## FORMAS BILINEALES I

# Introducción a las formas bilineales

### 01.Definición

Dado un cuerpo conmutativo k y dos k-espacios vectoriales, V y W, consideremos las aplicaciones $f : VxW \to k$, es decir, tales que $\forall (x,y) \in VxW,\ f(x,y) \in k$.

Una aplicación $f : VxW \to k$ es bilineal si verifica que $\forall x_1, x_2 \in V, \forall y_1, y_2 \in W$ es

$$f(x_1 + x_2, y_1) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1)$$
$$f(x_1, y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2)$$
$$\forall a \in k,\ f(ax_1, y_1) = f(x_1, ay_1) = af(x_1, y_1)$$

Teorema 01.1.
El conjunto de todas las aplicaciones bilineales de VxW en k, que representamos por $L(V,W;k)$, tiene estructura de espacio vectorial sobre k, definiendo la suma y el producto por un escalar en la forma:

$$\forall (x,y) \in VxW, \forall a \in k:$$
$$(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$$
$$(af)(x,y) = af(x,y) = f(ax,y) = f(x,ay)$$

Demostración:
Trivial. La suma confiere a $L(V,W;k)$ estructura de grupo abeliano, y el producto por un escalar verifica las cuatro condiciones de la definición de espacio vectorial. Por tanto, con respecto a ambas operaciones es $(L(V,W;k),+,.)$ un k-espacio vectorial.

### 02.Expresión analítica

Expresemos la imagen de un par cualquiera del espacio producto $VxW$ en función de las bases de ambos k-espacios.
Sea $B_1 = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ base de V, y sea $B_2 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ base de W

De ser $\forall x \in V,\ x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$, $\forall y \in W,\ y = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j$, se tiene:

$$\forall (x,y) \in VxW,\ f(x,y) = \left( \sum_{i=1}^{m} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j \right) = \sum_{i,j} x_i y_j f(e_i, u_j) = \sum_{i,j} x_i y_j a_{ij}$$

donde es $a_{ij} = f(e_i, u_j), i = 1,...,m; j = 1,...,n,$
Es decir,

$$\forall(x,y) \in VxW,\ f(x,y) = \sum_{i,j} x_i y_j a_{ij} = (x_1,...,x_m).(a_{ij})_{mxn} \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = X^t AY$$

Esto nos indica que a cada forma bilineal f le corresponde una matriz A que tiene tantas filas como sea la dimensión del espacio V, y tantas columnas como dimensión tenga W.

La matriz A no depende de las bases elegidas. Veámoslo mediante el siguiente teorema.

Teorema 02.1: El valor de $f(x,y)$ no varía, tanto si lo expresamos analíticamente en las bases $B_1 = \{e_1, e_2,..., e_m\}$ y $B_2 = \{u_1, u_2,..., u_n\}$, como si lo expresamos en las bases $B'_1 = \{e'_1, e'_2,..., e'_m\}$ y $B'_2 = \{u'_1, u'_2,..., u'_n\}$.
Demostración:
Se trata de probar que si es

$$f(x,y) = X^t AY \text{ en las bases } B_1 = \{e_1, e_2,..., e_m\} \text{ y } B_2 = \{u_1, u_2,..., u_n\}$$

Y es

$$f(x,y) = X'^t A'Y' \text{ en las bases } B'_1 = \{e'_1, e'_2,..., e'_m\} \text{ y } B'_2 = \{u'_1, u'_2,..., u'_n\}$$

entonces es

$$f(x,y) = X^t AY = X'^t A'Y'$$

Sean $A = (a_{ij})_{mxn} = (f(e_i, u_j))_{mxn}$, $A' = (a'_{hk})_{mxn} = (f(e'_h, u'_k))_{mxn}$, y sean las matrices de paso dadas por

$$\{e_i\}_m \to \{e'_h\}_m : e'_h = p_{hi} e_i,\ h,i = 1,...,m$$

$$\{u_j\}_n \to \{u'_k\}_n : u'_k = q_{kj} u_j,\ k,j = 1,...,n$$

Se tiene que

$$a'_{hk} = f(e'_h, u'_k) = f(p_{hi} e_i, q_{kj} u_j) = p_{hi} f(e_i, u_j) q_{jk} = p_{hi} a_{ij} q_{jk} \to A' = PAQ^t$$

donde hemos llamado $P = (p_{hi})_m$ y $Q = (q_{kj})_n$.

