac{\lambda x}{3} - \left(1+\frac{\lambda}{4}\right)x^2\right]\varepsilon^2 f(\varepsilon)\right\}.d\varepsilon + f(x)$$

b) Soluciones no triviales en el caso homogéneo:

En este caso es

$$\varphi(x) + \lambda x^2 C_2 + \lambda x C_1 = 0 \to \varphi(x) = -\lambda x^2 C_2 - \lambda x C_1 = -\lambda C_1\left(\frac{C_2}{C_1}x^2 + x\right)$$

Eligiendo una cualquiera de las dos ecuaciones [6.1.4], pues en este caso al anularse los términos independientes b_1 y b_2, y ser también nulo el determinante de la matriz, tenemos que ambas ecuaciones son equivalentes (una es combinación lineal de la otra). Se tiene:

$$\frac{\lambda}{3}C_1+\left(1+\frac{\lambda}{4}\right)C_2=0\rightarrow\frac{C_2}{C_1}=\frac{-\frac{\lambda}{3}}{1+\frac{\lambda}{4}}=-\frac{15\pm4\sqrt{15}}{12\pm3\sqrt{15}}=-\frac{1}{3}\sqrt{15}$$

Finalmente:

$$\varphi(x)=-\lambda x^2C_2-\lambda xC_1=-\lambda C_1\left(x-\frac{1}{3}\sqrt{15}x^2\right)=C\left(x-\frac{1}{3}\sqrt{15}x^2\right)$$

(donde C es una constante arbitraria)

06.2. Ecuación integral lineal

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^{10}x\varepsilon\varphi(\varepsilon).d\varepsilon+e^x$$

Resolución:

Si hacemos
$$C=\int_0^{10}\varepsilon\varphi(\varepsilon).d\varepsilon \qquad [6.2.1]$$

será:

$$\varphi(x)=\lambda x\int_0^{10}\varepsilon\varphi(\varepsilon).d\varepsilon+e^x=\lambda xC+e^x \qquad [6.2.2]$$

Sustituyendo en la igualdad [6.2.1]:

$$C=\int_0^{10}\varepsilon\varphi(\varepsilon).d\varepsilon=\int_0^{10}\varepsilon\left(\lambda C\varepsilon+e^x\right)d\varepsilon=\lambda C\int_0^{10}\varepsilon^2d\varepsilon+\int_0^{10}\varepsilon.e^{\varepsilon}d\varepsilon=\frac{1000.\lambda.C}{3}+$$

$$+(\varepsilon-1).e^{\varepsilon}\Big|_0^{10}=\frac{1000\lambda C}{3}+(10-1).e^{10}-(0-1).e^0=\frac{1000\lambda C}{3}+9.e^{10}+1$$

Despejamos C:

$$C\left(1-\frac{1000\lambda}{3}\right)=9.e^{10}+1\rightarrow C=\frac{3+27.e^{10}}{3-1000\lambda}$$

Para obtener la expresión de la solución sustituimos en [6.2.2]:

$$\varphi(x)=\frac{3\lambda+27\lambda e^{10}}{3-1000\lambda}x+e^x$$

06.3. Ecuación integral lineal

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^{n}senx\varphi(\varepsilon).d\varepsilon$$

Resolución:

Si hacemos
$$C=\int_0^{n}\varphi(\varepsilon).d\varepsilon \qquad [6.3.1]$$

será:

$$\varphi(x)=\lambda senx\int_0^{n}\varphi(\varepsilon).d\varepsilon=\lambda senxC \qquad [6.3.2]$$

Sustituyendo en la igualdad [6.3.1]:

$$C=\int_0^{n}(\lambda sen\varepsilon C).d\varepsilon=\lambda C\int_0^{n}sen\varepsilon d\varepsilon=-\lambda C.\cos\varepsilon\Big|_0^{n}=-\lambda C.(\cos n-\cos 0)=\lambda C(1-\cos n)$$

Discusión: La igualdad se verifica solo si $\lambda = \dfrac{1}{1-\cos n}$,

y no hay solución si $\lambda \neq \dfrac{1}{1-\cos n}$

Obtenemos la solución sustituyendo en [6.3.2]:

$$\varphi(x) = \frac{C}{1-\cos n} senx \text{ ,} \qquad \text{cualquiera que sea C}$$

06.4. Ecuación integral lineal

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^n \cos x \varphi(\varepsilon).d\varepsilon$$

Resolución:

Si hacemos $$C = \int_0^n \varphi(\varepsilon).d\varepsilon \qquad [6.4.1]$$

será:

$$\varphi(x) = \lambda \cos x \int_0^n \varphi(\varepsilon).d\varepsilon = \lambda \cos xC \qquad [6.4.2]$$

Sustituyendo en la igualdad [6.4.1]:

$$C = \int_0^n (\lambda \cos \varepsilon C).d\varepsilon = \lambda C \int_0^n \cos \varepsilon d\varepsilon = \lambda C.sen\varepsilon\Big|_0^n = \lambda C.(senn - sen0) = \lambda C(senn - 0) = \lambda Csenn$$

Discusión: La igualdad se verifica solo si $\lambda = \dfrac{1}{senn}$,

y no hay solución si $\lambda \neq \dfrac{1}{senn}$

Obtenemos la solución sustituyendo en [6.4.2]:

$$\varphi(x) = \frac{C}{senn} \cos x \text{ ,} \qquad \text{cualquiera que sea C}$$

06.5. Ecuación integral lineal

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (x-\varepsilon)\varphi(\varepsilon).d\varepsilon$$

Resolución:

