ECUACIONES INTEGRALES LINEALES-I

Acerca de las ecuaciones integrales y la alternativa de Fredholm

Fue el matemático sueco Ivar Fredholm el primero en realizar un estudio completo de estas ecuaciones, logrando sistematizar una exposición de los fundamentos de resolución de las mismas.

Erik Ivar Fredholm (imagen de Wikipedia)

Erik Ivar Fredholm (1866-1927) tuvo un importante papel la matemática de las ecuaciones integrales y teoría espectral. Una parte importante de su trabajo fue realizada en 1899, cuando estudió el problema de Dirichlet en comunicación con H. Poincaré (1854-1912), Emile Artin (1898-1962) y Jacques Hadamard (1865-1963). Al año siguiente publica su informe sobre teoría de ecuaciones integrales con el título *Sur une nouvelle méthode pour la Résolution du probléme de Dirichlet*, para, en 1903, dar a conocer una versión más amplia de la teoría en *Sur une classe d'ecuations fonctionnelles* (Acta Mathemática, 27:365-390). Hilbert extendería los estudios de Fredholm con la inclusión de valores propios, que conduciría posteriormente a la teoría de los espacios de Hilbert.

01. Las ecuaciones integrales lineales

En la metodología de Fredholm, el proceso de resolución de ecuaciones en las que la incógnita es una función bajo signo integral, real o compleja, requiere la utilización de los recursos del álgebra tanto como los del análisis matemático, ya que la técnica a usar plantea la construcción de un sistema de ecuaciones lineales equivalente a la ecuación integral.

Una ecuación integral, de incógnita $\varphi(x)$, es una expresión del tipo

$$\Phi\left(\varphi(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ldots\right)=\int_a^b \mathrm{N}(K(x,\mu).\varphi(\mu)).d\mu$$

Donde $f_1(x),\ f_2(x),\ldots,K(x,\mu)$ son funciones dadas, $\varphi(\mu)$ es una función incógnita y las variables x,μ recorren el intervalo $[a,b]$ de integración. La función $K(x,\mu)$ se denomina *núcleo de la ecuación integral*.

Las ecuaciones integrales lineales son aquellas en las que la incógnita está afectada solamente de operaciones lineales, esto es, las expresiones que están tanto fuera como dentro de la integral son lineales:

$$\Phi\left(\phi(x),\ f_1(x),\ f_2(x),...\right) \equiv A(x).\phi(x)+B(x), \qquad N(K(x,\mu),\varphi(\mu)) \equiv K(x,\mu).\varphi(\mu)$$

01. 1. Las ecuaciones integrales de Fredholm:

Una ecuación integral lineal con límites de integración constantes, o ecuación integral de Fredholm es de la forma:

$$A(x).\phi(x)+B(x)=\int_a^b K(x,\mu).\phi(\mu).d\mu$$

Se acostumbran de considerar dos tipos de ecuaciones integrales de Fredholm en razón de que el término $A(x)$ sea nulo o bien no nulo en el intervalo de integración:

- Ecuación integral lineal de Fredholm de primer tipo, clase o especie:

Es el caso en el que $A(x)=0,\ \forall x \in [a,b]$:

$$B(x)=\int_a^b K(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu$$

- Ecuación integral lineal de Fredholm de segundo tipo, clase o especie:

Es el caso en el que $A(x)\neq 0,\ \forall x \in [a,b]$:

$$\varphi(x)+\frac{B(x)}{A(x)}=\int_a^b \frac{K(x,\mu)}{A(x)}.\varphi(\mu).d\mu \rightarrow \varphi(x)=f(x)+\int_a^b k(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu$$

En definitiva, podemos expresar:

	Ecuaciones integrales lineales con limites constantes (Ecuaciones integrales de Fredholm)
Primer tipo o clase	$\int_a^b K(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = f(x)$
Segundo tipo o clase	$\varphi(x)-\int_a^b k(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = f(x)$

En el caso n-dimensional, para un dominio de integración D del espacio R^n :

