Sobre las Fracciones Continuas

La representación de los números reales en forma decimal ofrece ciertos problemas cuando se trata de números decimales periódicos o de números irracionales, los cuales necesitan una secuencia infinita de dígitos. Las fracciones continuas permiten una representación de los números reales, tanto racionales como irracionales, de una forma elegante y precisa.

Históricamente se utilizan las fracciones continuas desde la antigüedad tanto para aproximar números irracionales como para resolver ecuaciones diofánticas (ecuaciones con coeficientes y soluciones enteras).

Aparecen en Europa en el siglo XVI, utilizándose en principio para la aproximación de raíces cuadradas de diferentes números. Adquirieron un amplio desarrollo en Francia e Inglaterra durante el siglo XVII, con los trabajos de Pierre de Fermat (1601-1665), de William Brouncker (1620-1684) y de John Wallis (1616-1703), habiendo sido utilizadas también en la práctica en la solución de diferentes problemas, como por ejemplo, en los trabajos sobre determinación de engranajes en maquinas realizados por Christian Huygens (1629-1695). El estudio de la fracciones continuas adquirió un espectacular desarrollo en los siglos XVIII y XIX, donde prácticamente fueron utilizadas por todos los grandes matemáticos de esa época.

Las fracciones continuas se estudian mediante el proceso de la división reiterada, de la determinación de divisores de los números involucrados, en particular del máximo común divisor de diferentes números. En las notas que siguen, comenzamos mediante una introducción en la que exponemos el Algoritmo de Euclides para la determinación del máximo común divisor (MCD) de varios números enteros.

0. Introducción: el algoritmo de Euclides

El llamado Algoritmo de Euclides es un procedimiento por el cual se obtiene el máximo común divisor de dos números enteros después de un número finito de pasos. Se basa en la proposición siguiente:

Teorema 1: El máximo común divisor de dos números enteros, a y b, $(a \geq b)$ es también el máximo común divisor de los enteros b y r, siendo r el resto de la división de a entre b.

Demostración:

Bastará probar que el conjunto de todos los divisores de a y de b coincide con el conjunto de todos los divisores de b y de r. Así:

- De ser $a = b.q + r$, todo divisor de b y de r divide también a a, por lo que es también divisor de a y de b.

- Por ser $a = b.q + r$, se tiene que $r = a - b.q$, por lo cual, todo divisor de a y de b, divide también a r, esto es, es divisor de b y de r.

En definitiva, ambos conjuntos de divisores son coincidentes.

El algoritmo consiste en ir realizando divisiones de a entre b, de b por el primer resto, r_0, de este por el segundo r_1, …., hasta llegar a una división, de r_{n-1} entre r_n, en la que aparezca nulo el resto r_{n+1}. El último cociente, r_n es el máximo común divisor de los enteros dados a y b.

El algoritmo:

La aplicación del teorema 1 consiste, en definitiva, en determinar la división de cada cociente por cada resto consecutivo, hasta encontrar un divisor (que ocurrirá cuando aparezca un resto cero). Este divisor, o último cociente del proceso, divide por consiguiente a cada uno de los restos anteriores y, consiguientemente, a los enteros a y b de partida.

$$\begin{array}{ccccc} a & = & b.q_0 & + & r_0 \\ b & = & r_0.q_1 & + & r_1 \\ r_0 & = & r_1.q_2 & + & r_2 \\ r_1 & = & r_2.q_3 & + & r_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n-2} & = & r_{n-1}.q_n & + & r_n \\ r_{n-1} & = & r_n.q_{n+1} & + & 0 \end{array}$$

Observamos, pues, que el último resto no nulo divide a r_{n-1}, y, por reiteración, a r_{n-1}, r_{n-1}, ... a, b. Además, es el mayor de todos los divisores, pues cualquier otro entero m> r_{n-1} no dividirá a los restos indicados.

Para calcular el MCD de n enteros, a_1, a_2, ..., a_n, bastará aplicar la propiedad asociativa que tiene el MCD, es decir, determinamos:

$$\begin{array}{ll} d_2 = & MCD(a_1, a_2) \\ d_3 = & MCD(d_2, a_3) \\ d_4 = & MCD(d_3, a_4) \\ \ldots & \ldots \\ d_n = & MCD(d_{n-1}, a_n) \end{array}$$

Y es d_n el máximo común divisor de todos los n enteros.