Por otra parte es

$$\left.\begin{array}{l} x = x_i e_i \\ x = x'_h e'_h = x'_h p_{hi} e_i \end{array}\right\} \to x_i = x'_h p_{hi} \to X^t = X'^t P \to X = P^t X'$$

$$\left.\begin{array}{l} y = y_j u_j \\ y = y'_k u'_k = y'_k q_{kj} u_j \end{array}\right\} \to y_j = y'_k q_{kj} \to Y^t = Y'^t Q \to Y = Q^t Y' \qquad [*]$$

y, al sustituir [*]: $f(x,y) = X^t AY = X'^t PAQ^t Y' = X'^t A'Y'$

Ejemplo:
Consideremos los R-espacios vectoriales V y W, de dimensiones respectivas 3 y 2, y sean bases de ambos espacios $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B_2 = \{u_1, u_2\}$. Veamos la imagen mediante la forma bilineal f de los vectores $x = e_1 - 2e_2 + e_3$, $y = -u_1 + u_2$:

$$f(x,y)=f(e_1-2e_2+e_3,\ -u_1+u_2)=$$
$$=-f(e_1,u_1)+f(e_1,u_2)+2f(e_2,u_1)-2f(e_2,u_2)-f(e_3,u_1)+f(e_3,u_2)$$

llamando $a_{ij}=f(e_i,u_j),\ i=1,2,3,\ j=1,2$, se tiene:

$$f(x,y)=-a_{11}+a_{12}+2a_{21}-2a_{22}-a_{31}+a_{32}$$

O bien, en forma matricial:

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A cada forma bilineal f le corresponde, en definitiva, una matriz de orden *mxn*, siendo *m* la dimensión del espacio V, y n la dimensión del espacio W. La comprobación de que esta correspondencia es biyectiva se puede establecer mediante el siguiente teorema de isomorfismo.

Teorema 02.2: El k-espacio de las formas bilineales $L(V,W;k)$ es isomorfo al k-espacio $Mat_{mxn}(k)$ de las matrices rectangulares de orden mxn, siendo el número de filas de estas matrices la dimensión de V, $\dim V=m$, y el número de columnas la dimensión de W, $\dim W=n$.

Demostración:

Consideremos la aplicación que haga corresponder a cada forma bilineal f la matriz correspondiente en un par de bases dadas, esto es:

$$\varphi: L(V,W;k)\to Mat_{mxn}(k)$$

tal que si $\forall f\in L(V,W;k),\ f(x,y)=X^tAY$ entonces

$$\varphi(f)=A\in Mat_{mxn}(k)$$

- Veamos que es un homomorfismo:
  Se tiene que, llamando $\varphi(f)=A_1,\ \varphi(g)=A_2$, será:
  $$\forall(x,y)\in VxW,\ (\alpha f+\beta g)(x,y)=\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)=\alpha X^tA_1Y+\beta X^tA_2Y=$$
  $$=X^t\alpha A_1Y+X^t\beta A_2Y=X^t(\alpha A_1+\beta A_2)Y$$
  por lo que $\varphi(\alpha f+\beta g)=\alpha A_1+\beta A_2$, es decir, $\varphi(\alpha f+\beta g)=\alpha\varphi(f)+\beta\varphi(g)$
- Veamos que es inyectivo:
  se trata de probar que $f,g\in L(V,W;k),\ \varphi(f)=\varphi(g)\to f=g$.
  Como es $\varphi(f)=A_f,\ \varphi(g)=A_g$ se tiene que
  $$\varphi(f)=\varphi(g)\to A_f=A_g\to\forall(x,y)\in VxW,\ X^tA_fY=X^tA_gY\to$$
  $$\to f(x,y)=g(x,y)\to f=g$$
- Veamos que es sobreyectivo:
  $$\forall A\in Mat_{mxn}(k),\ \exists h: VxW\to k\ /\ \forall x,y\in VxW,\ h(x,y)=X^tAY,$$ es decir:
  $$\forall A\in Mat_{mxn}(k),\ \exists h\in L(V,W;k)\ /\ \varphi(h)=A$$

En definitiva, la aplicación $\varphi: L(V,W;k)\to Mat_{mxn}(k)$ es isomorfismo.