1ª clase: $$\int_D k(x_1,...,x_n,\mu_1,...,\mu_n)\varphi(\mu_1,...,\mu_n).d\mu_1...d\mu_n = f(x_1,...,x_n)$$

2ª clase: $$\varphi(u_1,...,u_n)-\int_D k(x_1,...,x_n,\mu_1,...,\mu_n)\varphi(\mu_1,...,\mu_n).d\mu_1...d\mu_n = f(x_1,...,x_n)$$

o bien, de forma más compacta, si llamamos $P=x_1,...,x_n, Q=\mu_1,...,\mu_n$, se tiene:

1ª clase o tipo: $$\int_D k(P,Q)\varphi(Q).dQ = f(P)$$

2ª clase o tipo: $$\varphi(Q)-\int_D k(P,Q)\varphi(Q).dQ = f(P)$$

01.2. Las ecuaciones integrales de Volterra
Son ecuaciones lineales en las que alguno de los límites de integración es variable. Es este el aspecto que diferencia estas ecuaciones de las de Fredholm. Podemos considerar que se obtienen para el caso en que el núcleo de la integral se anule a partir de un determinado valor de la variable independiente:

Así, si $k(x,\mu)=0,\ x>\mu$, se tiene que:

$\int_a^x K(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = f(x)$ Ecuación integral de Volterra de primer tipo

$\varphi(x)-\int_a^x k(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = f(x)$ Ecuación integral de Volterra de segundo tipo

01.3. Las ecuaciones homogéneas
Las ecuaciones integrales, tanto de Fredholm como de Volterra se dicen homogéneas si es nula en todo el intervalo de integración la función *f(x)*, tanto en el caso de primera clase como de segunda clase.

	Caso no homogéneo	Caso homogéneo
Fredholm 1ª clase	$\int_a^b K(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = f(x)$	$\int_a^b K(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = 0$
Fredholm 2ª clase	$\varphi(x)-\int_a^b k(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = f(x)$	$\varphi(x)-\int_a^b k(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = 0$
Volterra 1ª clase	$\int_a^x K(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = f(x)$	$\int_a^x k(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = 0$
Volterra 2ª clase	$\varphi(x)-\int_a^x k(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = f(x)$	$\varphi(x)-\int_a^x k(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = 0$

02. Planteando un sistema de ecuaciones algebraicas lineales equivalente

Si es f(x) una función real y continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ puede aproximarse por los valores que toma en cada uno de los puntos M_p de una equipartición $P=\{M_1,...,M_n\}$ del intervalo $[a,b]$, esto es, de una partición cuyo subintervalo Δx es constante:

$$P=\{a,a+\Delta x,a+2\Delta x,...,a+n\Delta x\}$$

en cada punto $M_p = a + p\Delta x$, la función toma el valor $f_p = f(M_p) = f(a+p\Delta x)$, y la representación de tales puntos coincidirá con el grafo de la función f(x) cuando $n\to\infty\ (\Delta x\to 0)$.

Si consideramos la ecuación integral de Fredholm de segunda clase y la indicada partición del intervalo de integración, tendremos

$$\varphi(x)-\int_a^b k(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu = f(x)$$

$$\begin{aligned}\varphi_p &\equiv \varphi(a+p\Delta x)\\ f_p &\equiv f(a+p\Delta x)\\ \varphi_q &\equiv \varphi(a+q\Delta\mu)\\ k_{pq} &\equiv k(a+p\Delta x, a+q\Delta\mu)\end{aligned}$$

para valores $p=1,...,n;\ q=1,...,n$

Con lo que integral que figura en la ecuación queda aproximada por la suma

$$\sum_{p=0}^{n} k_{pq}\phi_q\Delta\mu$$

y la ecuación integral se convierte en un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\varphi_p = f_p + \sum_{q=1}^{n} k_{pq}\varphi_q\Delta\mu, \quad p=1,2,...,n$$

donde las incógnitas son las $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n$, y las magnitudes $k_{pq}, f_p, \Delta\mu$ son conocidas.

