

LAS FÓRMULAS DE LA TRIGONOMETRIA ESFERICA

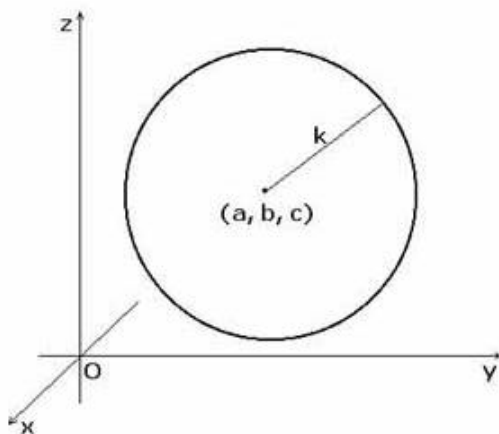
- 1. LA ESFERA. ELEMENTOS DE LA ESFERA.**
- 2. FORMULAS DE LOS SENOS.**
- 3. FORMULAS DE LOS COSENOS.**
- 4. FORMULAS DE BESSEL.**
- 5. FORMULAS DE LAS COTANGENTES.**
- 6. FORMULAS DE BORDA.**
- 7. ANALOGIAS DE DELAMBRE.**
- 8. ANALOGIAS DE NEPER.**

---00000---

1. LA ESFERA. ELEMENTOS DE LA ESFERA:**La esfera:**

Una esfera E , de centro en el punto (a,b,c) y radio k , es el dominio de R^3 definido por

$$E = \{(x, y, z) \in R^3 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq k^2\}$$

**Superficie de la esfera:**

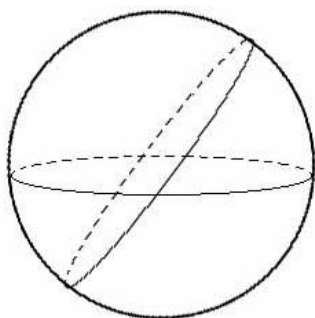
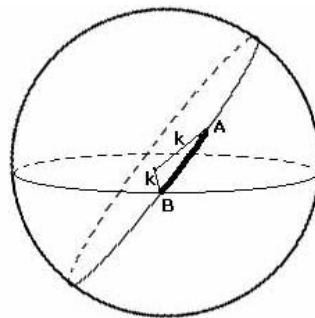
Se llama *superficie de una esfera* de centro en el punto (a,b,c) y radio k , al dominio de R^3 definido por

$$E = \{(x, y, z) \in R^3 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = k^2\}$$

Círculos máximos:

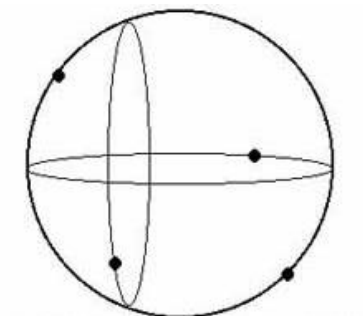
Se llaman *círculos máximos* de una esfera de radio k a las circunferencias de radio k . Los *círculos máximos* están contenidos en la superficie de la esfera.

Se llama *ángulo barrido sobre un círculo máximo* comprendido entre dos punto A y B del mismo al ángulo AOB , siendo O el centro matemático de la esfera.

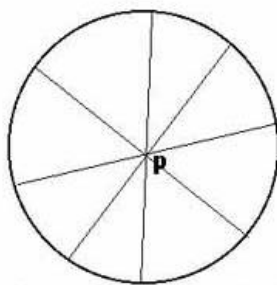
**círculos máximos****ángulo sobre un círculo máximo**

Propiedades elementales:

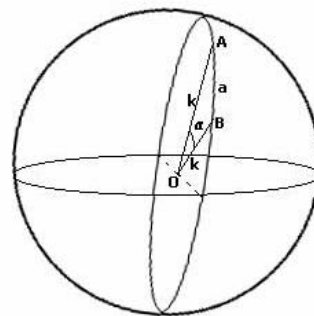
- a) 4 puntos del espacio euclídeo R^3 definen una esfera, y solo una.
- b) Por un punto P de la superficie de una esfera pasan infinitos círculos máximos. Por dos puntos P y Q de la superficie de una esfera pasa un círculo máximo y solo uno.
- c) Si la longitud de arco desde A a B es a y el radio de la esfera es k , el ángulo sobre el círculo máximo es $\alpha = a/k$.



