La Formula de la Integral de Cauchy

00. Introducción. Una obtención elemental de la fórmula

Dado un conjunto de caminos o trozos de curva rectificables en R^2, $\gamma_j,\ \ j=1,...,k$, se define como cadena a la expresión $\varsigma_k=\sum_{j=1}^{k} m_j.\gamma_j$, con $m_j \in Z,\ j=1,...,k$.

Llamaremos circuito Γ a un contorno rectificable cerrado. Una cadena se denomina *ciclo* si puede representarse como suma de circuitos.

00.1 Aplicando el Teorema de la Integral de Cauchy-Goursat:

Para toda función analítica $\phi(z)$ en un abierto simplemente conexo D, para todo contorno cerrado rectificable o circuito Γ contenido en D se verifica el teorema de Cauchy-Goursat

$$\oint_\Gamma \phi(z)dz=0$$

que es válido también cuando dentro del interior del recinto rodeado por Γ existe un número finito de puntos singulares $p_j,\ \ j=1,...,k$ tales que es

$$\lim_{z\to p_j}\left(z-p_j\right)\phi(z)=0,\quad j=1,...,k$$

Así, por ejemplo, la función $\varphi(z)=\dfrac{1}{z-z_0}$ tiene un único punto singular en $z=z_0$, pero tal punto singular no cumple la condición anterior, pues es

$$\lim_{z\to z_0}\left(z-z_0\right)\frac{1}{z-z_0}=1\neq 0$$

En cambio, si $f(z)$ es función analítica en el recinto D, se tiene que la función $\phi(z)=\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ si verifica dicha condición, ya que

$$\lim_{z\to z_0}\left(z-z_0\right)\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=0$$

y por tanto, en el recinto indicado y para el contorno cerrado rectificable Γ se verificará el teorema de Cauchy-Goursat:

$$\oint_\Gamma \phi(z)dz=\oint_\Gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=0 \qquad [1]$$

en cambio, para la función $\varphi(z)$ anteriormente indicada, al no cumplir la hipótesis del teorema de Cauchy-Goursat, la integral de contorno no es nula. Calculémosla:

$$\oint_\Gamma \varphi(z)\,dz=\oint_\Gamma \frac{dz}{z-z_0}=\int_{t_0}^{t}\frac{z'(t).dt}{z(t)-z_0}=L\left(\frac{z(t)-z_0}{z(t_0)-z_0}\right)$$

llamando $h(t)$ al resultado, se tiene

$$h(t) = L\left(\frac{z(t)-z_0}{z(t_0)-z_0}\right) \rightarrow e^{h(t)} = \frac{z(t)-z_0}{z(t_0)-z_0} = 1$$

ya que al tratarse de un recinto cerrado es $z(t) = z(t_0)$.

Esto nos indica que $e^{h(t)} = e^{2\pi i.\vartheta} = 1$, por lo que $h(t) = 2\pi i.\vartheta$, de donde

$$\oint_\Gamma \varphi(z)\,dz = \oint_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i.\vartheta \qquad [2]$$

donde el número natural $\vartheta = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{dz}{z-z_0}$ depende obviamente del contorno cerrado rectificable Γ y del punto z_0, por lo que se le acostumbra a llamar índice del punto z_0 respecto al contorno Γ, o bien, número de vueltas de Γ alrededor de z_0, pudiéndose representar por $\vartheta(\Gamma, z_0)$ para indicar esta dependencia.

00.2. La Formula de Cauchy:

De [1]:

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)\oint_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = 0$$

y usando el resultado [2]:

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)2\pi i.\vartheta(\Gamma, z_0) = 0 \rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i.\vartheta(\Gamma, z_0)}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

O sea:

El valor de la función holomorfa *f* en un punto z_0 del abierto simple conexo *D* puede expresarse sobre un circuito Γ que contenga en su interior a z_0 mediante la fórmula

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i.\vartheta(\Gamma, z_0)}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

donde $\vartheta(\Gamma, z_0)$ es el número de vueltas o índice del circuito Γ alrededor de z_0.

01. Estudio detallado del problema

01.1. Precisando la idea de abierto conexo

Un *conjunto conexo* es un subconjunto de un espacio topológico que no puede ser descrito como unión disjunta de dos conjuntos abiertos de su topología.

Diremos que un conjunto es *conexo por arcos*, o arco conexo, si dados dos puntos cualesquiera del conjunto existe un arco continuo que va de un punto al otro dentro del conjunto. La conexidad por arcos implica la conexidad, aunque el recíproco no es en general cierto.

Si consideramos los abiertos de la topología que son conexos, estos se acostumbran a clasificar según el número de componentes de su complemento respecto al espacio completo.

En el caso del plano diremos que un abierto es *simplemente conexo* si su complemento respecto al plano completo consta de una sola componente, esto es, si su complemento es también conexo. Es importante precisar que se trata del complemento respecto al *plano completo* pues, obviamente, el complemento de una banda respecto al plano finito no es conexo.

Si convenimos en que todos los abiertos se encuentran en el plano finito se tiene que, por ejemplo, el exterior de un círculo no es simplemente conexo, ya que su complementario consiste en un disco cerrado y el punto del infinito.

Un abierto conexo que no es simplemente conexo se dirá *múltiplemente conexo*, y se dice que tiene *orden de conexión finito n*, si su complemento respecto al plano completo consiste en n componentes, y se dirá que tiene *orden de conexión infinito* si su complemento tiene infinitas componentes.

