FORMAS BILINEALES II

Acerca de las Formas Bilineales Simétricas. Las Formas Alternadas

Este artículo es una continuación de "Introducción a las formas bilineales", que se encuentra publicado en esta misma web, en la dirección

http://casanchi.com/mat/formasbilineales01.htm

en donde definimos las formas bilineales como aplicaciones del producto cartesiano de dos k-espacios vectoriales, V y W, en su cuerpo k de definición. En dicho artículo obtenemos la expresión analítica, los homomorfismos asociados a derecha e izquierda, establecemos los conceptos de *Forma Degenerada, Forma Ordinaria* y *Forma No Singular*, para, finalmente, definir el concepto de ortogonalidad respecto a una forma bilineal y establecer sus propiedades básicas, lo que nos permitiría definir también el rango de una forma bilineal. Todo ello expuesto en seis apartados, de 01 a 06, por lo que empezaremos ahora este artículo con el apartado 07.

La novedad que introducimos en este trabajo es que ahora los espacios *V* y *W* utilizados antes son *el mismo espacio vectorial*, por lo que aquí trataremos de formas bilineales sobre un espacio vectorial dado *(V;k).*

07. Formas bilineales sobre un espacio vectorial

Consideremos el conjunto de las formas bilineales definidas del producto cartesiano de los k-espacios V y W en su cuerpo de definición.

$$L(V,W;k)$$

Si hacemos $V=W$, representaremos tal conjunto por $L^2(V)$. Es decir, si $f\in L^2(V)$, $\forall x,y\in V^2, f(x,y)\in k$, siendo obviamente válidos los teoremas vistos en las secciones anteriores para el caso de que los espacios V y W pudieran ser distintos.

Teorema 07.1:
Se verifican los siguientes isomorfismos

a) $L^2(V)\approx Mat_n(k)$

b) $L^2(V)\approx Hom(V,V^*)$

Demostración:

a) se verifica por el Teorema 02.2, y b) es asimismo un caso particular del Teorema 03.1.

Definición 07.1: Se definen las formas simétricas y antisimétricas (o alternadas) del siguiente modo:

$$f\in L^2(V)\ simetrica \leftrightarrow \forall(x,y)\in V^2,\ f(x,y)=f(y,x)$$

$$f\in L^2(V)\ antisimetrica \leftrightarrow \forall(x,y)\in V^2,\ f(x,y)=-f(y,x)$$

Representaremos por $L_s^2(V)$ y $L_a^2(V)$ los respectivos conjuntos de las formas bilineales simétricas y alternadas:

$$L_s^2(V)=\left\{ f \in L^2(V) / f(x,y)= f(y,x), \forall x,y \in V^2 \right\}$$

$$L_a^2(V)=\left\{ f \in L^2(V) / f(x,y)=-f(y,x), \forall x,y \in V^2 \right\}$$

Teorema 07.2:
Si el cuerpo *k* es de característica distinta de 2, entonces

$$\forall f \in L_a^2(V),\ f(x,x)=0$$

Demostración:
De ser $\forall (x,y)\in V^2,\ f(x,y)=-f(y,x)$, será $f(x,x)=-f(x,x)\rightarrow 2f(x,x)=0$ y siendo $car(k)\neq 2$, será necesariamente $f(x,x)=0$.

Teorema 07.3:
Los conjuntos $L_s^2(V)$ y $L_a^2(V)$ son subespacios vectoriales del k-espacio $L^2(V)$.
Demostración:

a) $\forall f,g \in L_s^2(V), \forall \alpha,\beta \in k, (\alpha f+\beta g)(x,y)=(\alpha f)(x,y)+(\beta g)(x,y)=$
$=\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)=\alpha f(y,x)+\beta g(y,x)=(\alpha f+\beta g)(y,x)\rightarrow$
$\rightarrow \alpha f+\beta g \in L_s^2(V)$

b) $\forall f,g \in L_a^2(V), \forall \alpha,\beta \in k, (\alpha f+\beta g)(x,y)=(\alpha f)(x,y)+(\beta g)(x,y)=$
$=\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)=-\alpha f(y,x)-\beta g(y,x)=-(\alpha f+\beta g)(y,x)\rightarrow$
$\rightarrow \alpha f+\beta g \in L_a^2(V)$

Teorema 07.4:
Si el cuerpo *k* es de característica distinta de 2, entonces

$$L_s^2(V)\cap L_a^2(V)=\{0\}$$

Demostración:

$$\forall f \in L_s^2(V)\cap L_a^2(V), \forall x,y \in V^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x,y)= f(y,x) \\ f(x,y)=-f(y,x) \end{array} \right. \rightarrow f(x,y)=-f(x,y)\rightarrow$$

$\rightarrow 2.f(x,y)=0 \rightarrow f(x,y)=0 \rightarrow f=0$

Es decir, $\forall f \in L_s^2(V)\cap L_a^2(V),\ f=0 \rightarrow L_s^2(V)\cap L_a^2(V)=\{0\}$