Más explícitamente es:

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_1 = f_1 + \sum_{q=1}^{n} k_{1q}\varphi_q\Delta\mu\\ \varphi_2 = f_2 + \sum_{q=1}^{n} k_{2q}\varphi_q\Delta\mu\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ \varphi_n = f_n + \sum_{q=1}^{n} k_{nq}\varphi_q\Delta\mu\end{array}\right. \quad \text{o bien} \quad \left\{\begin{array}{l}\varphi_1 - \sum_{q=1}^{n} k_{1q}\varphi_q\Delta\mu = f_1\\ \varphi_2 - \sum_{q=1}^{n} k_{2q}\varphi_q\Delta\mu = f_2\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ \varphi_n - \sum_{q=1}^{n} k_{nq}\varphi_q\Delta\mu = f_2\end{array}\right.$$

es decir:

$$\varphi_p - \sum_{q=1}^{n} k_{pq}\varphi_q\Delta\mu = f_p, \quad p=1,...,n$$

o bien

$$\left\{\begin{array}{l}(1-k_{11}\Delta\mu)\varphi_1 - k_{12}\Delta\mu\varphi_2 - ... - k_{1n}\Delta\mu\varphi_n = f_1\\ -k_{21}\Delta\mu\varphi_1 + (1-k_{22}\Delta\mu)\varphi_2 - ... - k_{2n}\Delta\mu\varphi_n = f_2\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ -k_{n1}\Delta\mu\varphi_1 - k_{n2}\Delta\mu\varphi_2 - ... + (1-k_{nn}\Delta\mu)\varphi_n = f_n\end{array}\right. \rightarrow M.\Phi = F$$

resultando como matrices del sistema:

Matriz de los coeficientes:

$$M = \begin{bmatrix} 1-k_{11}\Delta\mu & -k_{12}\Delta\mu & ... & -k_{1n}\Delta\mu \\ -k_{21}\Delta\mu & 1-k_{22}\Delta\mu & ... & -k_{2n}\Delta\mu \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ -k_{n1}\Delta\mu & -k_{n2}\Delta\mu & ... & 1-k_{nn}\Delta\mu \end{bmatrix} \equiv \left[\delta_{pq} - k_{pq}\Delta\mu\right]_{nxn}$$

(donde δ_{pq} es la delta de Kronecker)

Matrices columna de los términos independientes y de las incógnitas:

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ ... \\ f_n \end{bmatrix} \equiv \left[f_p\right]_{nx1}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ ... \\ ... \\ \varphi_n \end{bmatrix} \equiv \left[\varphi_p\right]_{nx1}$$

Matriz ampliada del sistema:

$$M' = \begin{bmatrix} 1-k_{11}\Delta\mu & -k_{12}\Delta\mu & ... & -k_{1n}\Delta\mu & f_1 \\ -k_{21}\Delta\mu & 1-k_{22}\Delta\mu & ... & -k_{2n}\Delta\mu & f_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -k_{n1}\Delta\mu & -k_{n2}\Delta\mu & ... & 1-k_{nn}\Delta\mu & f_n \end{bmatrix} \equiv \left[\delta_{pq} - k_{pq}\Delta\mu \mid f_p\right]_{nx(n+1)}$$

O bien, las matrices del sistema traspuesto $\Phi^t M^t = F^t$:

$$M^t = \begin{bmatrix} 1-k_{11}\Delta\mu & -k_{21}\Delta\mu & ... & -k_{n1}\Delta\mu \\ -k_{12}\Delta\mu & 1-k_{22}\Delta\mu & ... & -k_{n2}\Delta\mu \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ -k_{1n}\Delta\mu & -k_{2n}\Delta\mu & ... & 1-k_{nn}\Delta\mu \end{bmatrix} \equiv \left[\delta_{qp} - k_{qp}\Delta\mu\right]_{nxn}$$

$$F^t = \left[f_1, ..., f_n\right] = \left[f_p\right]_{1xn}, \quad \Phi^t = \left[\varphi_1, ..., \varphi_n\right]_{1xn} \equiv \left[\varphi_p\right]_{nx1}$$

03. La alternativa de Fredholm

Consideremos una discusión del anterior sistema de ecuaciones lineales, que, escrito en forma matricial, es

$$M.\Phi = F$$

O bien, con las matrices traspuestas:

$$\Phi^t M^t = F^t$$

usando el Teorema de Rouché-Fröbenius:

“Si el rango de las matrices M y M’ es el mismo, entonces el sistema tiene solución, que será única si dicho rango coincide con el número de las incógnitas del sistema, y serán infinitas si el rango común es menor que dicho número. Si los rangos indicados no coinciden, el sistema no tiene solución”.