Teniendo en cuenta estas precisiones se pueden probar resultados muy sencillos sobre circuitos en un disco abierto, como el siguiente enunciado.

Teorema: En el plano R^2, todo abierto conexo es también arco conexo
Demostración:
Sea M un conexo abierto y sea M_1 la componente de M que es arco conexa. Si es $M_1 = M$ habremos terminado. Caso contrario, llamemos $M_2 = M - M_1$. Se tiene entonces que $M = M_1 \cup M_2$ y $M_1 \cap M_2 = \phi$. Vamos a ver que tanto M_1 como M_2 han de ser abiertos, por lo que habría contradicción con el hecho de que M es abierto conexo (por definición, un abierto conexo no puede ser descrito como unión disjunta de dos abiertos) y por tanto, M nunca podría ser la unión de un conjunto arco conexo y otro conjunto que no lo es.

- M_1 es abierto:

$\forall z_0 \in M_1 \subset M, \exists B(z_0, d) \subseteq M$ y $\forall w_0 \in B(z_0, d)$ existe un segmento que une z_0 con w_0 y está contenido en $B(z_0, d)$, por lo que $B(z_0, d) \subseteq M_1 \to M_1$ abierto.

- M_2 es abierto: Del mismo modo.

En definitiva, si suponemos que el abierto conexo M es unión disjunta de una parte arco conexa y otra parte que no lo es, llegamos a la conclusión de que ambas componentes son abiertos y M no podría ser abierto conexo pues quedaría descrito por la unión disjunta de dos abiertos, salvo que $M_1 = M$ y $M_2 = \phi$.
Luego, necesariamente, si M es abierto conexo, también es arco conexo.

Teorema: Si es Γ un circuito y $z_0 \notin \Gamma$ entonces se verifica que

a) $\vartheta(-\Gamma, z_0) = -\vartheta(\Gamma, z_0)$.

b) Dado el disco abierto D y $\Gamma \subset D$, entonces $\vartheta(\Gamma, z_0) = 0$, $\forall z_0 \notin D$.

c) Si consideramos la función definida por el índice, $\gamma(z_0) = \vartheta(\Gamma, z_0)$, se tiene que es constante en cada una de las componentes del complemento de Γ, siendo cero en la componente no acotada.

Demostración:

a) $\vartheta(-\Gamma, z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_{-\Gamma} \dfrac{dz}{z - z_0} = \dfrac{1}{2\pi i} \int_{t_1}^{t_0} \dfrac{z'(t)}{z(t) - z_0} dt = -\dfrac{1}{2\pi i} \int_{t_0}^{t_1} \dfrac{z'(t)}{z(t) - z_0} dt =$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{dz}{z-z_0} = -\vartheta(\Gamma, z_0)$$

b) Si $z_0 \notin D$ la función $1/z-z_0$ es holomorfa en *D*, por lo que aplicando el teorema de Cauchy:

$$\vartheta(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}.0 = 0$$

c) Para el circuito Γ las componentes de su complemento son abiertos conexos, y por el anterior teorema, son también arco conexos. Dada una componente *C* del complemento de Γ se tiene que , $\forall a, b \in C$, existe pues una poligonal que une los puntos *a* y *b,* y no corta al circuito Γ. Por ello, bastará probar que $\vartheta(\Gamma, a) = \vartheta(\Gamma, b)$ si Γ no corta al segmento $L(a,b)$ que une los puntos *a* y *b.*

$\forall z \in C - L(a,b)$, la función definida por $\varphi(z) = \dfrac{z-a}{z-b}$ es una aplicación del abierto conexo $C - L(a,b)$ en *D*, pues no es nula ni es negativa, siendo además función holomorfa, y tomando su logaritmo:

$$L\varphi(z) = L\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$

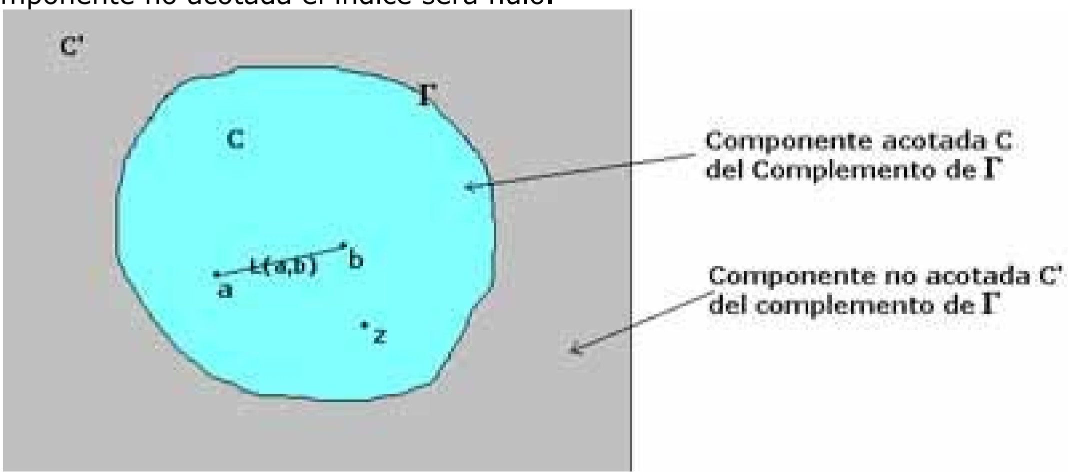
es también función holomorfa, lo mismo que su derivada:

$$(L\varphi(z))' = \left[L\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\right] = \frac{1}{\frac{z-a}{z-b}}.\frac{(z-b)-(z-a)}{(z-b)^2} = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}$$

por lo que se le puede aplicar el teorema de Cauchy:

$$\oint_{\Gamma}(L\varphi(z))'dz = \oint_{\Gamma}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)dz = \oint_{\Gamma}\frac{dz}{z-a} - \oint_{\Gamma}\frac{dz}{z-b} = \vartheta(\Gamma, a) - \vartheta(\Gamma, b) = 0$$

de lo cual $\vartheta(\Gamma, a) = \vartheta(\Gamma, b)$. Es decir, dos puntos, a y b, cualesquiera, de una misma componente del complemento de Γ tienen el mismo índice. El índice es, por consiguiente, constante en dicha componente. Para ver la segunda afirmación, de que en la componente no acotada, *C′*, es $\vartheta(\Gamma, z) = 0, \forall z \in C'$, tengamos en cuenta que al ser el circuito Γ acotado, existirá un disco de radio r que lo contiene, por lo que tomando $z \in C'$ tal que $r < |z|$ se tiene, por b), que $\vartheta(\Gamma, z) = 0$, y como el radio r del disco puede ser cualquiera siempre que contenga al circuito, en toda la componente no acotada el índice será nulo.

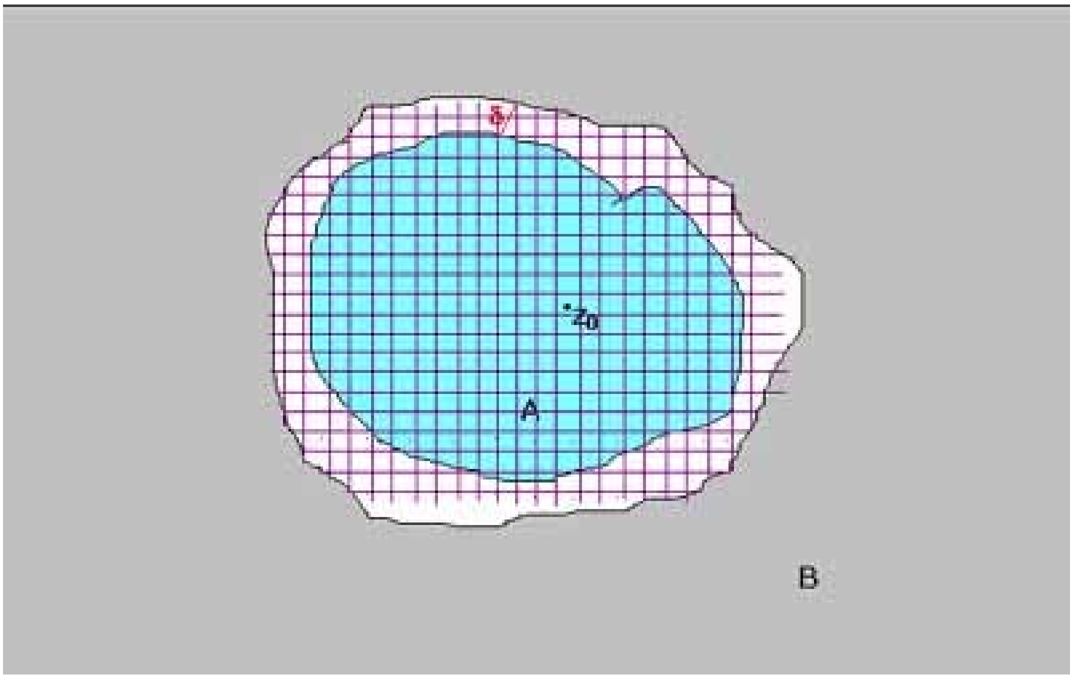


Teorema:

Sea D un abierto del plano. Se verifica la siguiente equivalencia:
D es simplemente conexo sii para cualquier ciclo contenido en D su índice respecto a un punto no perteneciente a D es nulo:

$$D \text{ simp conexo} \leftrightarrow \forall z_0 \notin D, \forall \Gamma \subset D, \vartheta(T, z_0) = 0$$

Demostración:
Veamos la implicación $\rightarrow$:
Si D es simplemente conexo, entonces el complemento D' de D es conexo y contiene a ∞.
Por tanto, para $\forall \Gamma \subset D$, el complemento D' de D está contenido en la componente no acotada del complemento de Γ.
En definitiva, $\forall z_0 \notin D$ es, por el apartado b) del teorema anterior, $\vartheta(T, z_0) = 0$.
Sea ahora la implicación contraria $\leftarrow$:
Supongamos que D no fuera simplemente conexo, es decir que el complemento D' de D no es conexo. En este caso veremos que se produce una contradicción con la hipótesis, ya que podrá definirse un ciclo γ en D tal que $\vartheta(\gamma, z_0) \neq 0$.
Efectivamente, si, por ejemplo, expresamos D' mediante la unión disjunta de dos conjuntos cerrados, A y B, siendo B la componente no acotada y $z_0 \in A$, sea la distancia entre ambos $d(A, B) = \delta$. Ha de ser necesariamente $\delta > 0$, pues si fuera $\delta = 0$, no serían partes disjuntas. Vamos a ver someramente como en la zona de D que separa ambos cerrados puede definirse un ciclo γ que rodea a $z_0 \in A$, con lo que sería $\vartheta(\gamma, z_0) \geq 1$.