Teorema 07.5:
Sea *k* un cuerpo de característica distinta de 2.
Se verifica que el espacio vectorial de las formas bilineales sobre un *k*-espacio vectorial *V* dado es la suma directa de los subespacios de las formas bilineales simétricas y alternadas:

$$L_s^2(V)\oplus L_a^2(V)=L^2(V)$$

Demostración:

a) Veamos que $L_s^2(V)+L_a^2(V)=L^2(V)$, es decir, que cualquier elemento de $V^2(k)$ es la suma de un elemento de $L_s^2(V)$ más un elemento de $L_a^2(V)$:
$\forall f \in V^2(k), \forall (x,y)\in V^2$, sean

$$\varphi_1(x,y)=\frac{1}{2}\left[f(x,y)+f(y,x)\right] \text{ y } \varphi_2(x,y)=\frac{1}{2}\left[f(x,y)-f(y,x)\right]$$

es obvio que $\varphi_1(x,y)=\varphi_1(y,x)$ y $\varphi_2(x,y)=-\varphi_2(y,x)$, cumpliéndose que

$$\varphi_1(x,y)+\varphi_2(y,x)=\frac{1}{2}\left[f(x,y)+f(y,x)\right]+\frac{1}{2}\left[f(x,y)-f(y,x)\right]=f(x,y)$$

En definitiva, es $\forall f \in L^2(V),\ f=\varphi_1+\varphi_2,\ \varphi_1 \in L_s^2(V), \varphi_2 \in L_a^2(V)$, por lo que

$$L_s^2(V)+L_a^2(V)=L^2(V)$$

b) Del teorema anterior $L_s^2(V)\cap L_a^2(V)=\{0\}$

En definitiva:

$$\left\{\begin{array}{c} L_s^2(V)+L_a^2(V)=L^2(V) \\ L_s^2(V)\cap L_a^2(V)=\{0\} \end{array}\right. \rightarrow L_s^2(V)\oplus L_a^2(V)=L^2(V)$$

Teorema 07.6:
Toda matriz cuadrada se descompone en la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.
Demostración:
Por el teorema 07.1 a), $L^2(V)\approx Mat_n(k)$ siendo $n=\dim V$. Sea Φ dicho isomorfismo y consideremos una base $B=\{e_1,...,e_n\}$ cualquiera del espacio V. Se tiene:

$$\Phi: L^2(V)\rightarrow Mat_n(k)$$

es decir, $\forall f \in L^2(V), \Phi(f)=A\in Mat_n(k)$, $A=\left(a_{ij}\right)_n$ con $a_{ij}=f(e_ie_j),\ i,j=1,...,n$

por el teorema 07.5, $\exists \varphi_1 \in L_s^2(V), \varphi_2 \in L_a^2(V)$ tales que $f=\varphi_1+\varphi_2, \forall f \in L^2(V)$.
Luego $\Phi(f)=\Phi(\varphi_1+\varphi_2)=\Phi(\varphi_1)+\Phi(\varphi_2)=A_1+A_2 \in Mat_n(k)$, $A_1=(a_{ij}^1)_n,\ A_2=(a_{hk}^2)_n$
con $a_{ij}^1=\varphi_1(e_ie_j),\ i,j=1,...,n$, $a_{hk}^2=\varphi_2(e_he_k),\ h,k=1,...,n$

- Como $\varphi_1 \in L_s^2(V)$, $a_{ij}^1=\varphi_1(e_ie_j)=\varphi_1(e_je_i)=a_{ji}^1 \rightarrow A=(a_{ij}^1)_n$ *simetrica*
- Como $\varphi_2 \in L_a^2(V)$, $a_{hk}^2=\varphi_2(e_he_k)=-\varphi_2(e_ke_h)=-a_{kh}^2 \rightarrow A=(a_{hk}^2)_n$ *antisimetrica*

Definición 07.2:
Sea $f \in L^2(V)$ y sean W_1, W_2 subespacios de *V* tales que $V=W_1+W_2$. Si W_1 y W_2 son ortogonales respecto de f, se dice que *V* es la *suma ortogonal* de W_1 y W_2 ($V=W_1\perp W_2$).

Definición 07.3:
El elemento $x\in V-\{0\}$ es isótropo respecto a $f \in L^2(V)$ sii $f(x,x)=0$.
Una variedad lineal $M\subseteq V$ se dice que es isótropa sii $M\cap\omega(M)\neq\phi$ y se dice que es totalmente isótropa si además es $M\subseteq\omega(M)$.
Una variedad lineal $M\subseteq V$ se dice que es totalmente isótropa maximal sii se verifica que $M\cap\omega(M)\neq\phi, M\subseteq\omega(M)$ y $\forall N\subseteq V / N\subseteq\omega(N), M\subseteq N\rightarrow M=N$.