En nuestro caso se tiene que si la matriz M tiene determinante no nulo, su rango es n, igual al número de las incógnitas, $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ del sistema, y el rango de la matriz M' ampliada no puede ser mayor que n, pues solo tiene n filas, y tampoco puede ser menor que n, porque contiene a M, que, por hipótesis, tiene rango n. Luego, si la matriz M tiene no nulo el determinante, el sistema tiene solución única.

Si el determinante de M fuera nulo, su rango será $r < n$, por lo que la matriz ampliada M', obtenida añadiendo a M una columna más, la columna de los términos independientes del sistema, pudiera tener rango r' distinto de r, y el sistema no tendría solución. Sin embargo, si el sistema fuera homogéneo, esto es, si la matriz F de los términos independientes fuera nula, entonces la matriz ampliada M' con esta columna de ceros no variaría el rango de la matriz M y ambas matrices, M y M', tendrían el mismo rango (r=r'), con lo que el sistema homogéneo tendría solución, y al ser el rango común r=r' menor que el número de incógnitas, en este caso habrían soluciones distintas de la trivial.

Es decir, analizando el sistema homogéneo, se tiene:

O bien tiene solo la solución trivial, que es el caso rang(M)=n, o bien tiene alguna otra solución distinta de la trivial, que es el caso de rang(M)<n.

De otro modo, plantearíamos la siguiente alternativa:

O bien el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo tiene solución única, o bien el sistema de ecuaciones lineales homogéneo tiene al menos una solución no trivial.

04. Resolución del sistema equivalente

Nos preguntamos, llegados a esta situación, en qué condiciones tiene lugar la anterior alternativa. El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para la resolución del sistema de ecuaciones equivalente a la ecuación integral no homogénea.

Teorema:
La condición necesaria y suficiente para que el sistema de ecuaciones lineales

$$\varphi_p - \sum_{q=1}^{n} k_{pq}\varphi_q \Delta\mu = f_p, \quad p = 1,...,n \qquad [1]$$

(en forma matricial: $M.\Phi = F$)

tenga solución es que cualquier solución $z_1,...,z_n$ del correspondiente sistema homogéneo

$$\varphi_p - \sum_{q=1}^{n} k_{pq}\varphi_q \Delta\mu = 0, \quad p = 1,...,n$$

(en forma matricial: $M.\Phi = 0$)

verifique que $\sum_{p=1}^{n} f_p z_p = 0$ (en forma matricial: $M^t.\Phi = M.\Phi^t = 0$)

Demostración:

a) veamos que es una condición necesaria:

por hipótesis, es

$$z_p - \sum_{q=1}^{n} k_{pq} z_q \Delta\mu = 0, \quad p = 1,...,n$$

verificándose también para el sistema traspuesto

$$z_p - \sum_{q=1}^{n} k_{qp} z_q \Delta\mu = 0, \quad p = 1,...,n \qquad [2]$$

multiplicando cada ecuación de [1] por z_p y sumando, se tiene:

$$\sum_{p=1}^{n} \varphi_p z_p - \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} k_{pq}\varphi_q z_p \Delta\mu = \sum_{p=1}^{n} f_p z_p$$

que también por simetría puede expresarse en la forma

$$\sum_{p=1}^{n} \varphi_p z_p - \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} k_{qp}\varphi_p z_q \Delta\mu = \sum_{p=1}^{n} f_p z_p$$

quedando entonces:

$$\sum_{p=1}^{n} \varphi_p \left(z_p - \sum_{q=1}^{n} k_{qp} z_q \Delta\mu \right) = \sum_{p=1}^{n} f_p z_p$$

por la condición [2], se tiene, entonces:

$$\sum_{p=1}^{n} \varphi_p .0 = \sum_{p=1}^{n} f_p z_p \rightarrow \sum_{p=1}^{n} f_p z_p = 0$$

b) Veamos que es condición suficiente:

Si es r el rango de la matriz M de los coeficientes del sistema, es porque r es el orden del mayor menor no nulo D_r que se pueda formar en la matriz, siendo, pues, nulos todos los menores de orden mayor: $D_{r+1},...,D_n = |M|$.