**4 puntos no coplanarios
definen una esfera**



**Por cualquier punto P
de la superficie pasan
infinitos círculos máximos**



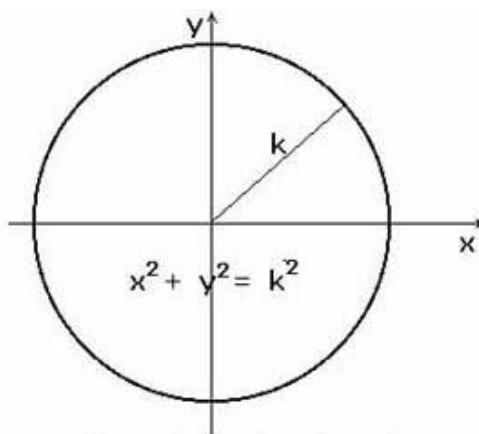
$$\alpha = a/k$$

Volumen y superficie de la esfera:

El volumen de una esfera es el volumen de revolución engendrado por un recinto circular que gira alrededor del diámetro.

La superficie es la superficie lateral de un cuerpo de revolución.

Si consideramos a la esfera centrada en el origen, se tiene:



considerando una circunferencia
en el plano xy podemos determinar
el volumen y la superficie de la esfera.

Para el volumen: $V = 2\pi \int_0^k y^2 dx$, Para la superficie: $S = 4\pi \int_0^k y \sqrt{1+y'^2} dx$

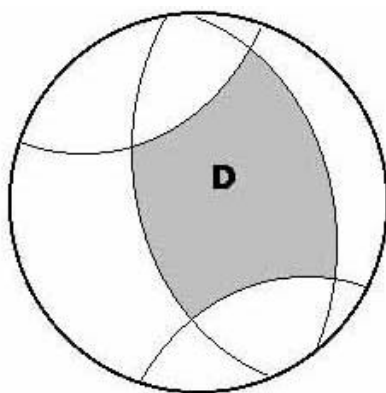
Cálculos:

$$V = 2p \int_0^k y^2 \cdot dx = 2p \int_0^k (k^2 - x^2) \cdot dx = \frac{4}{3} p \cdot k^3$$

$$S = 4p \int_0^k y \cdot \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = 4p \int_0^k y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{y}\right)^2} \cdot dx = 4p \int_0^k y \cdot \frac{k}{y} \cdot dx = 4p \cdot k^2$$

Dominio sobre la superficie esférica:

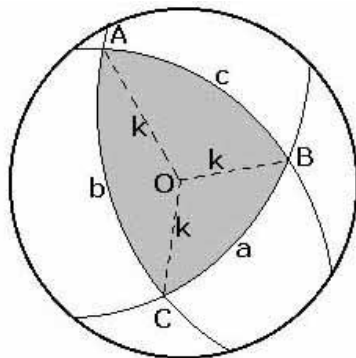
Un dominio de superficie esférica es un recinto o área sobre la superficie de la esfera limitado por curvas contenidas en dicha superficie.



Dominio sobre la superficie esferica

Triángulo esférico:

Un triángulo esférico de vértices A, B y C, es el dominio de superficie esférica limitado por tres círculos máximos que se cortan en A, B y C.



Un triángulo esférico es el dominio limitado por tres círculos máximos.

Los lados, a, b y c, son respectivamente, los arcos de círculo máximo opuestos a A, B y C.

En todo triángulo esférico de lados a, b y c, y de vértices A, B y C, sobre una superficie esférica de radio k, se pueden distinguir 6 ángulos:

A, B y C: son los ángulos diedros que definen los círculos máximos que se cortan en dichos

puntos.

a/k , b/k , c/k son los ángulos centrales (con vértice en el centro de la esfera) barridos por cada uno de los lados a , b y c .