Teorema 07.7:

Sea $f \in L^2(V)$ ordinaria y *M* variedad lineal de *V*. Se verifica que

$$M \cap \omega(M) = \phi \leftrightarrow V = M \perp \omega(M)$$

Demostración:
- Si $V = M \perp \omega(M)$ y $f \in L^2(V)$ es obvio que, por definición, $M \cap \omega(M) = \phi$.
- Veamos la implicación en sentido contrario:
Sabemos que si L_1 y L_2 son variedades lineales de un determinado espacio vectorial V, se verifica que

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$$

en nuestro caso consideramos las variedades $L_1 = M$ y $L_2 = \omega(M)$, ambas ortogonales: $\dim(M + \omega(M)) = \dim M + \dim \omega(M) - \dim(M \cap \omega(M))$
Como, por el teorema 05.1, 10) sabemos que $\dim M = co\dim \omega(M) = n - \dim \omega(M)$ se tendrá que

$$\dim V = n = \dim M + \dim \omega(M) = \dim(M + \omega(M)) + \dim(M \cap \omega(M))$$

O sea,

$$\dim V = \dim(M + \omega(M)) + \dim(M \cap \omega(M))$$

De lo cual,

$$\text{si } M \cap \omega(M) = \phi \rightarrow \dim(M \cap \omega(M)) = 0$$

quedando

$$\dim V = \dim(M + \omega(M)) \rightarrow V = M + \omega(M)$$

con lo que, al ser M y $\omega(M)$ ortogonales, será $V = M \perp \omega(M)$

Teorema 07.8:
Sea $f \in L^2(V)$ ordinaria y M variedad lineal de V. Se verifica que

$$M \textit{ no isótropa} \leftrightarrow \omega(M) \textit{ no isótropa}$$

Demostración:
Por el teorema 05.1,11) sabemos que si f es ordinaria se verifica que $M = \omega^2(M)$, por lo que

$$M \textit{ no isótropa} \leftrightarrow M \cap \omega(M) = \{0\} \leftrightarrow \omega^2(M) \cap \omega(M) = \{0\} \leftrightarrow \omega(M) \textit{ no isótropa}$$

Definición 07.4:
Dados dos *k*-espacios vectoriales, V_1 y V_2, y formas bilineales cualesquiera $f_1 \in L^2(V_1)$ y $f_2 \in L^2(V_2)$, se dice que un homomorfismo $\sigma : V_1 \rightarrow V_2$ es métrico respecto a f_1 y f_2 sii $f_2(\sigma x, \sigma y) = f_1(x, y), \forall x, y \in V_1$.
Si σ es isomorfismo se denomina *isometría.*
(Tal denominación se debe a que la distancia en los espacios métricos se define mediante una forma bilineal)

08.1 Acerca de las Formas Simétricas

08.1. Existencia de bases ortogonales:
Definición 08.1:

Sea V un k-espacio vectorial donde el cuerpo k de definición es de característica distinta de 2, y sea $f \in L^2(V)$ una forma bilineal. Una base $B=\{u_1,...,u_n\}$ del espacio V se dice *ortogonal* respecto de *f* sii $f(u_i,u_j)=0,\ si\ i\neq j$.

Teorema 08.1:
$\forall f \in L^2_s(V) \wedge \dim V \geq 1$ existe una base de *V* ortogonal respecto de *f*.
Demostración

- Supongamos que f es una forma bilineal simétrica ordinaria:

Si *dimV=1*, la proposición es obvia.
Si *dimV=n>1*, supongámosla cierta para algún $n_0 < n$.
Siempre existirá algún elemento no nulo, $u_1 \in V-\{0\}$, tal que $f(u_1,u_1)\neq 0$, ya que si no fuera así se tendría que:
$\forall x,y\in V,\ f(x+y,x+y)=f(x,x)+f(x,y)+f(y,x)+f(y,y)=$
$=0+f(x,y)+f(y,x)+0=0$. Es decir, $\forall x,y\in V,\ f(x,y)+f(y,x)=0$
como *f* es, por hipótesis, simétrica, será $\forall x,y\in V, 2f(x,y)=0$, y, finalmente, como el cuerpo *k* es de característica distinta de 2: $\forall x,y\in V,\ f(x,y)=0$, con lo que la forma bilineal $f\in L^2_s(V)$ no sería ordinaria, contra la hipótesis.
En definitiva, existe algún $u_1\in V-\{0\}$, tal que $f(u_1,u_1)\neq 0$.
Llamemos $H=H(u_1)$ el espacio engendrado por u_1 y sea $\omega(H)$ la variedad ortogonal a *H*, esto es, que cumpla que $\forall x\in H, \forall z\in\omega(H),\ f(x,z)=0$. Como se tiene que $\forall x\in H, \exists a\in k\,/\,x=au_1$, será $\forall z\in\omega(H),\ f(x,z)=a.f(u_1,z)=0$, siendo $z\neq u_1$, pues por construcción hemos elegido a u_1 de modo que $f(u_1,u_1)\neq 0$. Es decir, se tiene que $H\cap\omega(H)=\phi$, lo cual implica, por el teorema 07.7, que se verifica la suma ortogonal $H\perp\omega(H)=V$.
Repitiendo el proceso ahora para otro elemento $u_2\in\omega(H)$, se tiene que $f(u_2,u_2)\neq 0,\ f(u_1,u_2)=0,\ f(u_1,u_1)\neq 0$, siendo ahora $H(u_1,u_2)\perp\omega(H)=V$.
Así, mediante inducción encontramos que existe un conjunto $\{u_1,...,u_n\}$ de n elementos de *V* tal que $H(u_1,...,u_n)\perp\omega(H)=V$. Como la dimensión de V es n, el espacio engendrado por $\{u_1,...,u_n\}$ es precisamente V, cumpliéndose que

$$f(u_i,u_i)\neq 0,\ i=1,...,n$$
$$f(u_i,u_j)=0,\ si\ i\neq j$$

En definitiva, encontramos una base ortogonal, $\{u_1,...,u_n\}$, en el espacio V.