Ejemplo:

Calculemos el máximo común divisor de los enteros siguientes, usando el algoritmo de Euclides: 1) de 321 y 150, 2) de 735, 330, 150, 3) 15, 81, 345 y 126.

1) Dividimos:

$$\left.\begin{array}{r} 321 = 150.2 + 21 \\ 150 = 21.7 + 3 \\ 21 = 3.7 \end{array}\right\} \rightarrow MCD(321,150) = 3$$

2) Dividimos para hallar primero el MCD(735,330):

$$\left.\begin{array}{r} 735 = 150.4 + 135 \\ 150 = 135.1 + 15 \\ 135 = 15.9 \end{array}\right\} \rightarrow MCD(735,330) = 15$$

Hallamos ahora el MCD(15,150). Dividimos:

$$150 = 15.10 \rightarrow MCD(150,15) = 15$$

En definitiva: $MCD(735,330,150) = 15$

3) Dividimos:

$$\left.\begin{array}{r} 81 = 15.5 + 6 \\ 15 = 6.2 + 3 \\ 6 = 3.2 \end{array}\right\} \rightarrow MCD(81,15) = 3$$

$$345 = 3.115 \rightarrow MCD(3,345) = 3$$

$$126 = 3.42 \rightarrow MCD(3,126) = 3$$

Por tanto: $MCD(15,81,345,126) = 3$

1. Fracciones Continuas

Definición 1: Una fracción continua finita es una expresión de la forma

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \cdots \atop \qquad \cdots\cdots\ \cdots \atop \qquad\qquad a_{n-1} + \cfrac{b_{n-1}}{b_n}}}}$$

donde los a_i, b_i son números reales o complejos.

Definición 2: Una fracción continua simple finita es una fracción continua en la que es $b_i = 1, \forall i$, es decir:

$$\left[a_1, a_2, ..., a_n\right] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

donde los $a_i \in Z^+, \forall i > 0$, con $a_1 \in R$, son los *términos* de la fracción continua simple finita.

Si el número de términos es infinito, la fracción continua simple $\left[a_1, a_2, ..., a_k, ...\right]$ se denomina *fracción continua simple infinita.*

Definición 3: Se denominan *convergentes* o *reducidos* de una fracción continua simple $\left[a_1, a_2, ..., a_k, ...\right]$ a las fracciones continuas simples finitas

$$c_1 = \left[a_1\right] = a_1$$

$$c_2 = \left[a_1, a_2\right] = a_1 + \frac{1}{a_2}$$

$$c_3 = \left[a_1, a_2, a_3\right] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$$

....

....

$$c_k = \left[a_1, a_2, ..., a_k\right] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots \cfrac{}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

2. Fracciones Continuas y números reales

Teorema 2: Toda fracción continua simple finita representa un número racional, y, recíprocamente, todo número racional representa a una fracción continua simple finita.

Demostración:

- Veamos que para todo número racional, $\frac{p}{q} \in Q$, existe una fracción continua simple finita, $\left[a_1, ..., a_n\right]$, que lo representa:

$$p = a_o.q + r_o \rightarrow \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q}, \quad con\; a_0 < \frac{p}{q} \;\wedge\; 0 < r_0 < q$$

Análogamente:

$$\frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0}, \quad con\; a_1 < \frac{q}{r_0} \;\wedge\; 0 < r_1 < r_0$$

$$\frac{r_0}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_2}, \quad con\; a_2 < \frac{r_0}{r_1} \;\wedge\; 0 < r_2 < r_1$$

… …
… …

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n + \frac{r_n}{r_{n-1}}, \quad con\; a_n < \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \;\wedge\; 0 < r_n < r_{n-1}$$

En definitiva aparece una sucesión decreciente de enteros positivos menores que el entero q:

$$\{r\} = \{r_0, r_1, ..., r_{n-1}, r_n\}, \qquad r_0 > r_1 > ... > r_{n-1} > r_n$$

y como solamente existe un número finito, z_q, de enteros menores que q, el proceso ha de terminar tras un número finito de pasos, por lo que resulta:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r_0}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}} = ...$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2} \cdots \atop {\cdots\;\cdots\;\cdots \atop a_{n-1} + \cfrac{1}{c_n}}}}} = [a_1, a_2, ..., a_n]$$

- Toda fracción continua simple finita es una suma y cociente de fracciones, y como sabemos que toda fracción de números enteros es un número racional, y que ambas operaciones, suma y cociente, son internas en el cuerpo Q de los números racionales, el resultado de todas las operaciones que se indican en la fracción continua simple finita es una fracción, esto es, un número racional.