En la figura se observa que si pensamos en un recubrimiento Q de la parte A acotada formado por cuadrados de lado $l < \delta / \sqrt{2}$, de forma que el punto z_0 quede en el centro de uno de los cuadrados, de modo que la frontera $F(Q)$ esté constituida por segmentos orientados tales que el interior de Q queda a la izquierda. Sea el ciclo $\gamma = \sum_j F(Q_j)$, donde la suma está extendida a todos los cuadrados que tienen puntos comunes con A. Es obvio, por la elección del lado de cada cuadrado, que γ no tiene puntos comunes con B, y después de realizar todas

las cancelaciones tampoco tiene puntos comunes con A. Puesto que z_0 está en el centro de uno de los cuadrados del recubrimiento, es inmediato que $\vartheta(\gamma, z_0) = 1$.
Así, pues, resulta que el ciclo γ está en D y se tiene que para un $z_0 \notin D, \vartheta(\gamma, z_0) = 1$, lo cual contradice la hipótesis. Luego el complemento D' de D no puede descomponerse en una unión disjunta. Es conexo.

De lo cual inferimos que D es simplemente conexo.

01.2. Cadenas, ciclos y clases de homología

Cadenas:
Dado un conjunto de caminos o trozos de curva rectificables en R^2, $\gamma_j,\ j = 1,...,k$, se define como cadena a la expresión $\varsigma_k = \sum_{j=1}^{k} m_j.\gamma_j$, con $m_j \in Z,\ j = 1,...,k$.
Como ya hemos indicado, llamaremos circuito Γ a un contorno rectificable cerrado. Una cadena se denomina *ciclo* si puede representarse como suma de circuitos.

Llamaremos *K* al conjunto de todas las cadenas, y C_D al conjunto de todos los ciclos de un abierto D.

Se define la integral de la función f(z) sobre la cadena $\varsigma_k = \sum_{j=1}^{k} m_j.\gamma_j$, por la expresión $\int_{\varsigma_k} f(z).dz = \sum_{j=1}^{k} m_j \int_{\gamma_j} f(z).dz$.
Dos cadenas, *k* y *k'*, que tienen la misma integral curvilínea para cualquier función *f(z)* se dice que son *cadenas idénticas*.

En el conjunto *K* de todas las cadenas queda, por tanto, establecida una relación de equivalencia mediante la idea de identidad de cadenas (es una relación reflexiva, simétrica y transitiva), que parte al conjunto infinito de todas las cadenas del plano en clases de equivalencia, que también denominaremos *cadenas*.

Es trivial que las operaciones que indicamos a continuación no cambian la identidad de cadenas:
- Permutación de caminos.
- Subdividir caminos.
- Fusión de varios caminos parciales en uno solo.
- Cambio de parametrización de un camino.
- Cancelación de dos caminos opuestos.

El conjunto *K* de todas las cadenas del plano puede ser dotado, en definitiva, de una adición, que es conmutativa, asociativa, con elemento nulo y con elemento opuesto, es decir, el conjunto $(K,+)$ es un grupo aditivo conmutativo.
Ciclos:
Se define el índice de un punto con respecto a un ciclo Γ del mismo modo que se ha definido antes el índice de un punto con respecto a un circuito

$$\vartheta(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Así, para un ciclo que sea combinación lineal de *h* circuitos se tendrá que

$$\vartheta(\sum_{j=1}^{h} m_j\Gamma_j, z_0) = \sum_{j=1}^{h} m_j \vartheta(\Gamma_j, z_0),\ m_j \in Z$$

puesto que

$$\vartheta(\sum_{j=1}^{h} m_j\Gamma_j, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\sum_{j=1}^{h} m_j T_j} \frac{dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{m_1 T_1}\frac{dz}{z-z_0} + \ldots + \oint_{m_h T_h}\frac{dz}{z-z_0}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{T_1}\frac{dz}{z-z_0} + \overset{(m_1)}{\ldots} + \oint_{T_1}\frac{dz}{z-z_0}\right] + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{T_h}\frac{dz}{z-z_0} + \overset{(m_h)}{\ldots} + \oint_{T_h}\frac{dz}{z-z_0}\right] =$$

$$= \frac{m_1}{2\pi i}\oint_{T_1}\frac{dz}{z-z_0} + \ldots + \frac{m_h}{2\pi i}\oint_{T_h}\frac{dz}{z-z_0} = m_1\vartheta(\Gamma_1, z_0) + \ldots + m_h\vartheta(\Gamma_h, z_0) =$$

$$= \sum_{j=1}^{h} m_j \vartheta(\Gamma_j, z_0)$$

Homología:
Dos ciclos de un abierto conexo D se dicen homológicos módulo D, si y solo si tienen el mismo índice respecto a un punto cualquiera exterior a D:

$$\Gamma_1 \approx \Gamma_2 (\operatorname{mod} D) \leftrightarrow \forall w \notin D,\ \vartheta(\Gamma_1, w) = \vartheta(\Gamma_2, w)$$

Un ciclo del abierto conexo D se dice homológico a cero módulo D, si y solo si tiene índice nulo con respecto a cualquier punto exterior a D:

$$\Gamma \approx 0 (\operatorname{mod} D) \leftrightarrow \forall u \notin D,\ \vartheta(\Gamma, u) = 0$$

En la familia C_D de los ciclos del abierto conexo D se verifican trivialmente las siguientes propiedades:

a) $\Gamma_1 \approx \Gamma_2 (\operatorname{mod} D) \leftrightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2 \approx 0 (\operatorname{mod} D)$

b) La relación $\approx$ de homología es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo que es una relación de equivalencia que parte a la familia C_D de los ciclos del plano en clases de equivalencia, que se denominan *clases de homología*, y que representaremos por H(D,z).