Las razones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de cada uno de estos ángulos son también el seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante del ángulo plano de igual amplitud.

Esto quiere decir que son válidas las fórmulas de la trigonometría plana para cada ángulo, esto es:

Relaciones elementales:

$$\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1, \quad \operatorname{tg}^2 a = \frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a}, \quad \operatorname{sen}^2 a = \frac{\operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}, \quad \cos^2 a = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

Ángulo suma/diferencia:

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tga} \pm \operatorname{tgb}}{1 \mp \operatorname{tga} \operatorname{tgb}}$$

Ángulo doble:

$$\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A, \quad \cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A, \quad \operatorname{tg} 2A = \frac{2 \operatorname{tg}^2 A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}$$

Ángulo mitad:

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}, \quad \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}, \quad \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$$

Factorización de suma/diferencia de senos y de suma/diferencia de cosenos:

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

Triángulo polar:

Se llama *triángulo polar* relativo al triángulo esférico de vértices A,B y C, y lados a, b y c, al triángulo de vértices A', B' y C', y lados a', b' y c', definido por:

$$A' = 180 - a/k, \quad B' = 180 - b/k, \quad C' = 180 - c/k$$

$$a'/k = 180 - A, \quad b'/k = 180 - B, \quad c'/k = 180 - C$$

Esfera trigonométrica:

Llamaremos *esfera trigonométrica* a una esfera de radio unidad. Los ángulos centrales coinciden en esta esfera con los lados del triángulo.

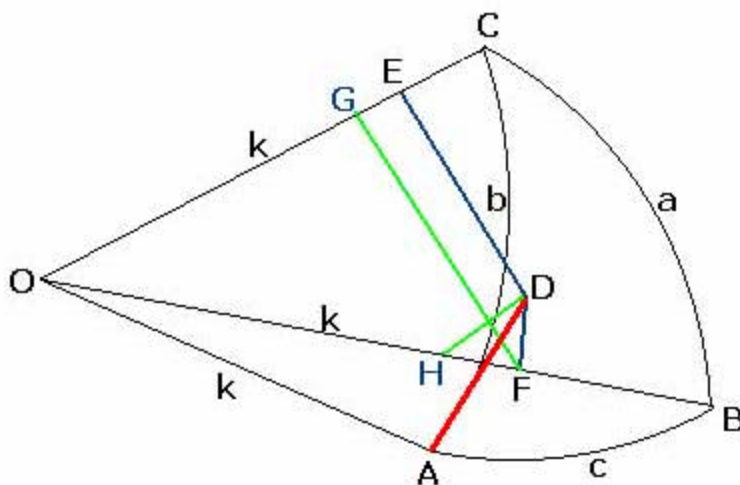
2. FORMULAS DE LOS SENOS:

Sea el triángulo esférico ABC sobre una esfera de radio k y centro en el punto $O(0,0,0)$.

Tracemos la normal AD al plano OBC. Por el punto D tracemos ahora la normal DF a la recta OB y la normal DE a la recta OC.

La paralela por F a DE corta a OC en el punto G y la paralela a OC por D corta a OB en el punto H.

Analicemos los triángulos planos que se forman al efectuar el trazado de las anteriores rectas al objeto de obtener una relación entre los senos de los ángulos que aparecen en el triángulo esférico.



Si consideramos el triángulo rectángulo plano AFD y también que el ángulo de vértice en F coincide con el ángulo B del triángulo esférico se tiene:

$$AD = AF \cdot \text{sen } B = AO \cdot \text{sen } c / k \cdot \text{sen } B$$

Análogamente, podemos considerar el triángulo plano AED y que el ángulo de vértice en E coincide con el ángulo C del triángulo esférico:

$$AD = AE \cdot \text{sen } C = AO \cdot \text{sen } b / k \cdot \text{sen } C$$

al identificar:

$$AO \cdot \text{sen } c / k \cdot \text{sen } B = AO \cdot \text{sen } b / k \cdot \text{sen } C$$

o sea:

$$\frac{\text{sen } b / k}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } c / k}{\text{sen } C}$$