Corolario: Los convergentes, $c_1, c_2, ..., c_n$, de una fracción continua simple finita, al ser también fracciones simples finitas, representan a números racionales, $p_1/q_1, p_2/q_2, ..., p_n/q_n$.

Del anterior teorema deducimos, en definitiva, que todo número racional está representado por una fracción continua simple finita, y, recíprocamente, toda fracción continua simple finita representa un número racional. La pregunta que podríamos hacernos es si la fracción continua que representa a un determinado número racional es única, o, por el contrario, si un número racional puede estar representado por diferentes fracciones continuas simples. Esto lo resolvemos mediante el siguiente teorema de unicidad.

Teorema 4: Todo número racional está representado por una única fracción continua simple finita.

Demostración:

Supongamos que las dos fracciones simples finitas $[a_1, a_2, ..., a_k]$ y $[b_1, b_2, ..., b_m]$ representan el mismo número racional, esto es:

$$[a_1, a_2, ..., a_k] = [b_1, b_2, ..., b_m], \text{ donde } a_k > 1,\ b_m > 1$$

Veamos que, entonces, ambas fracciones continuas son la misma, es decir, que

$$a_i = b_i,\ i = 1,2,...,\ \wedge\ k = m$$

Pues llamando $x_i = [a_i, a_{i+1}, ..., a_k]$, $y_i = [b_i, b_{i+1}, ..., b_m]$, se tiene que

$$x_i = [a_i, a_{i+1}, ..., a_k] = a_i + \frac{1}{[a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_k]} = a_i + \frac{1}{x_{i+1}} \rightarrow$$
$$\rightarrow x_i > a_i \wedge x_i > 1,\ i = 1,...,n-1,\ con\ x_k = a_k$$

$$y_i = [b_i, b_{i+1}, ..., b_m] = b_i + \frac{1}{[b_{i+1}, b_{i+2}, ..., b_m]} = b_i + \frac{1}{y_{i+1}} \rightarrow$$
$$\rightarrow y_i > y_i \wedge y_i > 1,\ i = 1,...,n-1,\ con\ y_k = y_m$$

Como las fracciones continuas de partida: $x_0 = [a_0, a_1, ..., a_k]$, $y_0 = [b_0, b_1, ..., b_m]$ coinciden, también han de coincidir sus partes enteras:

$$x_0 = y_0 \rightarrow [a_0, a_1, ..., a_k] = [b_0, b_1, ..., b_m] \rightarrow a_0 = b_0 \wedge a_0 + \frac{1}{x_1} = b_0 + \frac{1}{y_1} \rightarrow x_1 = y_1 \rightarrow$$
$$\rightarrow [a_1, a_2, ..., a_k] = [b_1, b_2, ..., b_m] \rightarrow a_1 = b_1$$

y reiterando el proceso, encontramos que $a_2 = b_2, ..., a_k = b_m$

lo que prueba la unicidad indicada en el enunciado del teorema.

Teorema 5: La fracción continua simple que representa a un número irracional es infinita.

Demostración:

Sea x_0 irracional y llamemos $M(x_0)$ al mayor entero menor que x_0. Se tiene que

$$x_0 = M(x_0) + \frac{1}{x_1} \text{ con } 0 < \frac{1}{x_1} < 1$$

Veamos que x_1 también ha de ser irracional:

Si $x_1 \in Q \rightarrow \exists [a_0, a_1, ..., a_k] / x_1 = [a_1, a_2, ..., a_k] \rightarrow x_0 = M(x_0) + \dfrac{1}{[a_1, a_2, ..., a_k]}$

Pero esto indicaría que x_0 está representado por una fracción continua simple finita:

$x_0 = [M(x_0), a_1, a_2, ..., a_k]$ y por tanto ha de ser racional, en contradicción con la hipótesis de que se trata de un número irracional.