## 03.Los homomorfismos asociados

Sea la forma bilineal

$$f \in L(V,W;k)$$

Se llama *homomorfismo asociado a f por la derecha* a la aplicación

$$f_d(y): V \to k, \ \ \forall y \in W$$

definida por la condición de que

$$\forall x \in V, \ \ f_d(y)(x) = f(x,y) \in k$$

Se llama *homomorfismo asociado a f por la izquierda* a la aplicación

$$f_i(x): W \to k, \ \ \forall x \in V$$

definida por la condición de que

$$\forall y \in W, \ \ f_i(x)(y) = f(x,y) \in k$$

Si llamamos $V^*$ al conjunto de las aplicaciones lineales de V en k (es el espacio dual de V), y $W^*$ al conjunto de las aplicaciones lineales de W en k (espacio dual de W), se tiene que, de acuerdo con la definición anterior, es:

$$f_d(y) \in V^*, \quad f_i(x) \in W^*$$

es decir:

$$f_d(y): V \to k, \text{ o sea } \forall y \in W, \ f_d(y) \in V^* \ \text{ y } \ f_i(x): W \to k, \text{ o sea } \forall x \in V, \ f_i(x) \in W^*$$

o bien:

$$f_d : W \to V^* \ \text{ y } \ f_i : V \to W^*$$

Tanto el espacio de todos los homomorfismos a la derecha, $Hom(W,V^*)$, como el espacio de todos los homomorfismos a la izquierda, $Hom(V,W^*)$, resultan ser isomorfos al espacio $L(V,W;k)$ de las formas bilineales sobre ambos espacios vectoriales V y W. Esto lo mostramos a continuación mediante un sencillo teorema.

Teorema 03.1: Se verifican los isomorfismos siguientes

$$1) \ L(V,W;k) \approx Hom(W,V^*)$$
$$2) \ L(V,W;k) \approx Hom(V,W^*)$$

Demostración:

1) Bastará definir la aplicación

$$\Phi : L(V,W;k) \to Hom(W,V^*)$$

por la condición

$$\forall f \in L(V,W;k), \Phi(f) = f_d \in Hom(W,V^*)$$

Veamos que se trata de un homomorfismo que es, además, inyectivo y sobreyectivo, es decir, un isomorfismo.

Para ver que se trata de un homomorfismo hemos de comprobar que

$\forall f,g \in L(V,W;k), \forall (a,b) \in k^2, \Phi(af+bg) = a\Phi(f) + b\Phi(g)$

Se tiene que $\forall (x,y) \in VxW$ es $\Phi(af+bg) = (af+bg)_d y$, por definición:

$$\Phi(af+bg) = (af+bg)_d \to \forall (x,y) \in VxW, \Phi(af+bg)(y)(x) = (af+bg)_d(y)(x) =$$
$$= (af+bg)(x,y) = af(x,y) + bf(x,y) = af_d(y)(x) + bg_d(y)(x) =$$
$$= a\Phi(f) + b\Phi(g)$$

Veamos que es inyectivo, es decir, veamos que se verifica la implicación $\Phi(f) = \Phi(g) \to f = g$:

$\forall (x,y) \in VxW$,

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(f)(y)(x) = f_d(y)(x) = f(x,y) \\ \Phi(g)(y)(x) = g_d(y)(x) = g(x,y) \end{array}\right\} \to f(x,y) = g(x,y) \to f = g$$

Veamos que también es sobreyectivo, o sea, que $\forall l \in Hom(W,V^*), \exists h \in L(V,W;k) / \Phi(h) = l$, lo cual es inmediato, ya que la aplicación $h: VxW \to k$ tal que $h(x,y) = l(h)(x) \in k$ es trivialmente bilineal, es decir, $h \in L(V,W;k)$ y además se cumple que $\Phi(h) = l$.