Haciendo lo mismo con los otros vértices B y C (normales desde B y desde C), se tienen las *formulas de los senos*:

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{a}{k}}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} \frac{b}{k}}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} \frac{c}{k}}{\operatorname{sen} C}$$

que, si se trata de la esfera trigonométrica ($k = 1$) se puede escribir:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

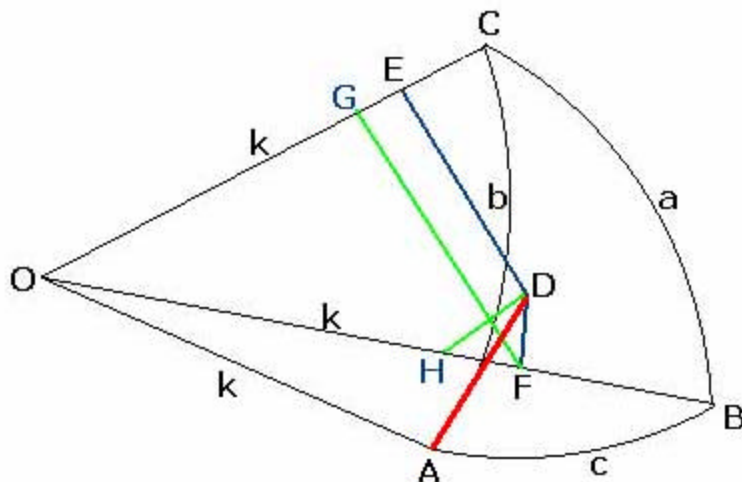
Fórmulas que guardan una cierta analogía con las fórmulas del mismo nombre de la trigonometría plana.

En definitiva:

En un triángulo esférico se verifica siempre que el ángulo central que barre cada uno de los lados es proporcional al seno del ángulo diedro opuesto.

3. FORMULAS DE LOS COSENOS:

Para deducir ciertas relaciones básicas entre los cosenos de los ángulos del triángulo esférico, volvemos a utilizar la figura del apartado anterior.



Podemos partir de la relación:

$$OE = OG + GE$$

obtenemos la expresión de cada uno de estos tres términos:

Si consideramos el triángulo plano ADE, vemos que está situado en un plano perpendicular al segmento OC, por lo que el lado AE es perpendicular a OC. Se verifica, entonces, que

$$OE = OA \cdot \cos b / k = k \cdot \cos b / k$$

Análogamente, se obtienen:

$$OG = OF \cdot \cos a / k = k \cdot \cos c / k \cdot \cos a / k$$

$$GE = FD \cdot \sin a / k = AF \cdot \cos B \cdot \sin a / k = k \cdot \sin c / k \cdot \cos B \cdot \sin a / k$$

Por tanto, se verifica que:

$$k \cdot \cos b / k = k \cdot \cos c / k \cdot \cos a / k + k \cdot \sin c / k \cdot \cos B \cdot \sin a / k$$

es decir:

$$\cos b / k = \cos c / k \cdot \cos a / k + \sin c / k \cdot \cos B \cdot \sin a / k$$

Análogamente se obtienen, proyectando los otros dos vértices del triángulo esférico, fórmulas análogas.

Se tiene, en definitiva, el sistema de fórmulas conocido como las *formulas de los cosenos*:

$$\cos a / k = \cos b / k \cdot \cos c / k + \sin b / k \cdot \sin c / k \cdot \cos A$$

$$\cos b / k = \cos c / k \cdot \cos a / k + \sin c / k \cdot \sin a / k \cdot \cos B$$

$$\cos c / k = \cos a / k \cdot \cos b / k + \sin a / k \cdot \sin b / k \cdot \cos C$$

O sea:

En un triángulo esférico, el coseno del ángulo central barrido por un lado es igual al producto de los cosenos de los ángulos barridos por los otros dos lados más el producto de los senos por el coseno del ángulo diedro opuesto.