Luego, $x_1 \notin Q \rightarrow x_1$ irracional.

Repitiendo reiteradamente el razonamiento, encontramos que

$$x_1 = M(x_1) + \frac{1}{x_2} \text{ con } 0 < \frac{1}{x_2} < 1 \rightarrow x_2 \notin Q$$

... ...

$$x_h = M(x_h) + \frac{1}{x_{h+1}} \text{ con } 0 < \frac{1}{x_{h+1}} < 1 \rightarrow x_{h+1} \notin Q$$

... ...

Por tanto, al tratarse de una iteración infinita:

$$x_0 = [M(x_0), M(x_1), ..., M(x_h), ...]$$

que es una fracción continua simple infinita.

Ejemplo:

Encontremos la fracción continua simple infinita que representa al número irracional $\sqrt{2}$:

Expresemos $\sqrt{2}$ de la forma $\sqrt{2} = M(\sqrt{2}) + \dfrac{1}{x_1}$. Para ello podemos utilizar el hecho de que $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$, ya que:

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \rightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

Repitiendo esto reiteradamente:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}=[1,2,2,\dots,2,\dots]$$

luego $\sqrt{2}$ queda representado por esta fracción continua simple infinita:

$$\sqrt{2}=[1,2,2,\dots,2,\dots]$$

Ejemplo:

Encontrar las fracciones continuas que representan a los siguientes números reales

$$\frac{59}{15},\quad {}^{35}\!/_{23},\quad -\frac{81}{54}$$

1) ${}^{59}\!/_{15}$:

$$\left.\begin{array}{r}59=15.3+14\\ 15=14.1+1\\ 14=14.1\end{array}\right\}\rightarrow\frac{59}{15}=3+\frac{14}{15}=3+\cfrac{1}{\cfrac{15}{14}}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14}}=[3,1,14]$$

2) $\frac{35}{23}$:

$$\left.\begin{array}{r}35=23.1+12\\ 23=12.1+11\\ 12=11.1+1\\ 11=11.1\end{array}\right\}\rightarrow\frac{35}{23}=1+\frac{12}{23}=1+\cfrac{1}{\cfrac{23}{12}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{11}{12}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{11}}}=[1,1,1,11]$$

3) $-\frac{81}{54}$:

$$\left.\begin{array}{r}-81=25.(-4)+19\\ 25=19.1+6\\ 19=6.3+1\\ 6=6.1\end{array}\right\}\rightarrow-\frac{81}{25}=-4+\frac{19}{25}=-4+\cfrac{1}{\cfrac{25}{19}}=-4+\cfrac{1}{1+\cfrac{6}{19}}=-4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{19}{6}}}=$$

$$=-4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6}}}=[-4,1,3,6]$$

3. Los convergentes de una fracción continua simple

Los convergentes o reducidos de una fracción continua simple dada, ya sea finita o infinita, son siempre fracciones continuas simples finitas, por lo que cada uno de ellos representa a un número racional. Así, si consideramos la fracción continua simple dada por $[a_1, a_2, ..., a_n, ...]$, sus convergentes son

$$c_1 = [a_1] = p_1/q_1, \; c_2 = [a_1, a_2] = p_2/q_2, ..., c_n = [a_1, a_2, ..., a_n] = p_n/q_n, ...$$

Para poder calcular el número racional p_n/q_n correspondiente a la fracción continua simple finita $[a_1, a_2, ..., a_n]$ hemos de establecer alguna relación entre el numerador y denominador del número racional y los términos de la fracción continua simple finita que lo representa. Veamos, para ello, dos teoremas que establecen esta relación.