- Sea ahora el caso en el que f es no ordinaria (degenerada):

Sea $V_0\subseteq V$ el núcleo de f, es decir $\forall x\in V-V_0,\ \forall y\in V_0, f(x,y)=0$, y llamemos W al complementario de V_0 en *V*: $W=V-V_0$. Obviamente es $W\cap V_0=\phi$, luego es $W\perp V_0=V$.
Sea $\{u_1,...,u_r\}$ una base de V_0.
La restricción de f a W , $f:WxW\to k$, es ordinaria, pues de no ser así, se tendría que $\exists x\in W-\{0\}\,/\,f(x,y)=0,\forall y\in W\to W\cap V_0\neq\phi$. Al ser ordinaria, encontramos en W una base ortogonal, mediante el proceso descrito antes. Sea $\{u_{r+1},...,u_n\}$ dicha base ortogonal en W.

Como es $W \perp V_0 = V$, el conjunto $\{u_1,...,u_{r+1},...,u_n\}$ es una base ortogonal de V.

Resumen analítico:
Si $f \in L_s^2(V)$ es ordinaria, existe una base ortogonal $\{u_1,...,u_n\}$ que genera el espacio V, es decir, tal que $f(u_i,u_j)=0,\ si\ i \neq j,\ \ f(u_i,u_i)=u_i^2 \neq 0,\ i=1,...,n$. Si llamamos $u_i^2 = a_i,\ i=1,...,n$, se tiene que $\forall x \in V,\ x = x_1u_1+...+x_nu_n$, cumpliéndose que $f(x,x)=x^2=x_1^2u_1^2+...+x_n^2u_n^2=a_1x_1^2+...+a_nx_n^2$, lo cual nos indica que para dos vectores, $x=x_1u_1+...+x_nu_n$ y $y=y_1u_1+...+y_nu_n$, será:

$$f(x,y) \equiv x.y = x_1y_1u_1^2+...+x_ny_nu_n^2 = a_1x_1y_1+...+a_nx_ny_n$$

que en forma matricial sería:

$$f(x,y)=(x_1,x_2,..,x_n)\begin{pmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & & ... \\ ... & ... & & ... \\ 0 & 0 & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Si $f \in L_s^2(V)$ es no ordinaria, existe también una base ortogonal $\{u_1,...,u_{r+1},...,u_n\}$ que genera el espacio V, de la que una parte genera al núcleo V_0 y el resto al espacio complementario $W=V-V_0$. Sean $\{u_{r+1},...,u_n\}$ los vectores que generan al núcleo V_0 y sean $\{u_1,...,u_r\}$ los vectores que generan a $W=V-V_0$. Se tendrá que

$$f(u_i,u_j)=0,\ si\ i \neq j,\ f(u_i,u_i)=u_i^2=a_i \neq 0,\ i \leq r,\ f(u_i,u_i)=u_i^2=a_i=0,\ i>r$$

Se tiene que $\forall x \in V,\ x=x_1u_1+...+x_ru_r+x_{r+1}u_{r+1}+...+x_nu_n$, y se cumple que

$$f(x,x)=x^2=x_1^2u_1^2+x_r^2u_r^2+x_{r+1}^2u_{r+1}^2...+x_n^2u_n^2=a_1x_1^2+...+a_rx_r^2+0+...+0=a_1x_1^2+...+a_rx_r^2$$

Para dos vectores cualesquiera, $x=x_1u_1+...+x_nu_n$ y $y=y_1u_1+...+y_nu_n$, será:
En forma matricial:

$$f(x,y)=(x_1,x_2,..,x_n)\begin{pmatrix} a_1 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & a_r & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

(la caja diagonal no nula de la matriz es de orden r)

08.2. Planos hiperbólicos. Existencia de planos hiperbólicos:
Definición 08.2:
Sea el par (V,f) constituido por un k-espacio vectorial V de dimensión 2, y una forma bilineal simétrica ordinaria $f \in L_s^2(V)$.

Se dice que (V, f) es un *plano hiperbólico* sii $\exists z \in V / z \neq 0 \wedge z^2 = 0$.
Una base $\{u_1, u_2\}$ de un plano hiperbólico se dice que es un *par hiperbólico* sii $u_1^2 = 0,\ u_2^2 = 0,\ u_1.u_2 = 1$.