Si hacemos $$C_1 = \int_0^1 \varphi(\varepsilon).d\varepsilon, \quad C_2 = \int_0^1 \varepsilon\varphi(\varepsilon).d\varepsilon \qquad [6.5.1]$$

será:

$$\varphi(x) = x + \lambda x \int_0^1 \varphi(\varepsilon).d\varepsilon - \lambda \int_0^1 \varepsilon\varphi(\varepsilon).d\varepsilon = x + \lambda xC_1 - \lambda C_2 \qquad [6.5.2]$$

Sustituyendo en cada una de las dos igualdades [6.5.1]:

$$C_1=\int_0^1 \varphi(\varepsilon).d\varepsilon=\int_0^1\left(\varepsilon+\lambda C_1\varepsilon-\lambda C_2\right).d\varepsilon=\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2}C_1-\lambda C_2$$

$$C_2=\int_0^1 \varepsilon\varphi(\varepsilon).d\varepsilon=\int_0^1\varepsilon\left(\varepsilon+\lambda C_1\varepsilon-\lambda C_2\right).d\varepsilon=\frac{1}{3}+\frac{\lambda}{3}C_1-\frac{\lambda}{2}C_2$$

Simplificando y ordenando:

$$\begin{cases}\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)C_1+\lambda C_2=\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{\lambda}{3}C_1+\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)C_2=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix}1-\dfrac{\lambda}{2} & \lambda\\ -\dfrac{\lambda}{3} & 1+\dfrac{\lambda}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Discusión del sistema con respecto al parámetro λ:

$$|M|=\begin{vmatrix}1-\dfrac{\lambda}{2} & \lambda\\ -\dfrac{\lambda}{3} & 1+\dfrac{\lambda}{2}\end{vmatrix}=(1-\frac{\lambda}{2})(1+\frac{\lambda}{2})+\frac{\lambda^2}{3}=1-\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^2}{3}=1+\frac{\lambda^2}{12}$$

$|M|$ no será nulo cualquiera que sea el número real λ. Es decir, el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es 2, igual al número de incógnitas y tiene, por tanto, solución única.

Para obtener la solución resolvemos el sistema mediante la regla de Cramer:

$$C_1=\frac{\begin{vmatrix}1/2 & \lambda\\ 1/3 & 1+\lambda/2\end{vmatrix}}{1+\dfrac{\lambda^2}{12}}=\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\lambda}{4}-\dfrac{\lambda}{3}}{1+\dfrac{\lambda^2}{12}}=\frac{6-\lambda}{12+\lambda^2}$$

$$C_2=\frac{\begin{vmatrix}1-\lambda/2 & 1/2\\ -\lambda/3 & 1/3\end{vmatrix}}{1+\dfrac{\lambda^2}{12}}=\frac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{\lambda}{6}+\dfrac{\lambda}{6}}{1+\dfrac{\lambda^2}{12}}=\frac{4}{12+\lambda^2}$$

Solución:

$$\varphi(x)=x+\lambda C_1x+\lambda C_2=x+\frac{6\lambda-\lambda^2}{12+\lambda^2}x+\frac{4\lambda}{12+\lambda^2}=\frac{12+6\lambda}{12+\lambda^2}x+\frac{4\lambda}{12+\lambda^2}$$

O sea:

$$\varphi(x)=\frac{12+6\lambda}{12+\lambda^2}x+\frac{4\lambda}{12+\lambda^2}$$

06.6. Ecuación integral lineal

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^{2\pi} senx.sen\varepsilon.\varphi(\varepsilon).d\varepsilon+f(x)$$

Resolución:

Si hacemos $$C=\int_0^{2\pi} sen\in\varphi(\varepsilon).d\varepsilon \qquad [6.6.1]$$

será:

$$\varphi(x)=\lambda senx\int_0^{2\pi} sen\varepsilon.\varphi(\varepsilon).d\varepsilon+f(x)=\lambda Csenx+f(x) \qquad [6.6.2]$$

Sustituyendo en la igualdad [6.6.1]:

$$C=\int_0^{2\pi} sen\varepsilon(\lambda Csen\varepsilon+f(\varepsilon)).d\varepsilon=\lambda C\int_0^{2\pi} sen^2\varepsilon d\varepsilon+\int_0^{2\pi} sen\varepsilon f(\varepsilon)d\varepsilon=\lambda C\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}d\varepsilon+$$

$$+\int_0^{2\pi} sen\varepsilon f(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{\lambda C}{2}\varepsilon\Big|_0^{2\pi}-\frac{\lambda C}{4}sen2\varepsilon\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi} sen\varepsilon f(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{2\pi\lambda C}{2}-0+\int_0^{2\pi} sen\varepsilon f(\varepsilon)d\varepsilon=$$

$$=\pi\lambda C+\int_0^{2\pi} sen\varepsilon f(\varepsilon)d\varepsilon$$

Despejamos: $C=\dfrac{1}{1-\lambda C}\displaystyle\int_0^{2\pi} sen\varepsilon.f(\varepsilon).d\varepsilon$

Y finalmente sustituimos en la igualdad [6.6.2]:

$$\varphi(x)=\frac{\lambda}{1-\lambda C}\left(\int_0^{2\pi} sen\varepsilon.f(\varepsilon).d\varepsilon\right).senx+f(x)$$

Bibliografía

Petrovski, I., “Lecciones de teoría de las ecuaciones integrales”, Editorial Mir, Moscú, 1976.
Wikipedia, Erik Ivar Fredholm
Ecuaciones integrales lineales-I. Acerca de las ecuaciones integrales y la alternativa de Fredholm. http://casanchi.com/mat/fredholm01.htm”.