Teorema 6:

Dada la fracción continua simple $[a_1, a_2, ..., a_n, ...]$, cuyos convergentes podemos representar por $c_1 = [a_1] = p_1/q_1$, $c_2 = [a_1, a_2] = p_2/q_2, ..., c_n = [a_1, a_2, ..., a_n] = p_1/q_1, ...$ se verifica:

a) $p_1 = a_1, \quad q_1 = 1$

b) $p_2 = a_1 a_2 + 1, \quad q_2 = a_2$

c) Para $n \geq 3, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$

Demostración:

a) $\dfrac{p_1}{q_1} = c_1 = [a_1] = a_1 \to p_1 = a_1, \quad q_1 = 1$

b) $\dfrac{p_2}{q_2} = c_2 = [a_1, a_2] = a_1 + \dfrac{1}{a_2} = \dfrac{a_1 a_2 + 1}{a_2} \to p_2 = a_1 a_2 + 1, \quad q_2 = a_2$

c) Para $n \geq 3$ empleamos inducción:

- Para n=3 se verifica:

$$\frac{p_3}{p_2} = c_3 = [a_1, a_2, a_3] = \left[a_1, a_2 + \frac{1}{a_3}\right] = \left[a_1, \frac{a_2 a_3 + 1}{a_3}\right] = a_1 + \frac{1}{\dfrac{a_2 a_3 + 1}{a_3}} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1} = \frac{a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1}{a_3 a_2 + 1} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} \to \begin{cases} p_3 = a_3 p_2 + p_1 \\ q_3 = a_3 q_2 + q_1 \end{cases}$$

- Supongamos ahora ciertas las expresiones para $n = k$:

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

y veamos que, entonces, han de ser también ciertas para $n = k+1$:

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = c_{k+1} = [a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}] = \left[a_1, a_2, ..., a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right] = \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right)p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right)q_{k-1} + q_{k-2}} =$$

$$= \frac{(a_k a_{k+1})p_{k-1} + a_{k+1}p_{k-2} + p_{k-1}}{(a_k a_{k+1})q_{k-1} + a_{k+1}q_{k-2} + q_{k-1}} = \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} = \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}} \to$$

$$\to \; p_{k+1} = a_{k+1}p_k + p_{k-1}, \quad q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}$$

Teorema 7:

Dada la fracción continua simple $[a_1, a_2, ..., a_n, ...]$, cuyos convergentes podemos representar por $c_1 = [a_1] = p_1/q_1$, $c_2 = [a_1, a_2] = p_2/q_2$, $..., c_n = [a_1, a_2, ..., a_n] = p_1/q_1$, ... se verifica:

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n$$

o bien:

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}$$

Demostración:

Empleamos inducción,

- para n=2: $p_2 q_1 - p_1 q_2 = (a_1 a_2 + 1).1 - a_1 a_2 = 1 = (-1)^2$

- para n=3:
$$\begin{aligned} p_3 q_2 - p_2 q_3 &= (a_3 p_2 + p_1).a_2 - (a_1 a_2 + 1).(a_3 q_2 + q_1) = \\ &= (a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1)a_2 - (a_1 a_2 + 1)(a_3 a_2 + 1) = \\ &= a_1 a_2^2 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_2 - a_1 a_2^2 a_3 - a_2 a_3 - a_1 a_2 - 1 = -1 = (-1)^3 \end{aligned}$$

- Supongamos ahora cierta la expresión para $n = k$:

$$p_k q_{k-1} - qp_{k-1} = (-1)^k$$

y veamos que, entonces, ha de ser también cierta para $n = k+1$:

$$p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1} = (a_{k+1}p_k + p_{k-1}).q_k - p_k.(a_{k+1}q_k + q_{k-1}) = a_{k+1}p_k q_k + p_{k-1}q_k -$$
$$- p_k a_{k+1} q_k - p_k q_{k-1} = -(p_k q_{k-1} - p_{k-1}q_{k-1}) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$$

En definitiva, se verifica, para todo entero positivo n: $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n$, y la segunda expresión es inmediata, pues dividiendo por $q_n q_{n-1}$:

$$\frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} \rightarrow \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} \rightarrow c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}$$

Ejemplo:

Encontrar el número racional que corresponde a cada una de las siguientes fracciones continuas simples

a) $[-3,1,2]$ b) $[3,1,5,2]$

a) Tabulemos los valores de los términos, y de los numeradores y denominadores de los convergentes, usando el teorema 6:

k	1	2	3
a_k	-3	1	2
p_k	-3	-2	-7
q_k	1	1	3
c_k	-3	-2	-7/3

Por tanto: $[-3,1,2] = -7/3$

b) Tabulando:

k	1	2	3	4
a_k	3	1	5	2
p_k	3	4	23	50
q_k	1	1	6	13
c_k	3	4	23/6	50/13

Por tanto: $[3,1,5,2] = 50/13$

4. Aplicación de las fracciones continuas a la resolución de ecuaciones diofánticas lineales

Efectivamente, usando el enunciado del teorema 7 es posible utilizar las fracciones continuas para encontrar una solución particular de una ecuación diofántica lineal de dos variables:

$ax + by = c$, en donde $MCD(a,b)=1$

bastará hallar la fracción continua cuyo convergente n-simo es a/b, y a continuación, encontrar el convergente $n-1$-esimo para poder aplicar la fórmula del teorema 7:

$$c_n = \frac{a}{b} = \frac{p_n}{q_n}$$

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$$

$$p_n q_{n-1}(-1)^n + p_{n-1} q_n (-1)^{n+1} = 1$$

multiplicando por c, termino independiente de la ecuación diofantica, se tiene:

$$p_n q_{n-1}(-1)^n c + p_{n-1} q_n (-1)^{n+1} c = c$$

o bien

$$a.\left(q_{n-1}(-1)^n c\right) + b.\left(p_{n-1}(-1)^{n+1} c\right) = c$$

por tanto, una solución particular de la ecuación sería:

$$x_0 = c.q_{n-1}.(-1)^n, \qquad y_0 = c.p_{n-1}.(-1)^{n+1}$$

Veamos algunos ejemplos sencillos de determinación de una solución particular de esta forma:

a) Sea la ecuación diofántica lineal $3x+2y=7$

Convergente n-simo: $p_n / q_n = 3/2$, que tiene por fracción continua simple $[1,2]$

Luego el convergente n-1-simo es $p_{n-1} / q_{n-1} = [1] = 1$, de donde $p_{n-1} = 1, q_{n-1} = 1$

Y una solución particular será: $x_0 = 7.1.(-1)^2 = 7, \quad y_0 = 7.1.(-1)^3 = -7$

Es decir $(x_0, y_0) = (7,-7)$, que obviamente verifica la ecuación diofántica.

b) Sea la ecuación diofántica lineal $13x+5y=3$

Convergente n-simo: $p_n / q_n = 13/5$, cuya fracción continua simple es $[2,1,1,2]$
Hallamos el convergente anterior, n-1-simo, para lo cual tabulamos:

k	1	2	3	4
a_k	2	1	1	2
p_k	2	3	5	13
q_k	1	1	2	5
c_k	2	3	5/2	13/5

Por tanto, $p_{n-1} / q_{n-1} = 5/2$, con lo que ya podemos escribir la solución particular:

$$x_0 = 3.2.(-1)^4 = 6, \quad y_0 = 3.5.(-1)^5 = -15$$

Es decir $(x_0, y_0) = (6,-15)$, que verifica la ecuación.

c) Sea la ecuación diofántica lineal $323x+149y=186$

Convergente n-simo: $p_n / q_n = 323/149$, cuya fracción continua simple es $[2,5,1,24]$
Hallamos el convergente anterior, n-1-simo, para lo cual tabulamos:

k	1	2	3	4
a_k	2	5	1	24
p_k	2	11	13	323
q_k	1	5	6	149
c_k	2	11/5	13/6	323/149

Por tanto, $p_{n-1} / q_{n-1} = 13/6$, con lo que ya podemos escribir la solución particular:

$$x_0 = 186.6.(-1)^4 = 1116, \quad y_0 = 186.13.(-1)^5 = -2418$$

Que podemos comprobar que verifica la ecuación diofántica lineal planteada:

$$323.1116+149(-2418)=186$$

5. Bibliografía

Jones, Burton W.; "*Teoría de los Números*", Editorial Trillas, México, 1969
Niven, I.; Zuckerman, H.: "Introducción a la Teoría de los Números", Editorial Limusa-Wiley, Mexico, 1976.
Oliver Pellicer, J.: "Estructura del álgebra multilineal", Editada por la Universidad de Valencia, 1996.
Pettofrezzo, A. J.; Byrkit, D.R.: "Introducción a la Teoría de los Números", Editorial Prentice-Hall - España, 1972.
Samuel, P.: "Teoría Algebráica de Números", Editorial Omega, Barcelona, 1972.
Vinogradov,I.: "Fundamentos de la Teoría de Números". Edit Mir, Moscú, 1977.