Teorema 08.2:
Para todo plano hiperbólico (V, f) existe siempre un par hiperbólico $\{u_1, u_2\}$ que genera al k-espacio: $V = (u_1, u_2)$
Demostración:
Sea $z \in V / z \neq 0 \wedge z^2 = 0$, que existe por definición de plano hiperbólico, y sea $u \in V$ cualquiera tal que ambos generan el espacio: $V = (z, u)$.
Se cumple necesariamente que $zu \neq 0$, pues caso contrario, si $zu = 0$, entonces $z \in V_0$, y como f es ordinaria, $V_0 = \{0\}$, con lo que $z = 0$, contra la hipótesis de que $z \neq 0$.
Elijamos $b \in k$tal que $zbu = bzu = 1$, y elijamos también $a \in k$ por la condición de que $\left(az + bu\right)^2 = 0$.
Veamos que, entonces, ambos vectores, $u_1 = z$ y $u_2 = az + bu$, son un par hiperbólico del plano hiperbólico dado:
$u_1^2 = z^2 = 0$, por definición.
$u_2^2 = (az + bu)^2 = 0$, por construcción.
$u_1.u_2 = z(az + bu) = az^2 + zbu = 0 + 1 = 1$
En definitiva, $\{u_1, u_2\} = \{z, az + bu\}$ es un par hiperbólico.

Ejemplo:
Dado el plano hiperbólico (V, f) en el que es $z \in V / z \neq 0 \wedge z^2 = 0$, y es $u \in V$tal que el par genera al espacio, $V = (z, u)$. Encontrar un par hiperbólico sabiendo que es $zu = 1/3$.

- Encontramos $b \in k$ tal que $zbu = bzu = 1 \rightarrow b.\frac{1}{3} = 1 \rightarrow b = 3$.
- Encontramos $a \in k$ tal que $\left(az + bu\right)^2 = 0 \rightarrow a^2z^2 + b^2u^2 + 2az.bu =$

  $= 0 + 9u^2 + 2a = 0 \rightarrow a = -\frac{9}{2}u^2$

Par hiperbólico: $\{u_1, u_2\} = \left\{z, -\frac{9}{2}u^2 z + 3u\right\}$. Comprobamos:

$u_1^2 = z^2 = 0$, $u_2^2 = (az + bu)^2 = \left(-\frac{9}{2}u^2 z + 3u\right)^2 = 0$,

$u_1.u_2 = z(-\frac{9}{2}u^2 z + 3u) = -\frac{9}{2}u^2 z^2 + 3uz = 0 + 3.\frac{1}{3} = 1$

08.3. El primer teorema de Witt:
Teorema 08.3:

Si $f \in L_s^2(V)$ y son M_1, M_2 dos variedades lineales de V totalmente isótropas maximales, se tiene que $\dim M_1 = \dim M_2$.

Demostración:

Sea $M = M_1 \cap M_2$ y llamemos M_1' y M_2' a las respectivas variedades complementarias de M en M_1' y M_2' respectivamente.

Por ser M_1 y M_2 totalmente isótropas, $M_1 \subseteq \omega(M_1)$ y $M_2 \subseteq \omega(M_2)$, con lo que se tiene la suma ortogonal $M_1 = M \perp M_1'$ y $M_2 = M \perp M_2'$.

Puesto que $M_2' \subseteq M_2$, por Teorema 05.1, 1), será $\omega(M_2) \subseteq \omega(M_2')$, con lo que será $M_1' \cap \omega(M_2) \subseteq M_1' \cap \omega(M_2')$.

Por otra parte:

$x \in M_1' \cap \omega(M_2') \to x \in M_1 \to x \in M_1 \wedge M_1 \subseteq \omega(M_1) \to x \in \omega(M_1) \to$
$\to x \in \omega(M_1) \wedge M \subseteq M_1 \to \omega(M_1) \subseteq \omega(M) \to x \in \omega(M)$

y como $M_2 = M \cup M_2'$, por teorema 05.1, 6) $: \omega(M_2) = \omega(M \cup M_2') = \omega(M) \cap \omega(M_2')$,

luego $x \in M_1' \cap \omega(M_2') \to x \in \omega(M) \cap \omega(M_2') \to x \in \omega(M_2)$

En definitiva, $x \in M_1' \cap \omega(M_2') \to x \in M_1' \cap \omega(M_2) \to M_1' \cap \omega(M_2') \subseteq M_1' \cap \omega(M_2)$

y de ambas inclusiones de deduce la igualdad:

$$\left.\begin{array}{l} M_1' \cap \omega(M_2) \subseteq M_1' \cap \omega(M_2') \\ M_1' \cap \omega(M_2') \subseteq M_1' \cap \omega(M_2) \end{array}\right\} \to M_1' \cap \omega(M_2') = M_1' \cap \omega(M_2)$$

Ahora bien, si $x \in M_1' \cap \omega(M_2') \wedge x \neq 0$ entonces $x \notin M_2$, y la variedad lineal engendrada $L(M_2 \cup x)$ por la unión $M_2 \cup x$ verifica que es totalmente isótropa con $M_2 \subseteq L(M_2 \cup x)$ propiamente, lo cual es imposible. Por tanto $x = 0$ y se tiene que $M_1' \cap \omega(M_2') = M_1' \cap \omega(M_2) = \{0\}$

Del mismo modo encontramos que $M_2' \cap \omega(M_1') = M_2' \cap \omega(M_1) = \{0\}$.