c) $(C_D, +)$ es subgrupo de $(K, +)$ y la relación de homología es compatible con la suma, por lo que $(H(D,z), +)$ es también un grupo abeliano.

d) Si $D \subseteq D'$ entonces $\Gamma \approx 0 (\operatorname{mod} D) \rightarrow \Gamma \approx 0 (\operatorname{mod} D')$

En general, la integral de una función cualquiera sobre un ciclo homológico a cero, modulo D, no es necesariamente nula. Sin embargo, la relación de homología permite probar el enunciado más general del teorema de Cauchy, enunciado que puede establecerse así:

La integral de una función holomorfa sobre un ciclo homológico a cero modulo D es nula. Dicho de otro modo, la integral de una función holomorfa es un invariante en las clases de homología de D.

01.3. Enunciado general del teorema de Cauchy:

Vamos a establecer el teorema como la existencia de un invariante de las clases de homología.

Teorema:
Si la función f(z) es holomorfa en el abierto conexo D, entonces

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

Para todo ciclo Γ de D homológico a cero módulo D.
Demostración:
A) Reemplazamos Γ por una línea poligonal σ de lados verticales y horizontales tal que sea también $\sigma \approx 0 (\mathrm{mod}\, D)$. Si es ρ la distancia de Γ al complemento de D, será $\rho > 0$. Si la ecuación del ciclo Γ es $z = z(t),\ t_0 \le t \le t_1,$ la función $z(t)$ es uniformemente continua en el intervalo cerrado $[t_0, t_1]$. Determinamos $\delta > 0$ de modo que $|t - t'| < \delta \to |z(t) - z(t')| < \rho$ y dividimos $[t_0, t_1]$ en subintervalos de longitud menor que δ.
Loa caminos parciales Γ_i correspondientes a cada uno de estos subintervalos tienen la propiedad de que cada Γ_i está contenido en un disco de radio ρ totalmente contenido en D. Los extremos de Γ_i pueden unirse dentro del disco mediante una poligonal σ_i:
Sea $p.dx + q.dy = W$ una forma diferencial localmente exacta en D y B_x la bola en la que W es exacta. La familia $B = \{B_x\}_{x \in r}$ es un recubrimiento abierto de Γ que, por ser compacto, admite un recubrimiento finito $B' \subseteq B$. Es, entonces, posible elegir la partición de $[t_0, t_1]$ de forma que todo camino Γ_i esté contenido entero en algún elemento B_x de B'. También puede conseguirse que la poligonal σ_i correspondiente a Γ_i esté entera en B_x. Por lo tanto se verificará

$$\int_{\Gamma_i} W = \int_{\sigma_i} W, \text{ y llamando } \sigma = \sum \sigma_i : \int_{\Gamma} W = \int_{\sigma} W \qquad [3]$$

Si $f(z)$ es holomorfa en D, es $f(z).dz$ localmente exacta en D y se verificará:

$$\int_{\Gamma} f(z).dz = \int_{\sigma} f(z).dz$$

en particular, si $z_0 \notin D$ es $1/z - z_0$ holomorfa en D. Luego, aplicando [3] se deduce que $\sigma \approx 0\,(\mathrm{mod}.D)$.
B) Construyamos la red rectangular obtenida prolongando los segmentos verticales y horizontales de la poligonal σ. Habrá algunos rectángulos finitos R_i y algunos no acotados $R_j^{'}$. Puesto que no es preciso tener en cuenta el caso trivial en que σ se reduce a un segmento vertical u horizontal, podemos suponer que hay al menos un rectángulo R_i.
Elijamos un punto z_i del interior de cada R_i y formemos el ciclo

$$\sigma_0 = \sum_i n(\sigma, z_i).F(R_i)$$

donde la suma está extendida a todos los rectángulos finitos; los coeficientes $n(\sigma, z_i)$ están perfectamente determinados, pues ningún z_i puede estar en σ. Es inmediato que

$$n(F(R_i), z_k) = \begin{cases} 1, \text{ si } k = i \\ 0, \text{ si } k \neq i \end{cases}$$

y también $n(F(R_i), z'_j) = 0, \forall z'_j \in \text{int}(R'_j)$. Por tanto, se tiene, en virtud de lo anterior, que $n(\sigma_0, z_i) = n(\sigma, z_i)$ y $n(\sigma_0, z'_j) = 0$. Y también $n(\sigma, z'_j) = 0$, pues el interior de R_j'debe pertenecer a la componente no acotada del complemento de σ. Hemos probado así que $n(\sigma - \sigma_0, z_0) = 0$ para todo $z_0 = z_i$ y $z_0 = z'_j$.
De esta propiedad deseamos deducir que σ_0 es idéntico a σ. Sea Λ_{ik} el lado común de dos rectángulos adyacentes R_i y R_k; elegimos la orientación de forma que R_i quede a la izquierda de Λ_{ik}. Supongamos que la expresión reducida de $\sigma - \sigma_0$ contiene el múltiplo $c.\Lambda_{ik}$. Entonces el ciclo $\sigma - \sigma_0.c.F(R_i)$ no contiene a $c.\Lambda_{ik}$, y puesto que no corta al segmento $L(z_i, z_k)$, estos puntos han de tener el mismo índice con respecto a este ciclo. Pero los índices respectivos son: el de z_k es 0, y el de z_i es –c. En definitiva, c=0.
El mismo razonamiento se aplica si Λ_{ik} es el lado común de un rectángulo finito R_i y otro infinito R_j'.
Por último, notemos que habiendo al menos un rectángulo finito R_i es claro que dos rectángulos infinitos no pueden tener un lado finito común.
En suma, hemos demostrado que $\sigma - \sigma_0$ debe ser idénticamente cero, lo cual significa que