2) Análogamente probamos que se verifica $L(V,W;k) \approx Hom(V,W^*)$, es decir, definiendo $\Phi_2 : L(V,W;k) \to Hom(V,W^*)$ y comprobando del mismo modo que se trata de un isomorfismo.

## 04. Formas degeneradas, ordinarias y no singulares

Dada la forma bilineal $f \in L(V,W;k)$, se denomina *núcleo de f a la izquierda* al conjunto $V_0 \subseteq V$ tal que

$$\forall x \in V_0, \forall y \in W, \ f(x,y) = 0$$

Asimismo, se denomina *núcleo de f a la derecha* al conjunto $W_0 \subseteq W$ tal que

$$\forall y \in W_0, \forall x \in V, \ f(x,y) = 0$$

Una forma bilineal $f \in L(V,W;k)$ se dice que es *no degenerada a la izquierda* sii es $V_0 = \{0\}$, y que es *no degenerada a la derecha* sii es $W_0 = \{0\}$.

Caso contrario diríamos que la forma bilineal es *degenerada a izquierda o derecha*, respectivamente.

Una forma bilineal $f \in L(V,W;k)$ se dice que es *no degenerada*, u *ordinaria*, si es no degenerada a izquierda y también no degenerada a derecha:

$$V_0 = \{0\}, \quad W_0 = \{0\}$$

Los conjuntos $V_0 \subseteq V$ y $W_0 \subseteq W$ son trivialmente subespacios vectoriales de V y W, respectivamente.

Consideremos en $V$ y en $W$ la relación de equivalencia inducida por el subespacio respectivo $V_0$ y $W_0$, y el espacio cociente por tal relación de equivalencia en ambos casos:

$$V/V_0 \text{ y } W/W_0$$

Los conjuntos $L(V/V_0, W; k)$ y $L(V, W/W_0; k)$ son, respectivamente, los k-espacios vectoriales definidos desde $V/V_0 \times W$ en $k$ y de $V \times W/W_0$ en $k$.

Asimismo, es espacio vectorial el conjunto $L(V/V_0, W/W_0; k)$ de las formas bilineales definidas desde $V/V_0 \times W/W_0$ en $k$.

Se verifica el siguiente teorema de no degeneración para estos espacios.

Teorema 04.1: Dada una forma bilineal $f \in L(V, W; k)$, de núcleos $V_0$ y $W_0$, a izquierda y derecha, respectivamente, se inducen las formas bilineales

$$f_1 \in L(V/V_0, W; k),\ f_2 \in L(V, W/W_0; k) \text{ y } f_r \in L(V/V_0, W/W_0; k)$$

que son, respectivamente:

1) $f_1$ no degenerada a izquierda.
2) $f_2$ no degenerada a derecha.
3) $f_r$ no degenerada (ordinaria).

Demostración:

$\forall x \in V$, llamemos $[x] \in V/V_0$ a la clase de equivalencia a la que pertenece x.

$\forall y \in W$, llamemos $[y] \in W/W_0$ a la clase de equivalencia a la que pertenece y.

1) Definamos $f_1 : V/V_0 \times W \to k$ por $\forall x \in V, \forall y \in W,\ f_1([x], y) = f(x, y) \in k$

- $f_1$ es aplicación, pues si $([x], y) = ([x'], y) \to [x] = [x'] \to x - x' \in V_0 \to$
  $\to f(x - x', y) = 0 \to f(x, y) - f(x', y) = 0 \to f(x, y) = f(x', y) \to$
  $\to f_1([x], y) = f_1([x'], y)$
- $f_1$ es bilineal obviamente, por ser $f$ bilineal.
- $f_1$ es no degenerada a izquierda, es decir, si $f_1([x], y) = 0 \to [x] = 0$, puesto que
  $\forall y \in W, f_1([x], y) = f(x, y) = 0 \to x \in V_0 \to [x] = 0$