Si se trata de la esfera trigonométrica, se tiene:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$$

4. FORMULAS DE BESSEL:

Desde las fórmulas de los cosenos, obtenidas en la sección anterior, se pueden obtener de inmediato un conjunto de varias fórmulas conocidas como "relaciones del seno por el coseno" o también denominadas *Fórmulas de Bessel*. Fueron deducidas por primera vez por el gran matemático Friedrich Wilhelm Bessel (Wesfalia, Alemania, 1784-Kaliningrado, Rusia, 1846).

$$\begin{aligned}\cos a / k &= \cos b / k \cdot \cos c / k + \sin b / k \cdot \sin c / k \cdot \cos A \\ \cos b / k &= \cos c / k \cdot \cos a / k + \sin c / k \cdot \sin a / k \cdot \cos B \\ \cos c / k &= \cos a / k \cdot \cos b / k + \sin a / k \cdot \sin b / k \cdot \cos C\end{aligned}$$

Si en las fórmulas del coseno, sustituimos alguno de los cosenos despejados, por el ejemplo el que figura en la tercera relación, en su expresión en el primer sumando de alguna de las otras dos relaciones, se obtiene una fórmula para el producto de un seno por un coseno:

Así, por ejemplo, sustituimos en la segunda formula el $\cos c / k$, que figura despejado en la tercera:

$$\begin{aligned}\sin c / k \cdot \sin a / k \cdot \cos B &= \cos b / k - \cos c / k \cdot \cos a / k = \\ &= \cos b / k - \cos a / k \cdot (\cos a / k \cdot \cos b / k + \sin a / k \cdot \sin b / k \cdot \cos C) = \\ &= \cos b / k - \cos^2 a / k \cdot \cos b / k - \cos a / k \cdot \sin a / k \cdot \sin b / k \cdot \cos C = \\ &= \cos b / k \cdot \sin^2 a / k - \cos a / k \cdot \sin a / k \cdot \sin b / k \cdot \cos C\end{aligned}$$

Dividiendo toda la expresión por $\sin a / k$:

$$\sin c / k \cdot \cos B = \cos b / k \cdot \sin a / k - \cos a / k \cdot \sin b / k \cdot \cos C$$

permutando las letras se obtiene todo el conjunto de las fórmulas:

$$\begin{aligned}\sin c / k \cdot \cos B &= \cos b / k \cdot \sin a / k - \cos a / k \cdot \sin b / k \cdot \cos C \\ \sin c / k \cdot \cos A &= \cos a / k \cdot \sin b / k - \cos b / k \cdot \sin a / k \cdot \cos C \\ \sin b / k \cdot \cos A &= \cos a / k \cdot \sin c / k - \cos c / k \cdot \sin a / k \cdot \cos B \\ \sin b / k \cdot \cos C &= \cos c / k \cdot \sin a / k - \cos a / k \cdot \sin c / k \cdot \cos B \\ \sin a / k \cdot \cos B &= \cos b / k \cdot \sin c / k - \cos c / k \cdot \sin b / k \cdot \cos A \\ \sin a / k \cdot \cos C &= \cos c / k \cdot \sin b / k - \cos b / k \cdot \sin c / k \cdot \cos A\end{aligned}$$

El conjunto de las fórmulas de Bessel puede escribirse, para la esfera de radio unidad, esto es, la esfera trigonométrica, de la forma:

$$\begin{aligned}\sin c \cdot \cos B &= \cos b \cdot \sin a - \cos a \cdot \sin b \cdot \cos C \\ \sin c \cdot \cos A &= \cos a \cdot \sin b - \cos b \cdot \sin a \cdot \cos C \\ \sin b \cdot \cos A &= \cos a \cdot \sin c - \cos c \cdot \sin a \cdot \cos B \\ \sin b \cdot \cos C &= \cos c \cdot \sin a - \cos a \cdot \sin c \cdot \cos B \\ \sin a \cdot \cos B &= \cos b \cdot \sin c - \cos c \cdot \sin b \cdot \cos A \\ \sin a \cdot \cos C &= \cos c \cdot \sin b - \cos b \cdot \sin c \cdot \cos A\end{aligned}$$

5. FORMULAS DE LAS COTANGENTES:

Combinando las fórmulas de Bessel con la fórmula de los senos, se obtiene el grupo de fórmulas llamado *formulas de las cotangentes*.