$$\sigma = \sigma_0 = \sum_i n(\sigma, z_i).F(R_i)$$

C) Probaremos ahora que los rectángulos R_i tales que $n(\sigma, z_i) \neq 0$ están contenidos en D. En efecto, supongamos que un punto z del rectángulo cerrado R_i no estuviera en D. Entonces, como $\sigma \approx 0 \,(\text{mod.} D) \rightarrow n(\sigma, z) = 0$. Pero σ no corta al segmento $L(z, z_i)$, por consiguiente, $n(\sigma, z_i) = n(\sigma, z) = 0$, en contradicción con la hipótesis de que $n(\sigma, z_i) \neq 0$.
Basta ahora aplicar el teorema de Cauchy a cada rectángulo R_i para obtener:

$$\int_{F(R_i)} f(z).dz = 0 \rightarrow \int_{\sigma} f(z).dz = \int_{\Gamma} f(z).dz = 0$$

Notemos que si $W = pdx + qdy$ es localmente exacta en D, entonces se verifica que $\int_{F(R)} W = 0$ para todo ciclo $F(R)$ que sea la frontera de un rectángulo contenido en D. Por lo cual $\int_{\Gamma} W = 0$ para todo ciclo Γ de D que sea homológico a cero.
Se obtiene así que la integral de una función holomorfa en D (y en general de una forma localmente exacta en D) es un invariante de las clases de homología de D.

Corolario:
Si f(z) es holomorfa en el abierto simplemente conexo D, se tiene que

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

Para todo ciclo Γ de D.
Demostración:

Sabemos que todo ciclo de D es homológico a cero módulo D. Se tiene así que los abiertos simplemente conexos constan de una sola clase de homología.

01.4. Enunciado general de la fórmula de Cauchy:

Teorema:
Si f(z) es holomorfa en el abierto conexo D, entonces se tiene que

$$\vartheta(\Gamma, z_0).\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

para todo ciclo Γ de D, que sea homológico a cero módulo D y que no pase por z_0.
Demostración:
Esta es la expresión más general de la fórmula de Cauchy.
La función

$$\phi(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

es holomorfa en $D' = D - \{z_0\}$, que es un abierto conexo que contiene a Γ.

Si $z_0 \notin D$, entonces $D' = D$ y será homológico a cero módulo D', por lo cual, aplicando el teorema anterior, se obtiene:

$$\oint_{\Gamma}\phi(z).\,dz = 0 \rightarrow f(z_0)\oint_{\Gamma}\frac{1}{z-z_0}.\,dz = \oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz \rightarrow \vartheta(\Gamma, z_0).\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

Si $z_0 \in D$, sea $B(z_0, d) \subseteq D$ la bola de centro en z_0 tal que su frontera $\sigma = F\left(B(z_0, d)\right) \subseteq D$. Entonces:

$$\vartheta(\sigma, z_0) = 1 \quad \text{y} \quad \vartheta(\sigma, z_k) = 0 \ \ \forall z_k \notin D$$

sea $c = \vartheta(\sigma, z_0)$. Entonces el ciclo $\chi = \Gamma - c.\sigma$ es trivialmente homológico a cero módulo D' y está contenido en D'. Luego, por el anterior teorema, es

$$\oint_{\chi}\phi(z).\,dz = 0 \rightarrow \oint_{\Gamma - c\sigma}\phi(z).\,dz = \oint_{\Gamma}\phi(z).\,dz - c\oint_{\sigma}\phi(z).\,dz = \oint_{\Gamma}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.\,dz -$$

$$-c\oint_{\sigma}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.\,dz = \oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)\oint_{\Gamma}\frac{dz}{z-z_0} - c\oint_{\sigma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz + cf(z_0)\oint_{\sigma}\frac{dz}{z-z_0} = 0$$

Pero al ser

$$cf(z_0)\oint_{\sigma}\frac{dz}{z-z_0} = f(z_0)\oint_{\Gamma}\frac{dz}{z-z_0}$$

será:

$$\oint_{\sigma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

y, finalmente:

$$\vartheta(\Gamma, z_0).\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

02. Derivadas de órdenes superiores

Veamos a continuación que toda función holomorfa $f(z)$ en un abierto conexo D admite derivadas de cualquier orden.

Teorema:
Sea $\phi(t)$ continua en el camino Γ. Entonces la función

$$F_n(z)=\int_\Gamma \frac{\phi(t)}{(t-z)^n}dt$$

es holomorfa en el complemento de Γ, siendo su derivada $F'_n(z)=n.F_{n+1}(z)$.
Demostración:
Empleamos inducción. Probemos que se verifica para *n=1*, para, a continuación, probar que si es cierta para *n-1* también lo será para *n*.