Si es $n = \dim V$, se tiene que

$n \geq \dim\left(M_1' + \omega(M_2')\right) = \dim M_1' + \dim \omega(M_2') - \dim\left(M_1' \cap \omega(M_2')\right)$

y como hemos comprobado que $M_1' + \omega(M_2') = \{0\}$, será:

$n \geq \dim M_1' + \dim \omega(M_2') \to \dim M_1' \leq n - \dim \omega(M_2')$

Por el Teorema 05.1,10) es $\dim M_2' = n - \dim \omega(M_2')$, por lo que se tiene que

$$\dim M_1' \leq \dim M_2'$$

Razonando del mismo modo tendremos que

$$\dim M_2' \leq \dim M_1'$$

por lo cual, de ambas desigualdades:

$$\dim M_2' = \dim M_1' \to \dim M_2 = \dim M_1$$

Teorema 08.4:

Sea V un k-espacio vectorial, $f \in L_s^2(V)$ ordinaria, M variedad lineal de *V* y M_0 es el núcleo de *M* respecto de *f.*

Si se tiene la descomposición ortogonal $M = M_0 \perp U$ se cumple que si es $\{u_1, ..., u_r\}$ una base de M_0, existen elementos $v_1, ..., v_r$ de Vortogonales a U tales que cada par $\{u_i, v_i\}$ es un par hiperbólico que engendra un plano hiperbólico P_i de modo que se da la suma ortogonal

$$P_1 \perp ... \perp P_r \perp U$$

Demostración:
Como es $M_0 = (u_1,...,u_r) \perp U$, si consideramos $M_1 = (u_2,...,u_r) \perp U$ será, obviamente, $M_1 \subseteq M_0$, por lo que $\omega(M_0) \subseteq \omega(M_1)$.
Es decir, $\exists v_1 \in \omega(M_1) / v_1 \notin \omega(M_0)$, con lo que $v_1.u_1 \neq 0, v_1^2 = 0, u_1^2 = 0$, luego $\{u_1, v_1\}$ es un par hiperbólico, cuyo plano hiperbólico engendrado, $P_1 = (u_1, v_1)$, cumple que

$$P_1 \perp (u_2,...,u_r) \perp U.$$

Si repetimos el proceso, considerando ahora $M_2 = (u_3,...,u_r) \perp U$, será $M_2 \subseteq M_1$ y $\omega(M_1) \subseteq \omega(M_2)$, y $\exists v_2 \in \omega(M_2) / v_2 \notin \omega(M_1)$, con lo que el par $\{u_2, v_2\}$ verifica que $v_2.u_2 \neq 0, v_2^2 = 0, u_2^2 = 0$. Si es $P_2 = (u_2, v_2)$ se tiene la suma ortogonal

$$P_1 \perp P_2 \perp (u_3,...,u_r) \perp U.$$

Siguiendo inductivamente el proceso llegamos a

$$P_1 \perp P_2 \perp ... \perp P_r \perp U$$

lo que prueba el teorema.

Definición 08.3:
Una forma bilineal $f \in L_s^2(V)$ se dice que es *definida* sii $x \neq 0,\ f(x,x) = x^2 \neq 0$.

Teorema 08.5 (Primer Teorema de Witt para formas simétricas):
Si es V un k-espacio vectorial y $f \in L_s^2(V)$ ordinaria, existe una descomposición de *V* como suma directa

$$V = L_1 \oplus L_2 \oplus M$$

tal que L_1, L_2 son variedades totalmente isótropas maximales y la restricción de *f* a *H* es una forma simétrica definida.
Demostración:
El espacio V puede tener vectores isótropos o no tenerlos.
Si no hay vectores isótropos, entonces $L_1 = \phi, L_2 = \phi$,, con lo cual, en este caso, es $V = L_1 \oplus L_2 \oplus M$, y se verifica el teorema.
Veamos, por tanto, la prueba del teorema para el caso de que sí existen vectores isótropos en V.
En este caso existen variedades totalmente isótropas maximales, por el Lema de Zorn. Sea L_1 una variedad lineal totalmente isótropa maximal tal que $L_1 \neq \{0\}$.
Por ser L_1 totalmente isótropa verifica que $L_1 \subseteq \omega(L_1)$.
Llamemos H al complementario de L_1 en $\omega(L_1)$:

$$H = \omega(L_1) - L_1 \qquad [*]$$

cumpliéndose que $\forall x \in H / x \neq 0$, es $f(x,x) \equiv x^2 \neq 0$, pues si fuera $x^2 = 0$ entonces la variedad $N = (L_1, x)$ sería totalmente isótropa y $L_1 \subseteq N$, lo cual es imposible por ser L_1 totalmente isótropa maximal.

Es decir, L_1 es variedad lineal totalmente isótropa maximal y la restricción de *f* a *H* es definida.
Por el Teorema 08.4 se tiene que si $\{u_1,...,u_r\}$ es una base de L_1, existen vectores del espacio V, $v_1,...,v_r$, ortogonales a H tales que los pares $\{u_i,v_i\}, i=1,...,r$ son hiperbólicos y los planos $P_i=(u_i,v_i), i=1,...,r$, engendrados verifican la suma ortogonal $P_1 \perp P_2 \perp ... \perp P_r \perp H$.
Llamemos L_2 a la variedad lineal engendrada por los vectores $v_1,...,v_r$: $L_2=(v_1,...,v_r)$. Entonces L_2 es variedad lineal totalmente isótropa maximal que cumple que