Tomando una cualquiera de las fórmulas de Bessel, la primera del grupo, por ejemplo:

$$\operatorname{sen} c / k \cdot \cos B = \cos b / k \cdot \operatorname{sen} a / k - \cos a / k \cdot \operatorname{sen} b / k \cdot \cos C$$

dividimos a continuación por la expresión del teorema de los senos

$$\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} b / k = \operatorname{sen} a / k \cdot \operatorname{sen} B$$

resulta:

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\operatorname{ctg} b / k \cdot \operatorname{sen} c / k}{\operatorname{sen} A} - \cos c / k \cdot \operatorname{ctg} A$$

multiplicando por $\operatorname{sen} A$ y despejando:

$$\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} b / k \cdot \operatorname{sen} c / k - \cos c / k \cdot \cos A$$

$$\text{o sea: } \operatorname{sen} c / k \cdot \operatorname{ctg} b / k = \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{ctg} B + \cos c / k \cdot \cos A$$

permutando letras, obtenemos el bloque de las *fórmulas de las cotangentes*:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} c / k \cdot \operatorname{ctg} b / k &= \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{ctg} B + \cos c / k \cdot \cos A \\ \operatorname{sen} c / k \cdot \operatorname{ctg} a / k &= \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{ctg} A + \cos c / k \cdot \cos B \\ \operatorname{sen} b / k \cdot \operatorname{ctg} a / k &= \operatorname{sen} C \cdot \operatorname{ctg} A + \cos b / k \cdot \cos C \\ \operatorname{sen} b / k \cdot \operatorname{ctg} c / k &= \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{ctg} C + \cos b / k \cdot \cos A \\ \operatorname{sen} a / k \cdot \operatorname{ctg} b / k &= \operatorname{sen} C \cdot \operatorname{ctg} B + \cos a / k \cdot \cos C \\ \operatorname{sen} a / k \cdot \operatorname{ctg} c / k &= \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{ctg} C + \cos a / k \cdot \cos B \end{aligned}$$

que, para la esfera trigonométrica, se convierten en :

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{ctg} b &= \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{ctg} B + \cos c \cdot \cos A \\ \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{ctg} a &= \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{ctg} A + \cos c \cdot \cos B \\ \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{ctg} a &= \operatorname{sen} C \cdot \operatorname{ctg} A + \cos b \cdot \cos C \\ \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{ctg} c &= \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{ctg} C + \cos b \cdot \cos A \\ \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{ctg} b &= \operatorname{sen} C \cdot \operatorname{ctg} B + \cos a \cdot \cos C \\ \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{ctg} c &= \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{ctg} C + \cos a \cdot \cos B \end{aligned}$$

6. FORMULAS DE BORDA:

A partir de las fórmulas del ángulo mitad de la trigonometría plana, y sustituyendo las fórmulas del coseno, podemos obtener un grupo de fórmulas que explicitan la tangente del ángulo diedro mitad, obtenidas por primera vez por Jean Borda (París, 1733-1799).

Si llamamos p al semiperímetro del triángulo definido por los arcos a , b y c , se tiene:

$$p = \frac{a + b + c}{2}, \quad p - a = \frac{b + c - a}{2}, \quad p - b = \frac{a + c - b}{2}, \quad p - c = \frac{b + c - a}{2}$$

de las fórmulas del coseno para la esfera trigonométrica, se tiene:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A \rightarrow \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}$$

y, a partir de la fórmula de la trigonometría plana que da la tangente del ángulo mitad, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} &= \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}}{1 + \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}} = \frac{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c - \cos a + \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c + \cos a - \cos b \cdot \cos c} = \\ &= \frac{\cos(b - c) - \cos a}{-\cos(b + c) + \cos a} = \frac{-2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{b + a - c}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{b - c - a}{2}\right)}{-2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{a - b - c}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{a + b + c}{2}\right)} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{b + a - c}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{a + c - b}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b + c - a}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{a + b + c}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}(p - c) \cdot \operatorname{sen}(p - b)}{\operatorname{sen}(p - a) \cdot \operatorname{sen} p} \end{aligned}$$