- Para *n=1*:
  La continuidad:

Consideremos un punto z_0 cualquiera del complemento de Γ y sea d la distancia desde z_0 a Γ, de modo que para una bola $B(z_0;d)$ de centro en z_0 y radio d se tiene que es $B(z_0;d)\cap\Gamma=\phi$.
Será entonces $\forall t\in\Gamma, |t-z_0|>d/2$, asimismo $|t-z|>d/2, \forall z\in B(z_0;d/2)$, y también es $|z-z_0|<d$. Entonces:

$$|F_1(z)-F_1(z_0)|=\left|\int_\Gamma \frac{\phi(t)}{t-z}dt-\int_\Gamma \frac{\phi(t)}{t-z_0}dt\right|=\left|\int_\Gamma\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-z_0}\right)\phi(t)\,dt\right|=$$

$$=\left|\int_\Gamma\left(\frac{z-z_0}{(t-z)(t-z_0)}\right)\phi(t)\,dt\right|=\left|(z-z_0)\int_\Gamma \frac{\phi(t)}{(t-z)(t-z_0)}dt\right|<$$

$$<|z-z_0|\int_\Gamma\left|\frac{\phi(t)}{(t-z)(t-z_0)}dt\right|<|z-z_0|\frac{4}{d^2}\int_\Gamma|\phi(t)||dt|$$

Es decir, cuando $|z-z_0|\to 0$ también $|F_1(z)-F_1(z_0)|\to 0$. $F_1(z)$ es continua en z_0.

La derivada:

De ser $\dfrac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0}=\dfrac{1}{z-z_0}\displaystyle\int_\Gamma\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-z_0}\right)\phi(t)dt=\frac{1}{z-z_0}\int_\Gamma\frac{z-z_0}{(t-z)(t-z_0)}\phi(t)dt=$

$$=\int_\Gamma\frac{1}{(t-z)(t-z_0)}\phi(t)dt$$

Se tiene:

$$F'_1=\lim_{z\to z_0}\frac{F_1(z)-F_1(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\int_\Gamma\frac{1}{(t-z)(t-z_0)}\phi(t)dt=\int_\Gamma\frac{1}{(t-z_0)^2}\phi(t)dt=F_2$$

- Sea cierta para *n-1* y comprobemos que en tal caso lo será también para *n*:
  La continuidad:

Puesto que es:

$$(t-z_0)^n-(t-z)^n=(t-z_0)^{n-1}(t-z_0)-(t-z)^n=\left[(t-z)+(z-z_0)\right](t-z_0)^{n-1}-(t-z)^n=$$

$$=(t-z)(t-z_0)^{n-1}+(z-z_0)(t-z_0)^{n-1}-(t-z)^n$$

será:

$$\frac{1}{(t-z)^n}-\frac{1}{(t-z_0)^n}=\frac{(t-z_0)^n-(t-z)^n}{(t-z_0)^n(t-z)^n}=\frac{(t-z)(t-z_0)^{n-1}}{(t-z_0)^n(t-z)^n}-\frac{(t-z)^n}{(t-z_0)^n(t-z)^n}+$$

$$+(z-z_0)\frac{(t-z_0)^{n-1}}{(t-z_0)^n(t-z)^n}=\frac{1}{(t-z_0)(t-z)^{n-1}}-\frac{1}{(t-z_0)^n}+(z-z_0)\frac{1}{(t-z_0)(t-z)^n}$$

Por tanto:

$$F_n(z)-F_n(z_0)=\int_\Gamma\frac{\phi(t)}{(t-z)^n}dt-\int_\Gamma\frac{\phi(t)}{(t-z_0)^n}dt=\int_\Gamma\left(\frac{1}{(t-z)^n}-\frac{1}{(t-z_0)^n}\right)\phi(t)dt=$$

$$=\int_\Gamma\left[\frac{1}{(t-z_0)(t-z)^{n-1}}-\frac{1}{(t-z_0)^n}\right]\phi(t)dt+(z-z_0)\int_\Gamma\frac{\phi(t)}{(t-z_0)(t-z)^n}dt$$

observamos que cuando $z\to z_0$ la primera integral tiende a cero, y puesto que $z-z_0$ está acotado en un entorno de z_0, también tiende a cero la segunda. $F_n(z)$ es continua en z_0.

La derivada:

$$F'_n=\lim_{z\to z_0}\frac{F_n(z)-F_n(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{z-z_0}\int_\Gamma\left[\frac{1}{(t-z_0)(t-z)^{n-1}}-\frac{1}{(t-z_0)^n}\right]\phi(t)dt+$$

$$+\lim_{z\to z_0}\int_\Gamma\frac{\phi(t)}{(t-z_0)(t-z)^n}dt=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{z-z_0}\int_\Gamma\left[\frac{\phi(t)/t-z_0}{(t-z)^{n-1}}-\frac{\phi(t)/t-z_0}{(t-z_0)^{n-1}}\right]dt+$$

$$+\lim_{z\to z_0}\int_\Gamma\frac{\phi(t)}{(t-z_0)(t-z)^n}dt=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{z-z_0}\left[f_{n-1}(z)-f_{n-1}(z_0)\right]+\int_\Gamma\frac{\phi(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt=$$

$$=f'_{n-1}(z_0)+F_{n+1}(z_0)=(n-1)f_n(z_0)+F_{n+1}(z_0)$$

O sea:

$$F'_n(z_0)=(n-1)f_n(z_0)+F_{n+1}(z_0)\qquad[4]$$

donde se ha llamado

$$\int_\Gamma\frac{\phi(t)/t-z_0}{(t-z_0)^{n-1}}dt=f_{n-1}(z_0)$$

Es decir, $f_n(z_0)=\int_\Gamma\frac{\phi(t)/t-z_0}{(t-z_0)^n}dt=\int_\Gamma\frac{\phi(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt=F_{n+1}(z_0)$