$$P_1 \perp P_2 \perp ... \perp P_r \perp H = (L_2 \oplus L_1) \perp H = L_2 \oplus L_1 \oplus H$$

como por el teorema 05.1,6) es $\dim L_1 = n - \dim \omega(L_1)$, será $\dim L_1 + \dim \omega(L_1) = n$ y como de [*] es $L_1 + H = \omega(L_1)$ tenemos que $\dim L_1 + \dim(L_1 \oplus H) = n$
finalmente, al ser $L_2 = (v_1,...,v_r)$ será $\dim L_1 = \dim L_2$, con lo cual

$$\dim L_2 + \dim(L_1 + H) = n$$

y, en definitiva $L_2 \oplus L_1 \oplus H = V$

08.4. La Ley de Sylvester:
Teorema 08.6 (La ley de Inercia de Sylvester)
Dado un *k*-espacio vectorial *V* donde *k* es un cuerpo ordenado, y $f \in L_s^2(V)$ es una forma ordinaria, se verifica que existe un único entero *r* tal que para cualquier base ortogonal de *V* , $\{v_1,...,v_n\}$, con respecto a la forma *f*, indica el número exacto de elementos de la base tales que $f(v_i,v_i)=v_i^2>0$, cumpliéndose para los restantes vectores de la base que $f(v_i,v_i)=v_i^2<0$.
Demostración:
La familia de las bases ortogonales de un espacio vectorial no es vacía, por el teorema 08.1.
Sea $\{v_1,...,v_n\}$ una base ortogonal. Como la forma $f \in L_s^2(V)$ es ordinaria, se tendrá que $\forall v_i \in \{v_1,...,v_n\}, f(v_i,v_i) \equiv v_i^2 = x_i \neq 0$.
Supongamos que son positivos r de estos cuadrados:

$$\begin{cases} v_i^2 = x_i > 0, \text{ si } i \leq r \\ v_i^2 = x_i < 0, \text{ si } i > r \end{cases}$$

Supongamos otra base ortogonal distinta $\{u_1,...,u_n\}$ del mismo espacio vectorial en la que son positivos s de los cuadrados de sus elementos:

$$\begin{cases} u_i^2 = y_i > 0, \text{ si } i \leq s \\ u_i^2 = y_i < 0, \text{ si } i > s \end{cases}$$

Se trata de probar que r=s. Esto es, que el numero de elementos de cuadrado positivo es el mismo en cualquier base ortogonal del espacio.
Bastará probar que tomando los elementos de cuadrado positivo en una de las dos bases y los elementos de cuadrado negativo en la otra, el conjunto de todos ellos es linealmente independiente. Es decir, que los vectores
$v_1,...,v_r,u_{s+1},...,u_n$

son linealmente independientes.
Pues de ser así, se tendría que $r+n-s\leq n$ o bien que $r\leq s$.
Análogamente, si se tomaron los elementos de cuadrado positivo de la segunda base y los de cuadrado negativo de la primera
$u_1,...,u_s,v_{r+1},...,v_n$
se tendría que $s+n-r\leq n$, es decir, $s\leq r$
De ambas desigualdades se obtiene la igualdad buscada, r=s.
Veamos, pues, la independencia lineal:
$m_1v_1+...+m_rv_r+p_{s+1}u_{s+1}+...+p_nu_n=0\rightarrow m_1v_1+...+m_rv_r=-p_{s+1}u_{s+1}-...-p_nu_n$
elevando al cuadrado:
$m_1^2v_1^2+...+m_r^2v_r^2=p_{s+1}^2u_{\mathbf{s+1}}^2+...+p_n^2u_n^2$
o bien
$m_1^2x_1+...+m_r^2x_r=p_{s+1}^2y_{s+1}+...+p_n^2y_n$
igualdad en la que el miembro de la izquierda es mayor o igual a cero, mientras que el miembro de la derecha es menor o igual a cero

$$\left.\begin{array}{c} m_1^2x_1+...+m_r^2x_r\geq 0 \\ p_{s+1}^2y_{s+1}+...+p_n^2y_n\leq 0 \end{array}\right\}$$

de lo que se deduce que ambos miembros son nulos y que, por tanto, los coeficientes son todos igual a cero

$$m_1=...=m_r=p_{s+1}=...=p_n=0$$

y los vectores $v_1,...,v_r,u_{s+1},...,u_n$ son linealmente independientes.
Por analogía, también son linealmente independientes $u_1,...,u_s,v_{r+1},...,v_n$.

Corolario 1:
Si los elementos del cuerpo son cuadrados, existe una base ortogonal $\{v_1,...,v_n\}$ de V tal que $v_i^2=1, i\leq r$ y $v_i^2=-1, i>r$, estando r unívocamente determinado.
Demostración:
Basta tomar un a base ortogonal cualquiera y dividir cada vector de la misma por el elemento de k que corresponde a su cuadrado.
Así, si es $w_i^2=x_i>0, i\leq r$ y $w_i^2=x_i<0, i>r$, se tiene:

$$v_i^2=w_i^2/x_i=1, i\leq r$$
$$v_i^2=w_i^2/x_i=-1, i>r$$

La base $\{v_1,...,v_n\}$ se denomina *base ortonormal* con respecto a la forma $f\in L_s^2(V)$

Definición 08.4:
Se dice que $f\in L_s^2(V)$ es definida positiva sii r=n, o sea: $\forall x\in V, f(x,x)\equiv x^2>0$
Se dice que $f\in L_s^2(V)$es definida negativa sii r=0, o sea: $\forall x\in V, f(x,x)\equiv x^2<0$

Corolario 2:
El k-espacio vectorial V donde el cuerpo k es ordenado y $f\in L_s^2(V)$ es ordinaria admite siempre una descomposición en suma ortogonal $V=V^+\perp V^-$ tal que f es definida positiva en V^+ y es definida negativa en V^-.
Demostración:
Es obvio, por la Ley de la Inercia de Sylvester.