podemos, entonces, escribir que:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen}(p - c) \cdot \operatorname{sen}(p - b)}{\operatorname{sen}(p - a) \cdot \operatorname{sen} p}$$

y, por analogía:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} = \frac{\operatorname{sen}(p - c) \cdot \operatorname{sen}(p - a)}{\operatorname{sen}(p - b) \cdot \operatorname{sen} p}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{\operatorname{sen}(p - a) \cdot \operatorname{sen}(p - b)}{\operatorname{sen}(p - c) \cdot \operatorname{sen} p}$$

En definitiva, se obtiene, para una esfera de radio k:

$$tg^2 \frac{A}{2} = \frac{\text{sen}(\frac{p-c}{k}) \cdot \text{sen}(\frac{p-b}{k})}{\text{sen}(\frac{p}{k}) \text{sen}(\frac{p-a}{k})}$$

$$tg^2 \frac{B}{2} = \frac{\text{sen}(\frac{p-a}{k}) \cdot \text{sen}(\frac{p-c}{k})}{\text{sen}(\frac{p}{k}) \text{sen}(\frac{p-b}{k})}$$

$$tg^2 \frac{C}{2} = \frac{\text{sen}(\frac{p-a}{k}) \cdot \text{sen}(\frac{p-b}{k})}{\text{sen}(\frac{p}{k}) \text{sen}(\frac{p-c}{k})}$$

O sea:

La tangente del ángulo diedro mitad es la raíz cuadrada del cociente de dividir el producto de los senos del complemento semiperimetral de los ángulos centrales adyacentes por el producto del seno del semiperímetro por el seno del complemento semiperimetral del ángulo central opuesto.

Para despejar desde estas fórmulas el seno y el coseno correspondientes, tengamos en cuenta las fórmulas de trigonometría plana que nos dan:

$$\text{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{tg^2 \frac{A}{2}}{1 + tg^2 \frac{A}{2}}, \quad \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{1 + tg^2 \frac{A}{2}}$$

Por lo cual, al sustituir:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2 \frac{A}{2} &= \frac{\frac{\text{sen}(p-b) \cdot \text{sen}(p-c)}{\text{sen} p \cdot \text{sen}(p-a)}}{1 + \frac{\text{sen}(p-b) \cdot \text{sen}(p-c)}{\text{sen} p \cdot \text{sen}(p-a)}} = \frac{\text{sen}(p-b) \cdot \text{sen}(p-c)}{\text{sen} p \cdot \text{sen}(p-a) + \text{sen}(p-b) \cdot \text{sen}(p-c)} = \\ &= \frac{\text{sen}(p-b) \cdot \text{sen}(p-c)}{\text{sen} b \cdot \text{sen} c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{A}{2} &= \frac{1}{1 + \frac{\text{sen}(p-b) \cdot \text{sen}(p-c)}{\text{sen} p \cdot \text{sen}(p-a)}} = \frac{\text{sen} p \cdot \text{sen}(p-a)}{\text{sen} p \cdot \text{sen}(p-a) + \text{sen}(p-b) \cdot \text{sen}(p-c)} = \\ &= \frac{\text{sen} p \cdot \text{sen}(p-a)}{\text{sen} b \cdot \text{sen} c} \end{aligned}$$

Donde se ha simplificado la expresión del denominador haciendo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-a) + \operatorname{sen}(p-b) \cdot \operatorname{sen}(p-c) &= \frac{\cos a - \cos(2p-a)}{2} + \\ + \frac{\cos(c-b) - \cos a}{2} &= \frac{\cos(c-b) - \cos(c+b)}{2} = \frac{2 \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}{2} = \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \end{aligned}$$