Por lo que, sustituyendo en [4], se obtiene finalmente:

$$F'_n(z_0)=(n-1)F_{n+1}(z_0)+F_{n+1}(z_0)=nF_{n+1}(z_0)$$

(Habiendo utilizado la hipótesis de inducción para *n-1*: $f'_{n-1}(z_0)=(n-1)f_n(z_0)$)

Corolario (Formula de la integral de Cauchy para la derivada n-sima):
Toda función holomorfa $f(z)$ en un abierto conexo D admite derivadas de cualquier orden que son también holomorfas.
Para cualquier punto $z\in D$, y para cualquier ciclo Γ homológico a cero módulo D, tal que $\vartheta(\Gamma,z)\neq 0$ se verifica que

$$f^{n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i\vartheta(\Gamma,z)}\oint_{\Gamma}\frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt$$

En efecto:

Si llamamos $f_k(z)=\frac{1}{2\pi i\vartheta(\Gamma,z)}\oint_{\Gamma}\frac{f(t)}{(t-z)^k}dt$, $k=1,\ldots,n,\ldots$

se tiene, partiendo de la fórmula de Cauchy:

$$f(z)\equiv f_1(z)=\frac{1}{2\pi i\vartheta(\Gamma,z)}\oint_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z}dt$$

$$f'(z)\equiv f_1'(z)=1.\,f_2(z)=\frac{1}{2\pi i\vartheta(\Gamma,z)}\oint_{\Gamma}\frac{f(t)}{(t-z)^2}dt$$

$$f''(z)=(1.\,f_2(z))'=2\,f_3(z)=\frac{2}{2\pi i\vartheta(\Gamma,z)}\oint_{\Gamma}\frac{f(t)}{(t-z)^3}dt$$

$$f'''(z)=(2.\,f_3(z))'=2.3.\,f_4(z)=\frac{2.3}{2\pi i\vartheta(\Gamma,z)}\oint_{\Gamma}\frac{f(t)}{(t-z)^4}dt$$

... ...

... ...

$$f^{n)}(z)=(2...n-1.\,f_n(z))'=2.3...n.\,f_{n+1}(z)=\frac{2.3...n}{2\pi i\vartheta(\Gamma,z)}\oint_{\Gamma}\frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt$$

En definitiva:

$$f^{n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i\vartheta(\Gamma,z)}\oint_{\Gamma}\frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt \qquad [5]$$

03. Los teoremas de Morera y Liouville

Teorema de Morera:

Si $f(z)$ está definida y es continua en el abierto conexo D, si es

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz=0$$

para todo ciclo Γ de D, entonces $f(z)$ es holomorfa en D.

Demostración:

Si la función dada es continua en D y para todo ciclo de D la integral de contorno es nula, esto implica que admite una primitiva $F(z)$ tal que $F'(z)=f(z)$, por lo que $F(z)$ es holomorfa en D, y por el último corolario, también $F'(z)$ es holomorfa, luego $f(z)$ es holomorfa en D.

Teorema de Liouville:

Una función holomorfa y acotada en todo el plano debe reducirse a una constante.

Demostración:

Si en la fórmula [5] consideramos $z = z_0 \in D$ y tomamos como ciclo la frontera de la bola con centro en dicho punto, $\Gamma = F(B(z_0;r)) \subseteq D$, obtenemos en el supuesto que $f(z)$ sea acotada, $|f(t)| \le M$, que

$$\left| f^{n)}(z_0) \right| \le \frac{n!}{2\pi i \vartheta} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi i r \vartheta = n!.M.r^{-n} \text{ (Desigualdad de Cauchy)}$$

Si hacemos en la desigualdad n=1 y para $r \to \infty$, será $|f'(z_0)| \le M.r^{-1} = 0$ lo que implica que $f'(z_0) = 0$, y por tanto, $f(z_0) = const.$

Una aplicación interesante del teorema de Liouville es el poder diseñar una demostración bastante simple del teorema fundamental del álgebra:
Sea $p(z)$ un polinomio de grado mayor que cero. Si no tuviera raíces en C, entonces la función inversa, $1/p(z_0)$, sería holomorfa en todo el plano, y además, al ser $\lim_{z\to\infty}(1/p(z_0)) = 0$, sería, además, acotada, por lo que al aplicar el teorema de Liouville habríamos de deducir que es una constante. Como esto no es lo que ocurre, se deduce que ha de tener al menos una raíz en C. Si simplificamos el polinomio eliminando la raíz podemos continuar el razonamiento con cada polinomio restante, con lo cual llegamos a la conclusión que ha de tener tantas raíces como indique su grado.

04. Bibliografía

Ahlfors, L. V.; Análisis de variable compleja, McGraw-Hill, New York 1979.
Apostol, T.M.; Análisis Matemático, Editorial Reverté, Barcelona, 1986
Caratheodory; Theory of functions of a complex variable, Chelsea, 2001.
Cartan, H.; Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas, Madrid, Selecciones Científicas, 1968.
Chinea, C.S., El teorema de la integral de Cauchy-Goursat (http://casanchi.com/mat/cauchygoursat01.pdf)
Copson, E. T.: An introduction to the theory of functions of a complex variable, Oxford University Press, 1970.
Goursat, E.; Cours d'analyse Mathematique, Gauthier Villars, Imprimeur Libraire, 1905, Paris.
Markushevich, A. I; Teoría de las funciones analíticas, Editorial Mir: Moscú 1970.
Philips, E. G.; Funciones de una variable compleja, Dossat, Madrid, 1963.