Ejemplo:

El producto escalar ordinario en el R-espacio V_3 de los vectores de la física clásica, la forma bilineal $f : V_3^2 \to R$, definida por

$$\forall (x, y) \in V_3^2,\ \ f(x, y) \equiv x.y = x_1, y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_3 \in R,$$

siendo los vectores $x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3)$ en una base ortonormal dada, es una forma bilineal, simétrica, ordinaria y definida positiva.

09. Sobre las Formas Alternadas

Las formas antisimétricas o alternadas, $f \in L_a^2(V)$, verifican, como ya hemos establecido antes, que $\forall (x, y) \in V^2,\ f(x, y) = -f(y, x)$. Si el cuerpo k de definición del espacio V no es de característica 2, se tiene

$$\forall (x, x) \in V^2,\ f(x, x) = -f(x, x) \to 2.f(x, x) = 0 \to f(x, x) = 0$$

por lo que de forma natural se cumple que para un plano hiperbólico P cualquiera, no degenerado:

$$\forall u_1 \in P, u_1 \neq 0,\ f(u_1, u_1) = u_1^2 = 0\ ,\ \exists u_2 \in P / u_2 \neq 0,\ f(u_2, u_2) = u_2^2 = 0,\ f(u_1, u_2) \neq 0$$

pues de lo contrario P sería un plano hiperbólico degenerado y $u_1 \in P_0$ (núcleo de P)

Sea, pues, $\{u_1, u_2\}$ un par hiperbólico de P. Dividiendo ambos vectores por una constante podemos considerarlo normalizado:

$$u_1^2 = 0,\ u_2^2 = 0,\ f(u_1, u_2) = 1,\ f(u_2, u_1) = -1$$

La matriz de la forma alternada en el plano hiperbólico P se obtiene de inmediato:
Dados dos vectores x,y, expresados en el par hiperbólico:

$$x = x_1 u_1 + x_2 u_2$$
$$y = y_1 u_1 + y_2 u_2$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
&\forall (x, y) \in P^2,\ f(x, y) = f(x_1 u_1 + x_2 u_2, y_1 u_1 + y_2 u_2) = \\
&= x_1 y_1 f(u_1, u_1) + x_1 y_2 f(u_1, u_2) + x_2 y_1 f(u_2, u_1) + x_2 y_2 f(u_2, u_2) \equiv \\
&\equiv x_1 y_1 u_1^2 + x_1 y_2.u_1.u_2 + x_2 y_1.u_2.u_1 + x_2 y_2 u_2^2 = 0 + x_1 y_2.1 + x_2 y_1.(-1) + 0 = \\
&= x_1 y_2 - x_2 y_1
\end{aligned}$$

Matricialmente:

$$\forall (x, y) \in P^2,\ f(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Definición 09.1:
Denominamos espacio hiperbólico a una suma ortogonal de planos hiperbólicos.

Teorema 09.1:
Dado un k-espacio vectorial *V* y $f \in L_a^2(V)$, se verifica la suma ortogonal

$$V = V_0 \perp H$$

Siendo V_0 el núcleo de *V* , y *H* un subespacio hiperbólico de *V*.
Demostración:
Si es V_0 el núcleo de V, su complementario es no degenerado
$\forall w \in V / w \neq 0, w^2 = 0, \exists y \in V / w.y \neq 0$, con $y \neq 0, y^2 = 0$, $\rightarrow (w, y)$ no degenerado y $P = (w, y)$ es un plano hiperbólico que verifica que $P \cap \omega(P) = \{0\}$, por lo que, aplicando el teorema 07.7, $V = P \oplus \omega(P)$, siendo $\omega(P)$ no degenerado. Aplicando inducción completamos el razonamiento.

Corolario:
Todas las formas alternadas no degeneradas, de dimensión dada sobre un cuerpo k, son isométricas.
Demostración:
Si las formas alternadas son no degeneradas los núcleos se reducen a $\{0\}$, y los espacios vectoriales sobre los que están definidas son suma directa de planos hiperbólicos, y la aplicación que a un par hiperbólico de un espacio vectorial adjudica un par hiperbólico de otro espacio vectorial es claramente una isometría.

Bibliografía

Noble, B.; Daniel, J.W., Applied Linear Algebra, Prentice Hall, Londres, 1988
Sainz, M.A.; Serarols, J.L.; Pérez A. M., Algebra, Escuela Politécnica Superior, Gerona, 1994
Sancho, J., Algebra Lineal y Geometría, Universidad de Zaragoza, 1994