Se obtienen, así, el seno y coseno del ángulo diedro mitad, referidos a una esfera trigonométrica, esto es, de radio unidad:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b) \cdot \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}} \\ \operatorname{sen} \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a) \cdot \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c}}, \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c}} \\ \operatorname{sen} \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b) \cdot \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} a}}, \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} a}} \end{aligned}$$

7. ANALOGÍAS DE DELAMBRE:

Usando las fórmulas de Borda, y teniendo en cuenta que por la fórmula del ángulo suma de la trigonometría plana es

$$\operatorname{sen} \frac{B+C}{2} = \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{C}{2}$$

Podemos obtener mediante una sencilla sustitución las fórmulas llamadas *analogías de Delambre*, obtenidas por Jean Baptiste Joseph Delambre (Amiens, 1749 - París, 1822).

Efectivamente, se tiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \frac{B+C}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a) \cdot \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c}} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}} + \\ &+ \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c}} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a) \cdot \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(p-c) \cdot \operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}} + \\ &+ \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(p-b) \cdot \operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}} = \frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a} \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}} + \\ &+ \frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a} \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}} = \frac{\operatorname{sen}(p-c) + \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a} \cdot \cos \frac{A}{2} = \\ &= \frac{2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{2p-c-b}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{b-c}{2} \right)}{\operatorname{sen} a} \cdot \cos \frac{A}{2} = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cdot \cos \left(\frac{b-c}{2} \right)}{2 \cdot \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2}} \cdot \cos \frac{A}{2} = \\ &= \frac{\cos \left(\frac{b-c}{2} \right)}{\cos \frac{a}{2}} \cdot \cos \frac{A}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{B+C}{2} = \frac{\cos \left(\frac{b-c}{2} \right)}{\cos \frac{a}{2}} \cdot \cos \frac{A}{2} \end{aligned}$$

Se obtiene, en definitiva:

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{a}{2}}$$

Análogamente se obtienen:

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{b-c}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a}{2}}$$

$$\frac{\cos \frac{B+C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\cos \frac{b+c}{2}}{\cos \frac{a}{2}}$$

$$\frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\sin \frac{b+c}{2}}{\sin \frac{a}{2}}$$

Permutando circularmente las letras, se obtienen otras ocho fórmulas que completan el grupo.

$$\frac{\sin \frac{C+A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{\cos \frac{c-a}{2}}{\cos \frac{b}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{C-A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{\sin \frac{c-a}{2}}{\sin \frac{b}{2}}$$

$$\frac{\cos \frac{C+A}{2}}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{\cos \frac{c+a}{2}}{\cos \frac{b}{2}}$$

$$\frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{\sin \frac{c+a}{2}}{\sin \frac{b}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$$

$$\frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2}}$$

8. ANALOGÍAS DE NEPER:

Si se dividen las analogías de Delambre, se obtienen las relaciones siguientes, conocidas como *analogías de Neper*:

$$\operatorname{tg} \frac{b+c}{2} = \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{b-c}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{B-C}{2}}{\operatorname{sen} \frac{B+C}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B+C}{2} = \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{b+c}{2}} \cdot \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{b-c}{2}}{\operatorname{sen} \frac{b+c}{2}} \cdot \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$$

Permutando circularmente las letras, se obtienen otras ocho fórmulas que completan este grupo.

$$\operatorname{tg} \frac{c+a}{2} = \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\cos \frac{C+A}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{b}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{c-a}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{C-A}{2}}{\operatorname{sen} \frac{C+A}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{b}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C+A}{2} = \frac{\cos \frac{c-a}{2}}{\cos \frac{c+a}{2}} \cdot \operatorname{cotg} \frac{B}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C - A}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{c - a}{2}}{\operatorname{sen} \frac{c + a}{2}} \cdot \operatorname{cotg} \frac{B}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a + b}{2} = \frac{\cos \frac{A - B}{2}}{\cos \frac{A + B}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a - b}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{A - B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A + B}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A + B}{2} = \frac{\cos \frac{a - b}{2}}{\cos \frac{a + b}{2}} \cdot \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{a - b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a + b}{2}} \cdot \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$$