Para que el sistema tenga solución es suficiente que sigan siendo nulos todos los menores de orden mayor que r que se puedan construir al añadir una última columna, la columna de los términos independientes del sistema, a la matriz M, o sea, en la matriz M' ampliada han de anularse todos los menores de orden mayor que r.

Si desarrollamos por los adjuntos de la última columna cualquier menor de orden r+1 en la matriz M' ampliada

$$M' = \begin{bmatrix} 1-k_{11}\Delta\mu & -k_{12}\Delta\mu & ... & -k_{1n}\Delta\mu & f_1 \\ -k_{21}\Delta\mu & 1-k_{22}\Delta\mu & ... & -k_{2n}\Delta\mu & f_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -k_{n1}\Delta\mu & -k_{n2}\Delta\mu & ... & 1-k_{nn}\Delta\mu & f_n \end{bmatrix}$$

se tiene:

$$D_{r+1} = \sum_{p=1}^{r+1} D_p f_p$$, donde es D_p el adjunto del término f_p.

Si llamamos z_k a los adjuntos D_k de los elementos f_k que se encuentran en el determinante D_{r+1}:

$$z_k = \begin{cases} D_k, & si\ f_k\ está\ en\ D_r \\ 0, & si\ f_k\ no\ está\ en\ D_r \end{cases}$$

tales números verifican el sistema homogéneo, pues son determinantes de orden r, rango de la matriz M, y además:

$$D_{r+1} = \sum_{p=1}^{n} z_p f_p$$

por lo cual si $\sum_{p=1}^{n} z_p f_p = 0$ los menores D_{r+1} de orden r+1 son nulos y la matriz ampliada M' tiene el mismo rango r que la matriz M de los coeficientes y el sistema tiene solución.

El sistema no homogéneo tiene, pues, solución si y solo si se verifica que para cualquier solución $(z_1,...,z_n)$ del sistema homogéneo es

$$\sum_{p=1}^{n} z_p f_p = 0$$

05. Los teoremas de Fredholm

El estudio del sistema lineal de ecuaciones equivalente nos permite aplicar la alternativa deducida del Teorema de Rouché-Fröbenius a la resolución de la integral de Fredholm no homogénea (2ª clase).

Teorema 1 (alternativa de Fredholm):
O bien la ecuación integral lineal no homogénea de 2ª especie

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu$$

tiene solución única para cualquier función *f(x)* (de una clase suficientemente amplia), o bien la ecuación homogénea correspondiente tiene por lo menos una solución distinta de la trivial.

Teorema 2 (primer caso de la alternativa):
Si la ecuación lineal no homogénea de 2ª especie

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x,\mu).\varphi(\mu).d\mu$$

tiene solución única, entonces también la ecuación traspuesta

$$\phi(x) = f^*(x) + \int_a^b k(\mu,x).\phi(\mu).d\mu$$

tiene solución única.

Teniendo ambas ecuaciones integrales homogéneas, la de la ecuación dada y la de su traspuesta, el mismo número de soluciones linealmente independientes.

Teorema 3 (segundo caso de la alternativa):
Si la ecuación homogénea correspondiente tiene solución no trivial z(x), entonces la ecuación integral lineal no homogénea tendrá solución si y solo si se verifica que

$$\int_b^a f(x)z(x)dx = 0$$

Bibliografía

Petrovski, I., "Lecciones de teoría de las ecuaciones integrales", Editorial Mir, Moscú, 1976.
Wikipedia, Erik Ivar Fredholm