2) Definamos $f_2 : V \times W/W_0 \to k$ por $\forall x \in V, \forall y \in W,\ f_2(x, [y]) = f(x, y) \in k$

- $f_2$ es aplicación, pues si $(x, [y]) = (x, [y']) \to [y] = [y'] \to y - y' \in W_0 \to$
  $\to f(x, y - y') = 0 \to f(x, y) - f(x, y') = 0 \to f(x, y) = f(x, y') \to$
  $\to f_2(x, [y]) = f_2(x, [y'])$
- $f_2$ es bilineal obviamente, por ser $f$ bilineal.
- $f_2$ es no degenerada a derecha, es decir, si $f_2(x, [y]) = 0 \to [y] = 0$, puesto que
  $\forall x \in V, f_2(x, [y]) = f(x, y) = 0 \to y \in W_0 \to [y] = 0$

3) Es inmediato, desde los apartados 1) y 2) anteriores. La forma $f_r$ se denomina también *forma reducida*.

Teorema 04.2: Se verifican las equivalencias siguientes

1) $f \in L(V,W;k)$ no degenerada a izquierda $\leftrightarrow f_i$ es monomorfismo.
2) $f \in L(V,W;k)$ no degenerada a derecha $\leftrightarrow f_d$ es monomorfismo.

Demostración:

Sabemos que tanto $f_i$ como $f_d$ son homomorfismos. Se trata de probar que con la condición de no degeneración, son necesariamente inyectivos. Esto es:

$x_1, x_2 \in V,\ f_i(x_1) = f_i(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$ y $y_1, y_2 \in W,\ f_d(y_1) = f_d(y_2) \rightarrow y_1 = y_2$

1) $f$ no degenerada $\leftrightarrow V_0 = \{0\} \wedge W_0 = \{0\}$

por lo que $x \in V_0 \leftrightarrow \forall y \in W,\ f_i(x)(y) = f(x,y) = 0 \leftrightarrow f_i(x) = 0 \leftrightarrow x \in \ker f_i$

por tanto es $V_0 = \ker f_i = \{0\}$

Si $f_i(x_1) = f_i(x_2) \rightarrow f_i(x_1) - f_i(x_2) = 0 \rightarrow f_i(x_1 - x_2) = 0 \rightarrow x_1 - x_2 \in \ker f_i$

Y como $\ker f_i = \{0\}$: $x_1 - x_2 \in \ker f_i = \{0\} \leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2$

Luego, el homomorfismo $f_i$ es inyectivo, y por consiguiente, monomorfismo.

2) La demostración de que $f_d$ es inyectivo es análoga, repitiendo los mismos pasos:

$y \in W_0 \leftrightarrow \forall x \in V,\ f_d(y)(x) = f(x,y) = 0 \leftrightarrow f_d(y) = 0 \leftrightarrow y \in \ker f_d$

y también es $W_0 = \ker f_d = \{0\}$

Se dice que $f \in L(V,W;k)$ es una forma bilineal *no singular a la derecha* sii $f_d$ es isomorfismo, y *no singular a la izquierda* sii $f_i$ es isomorfismo.

$f$ se dirá *no singular* sii tanto $f_i$ como $f_d$ son isomorfismos.

La no degeneración no implica la necesariamente la singularidad, pues por el anterior teorema, ambos homomorfismos asociados habrían de ser sólo monomorfismos, no necesariamente isomorfismos.

## 05.Ortogonalidad de vectores con respecto a una forma bilineal

05.1. Definición:

Dados dos k-espacios vectoriales, *V* y *W*, se dice que $x \in V$ es ortogonal a $y \in W$ respecto a la forma $f \in L(V,W;k)$ sii es $f(x,y) = 0$.

Podemos indicar la ortogonalidad de los vectores x e y por $x \perp y$, cuando se sobreentiende cuál es la forma bilineal que define la ortogonalidad.

Sean *P(V)* y *P(W)* los conjuntos de las parte de *V* y *W*, respectivamente (ambos conjuntos son álgebras de Boole), y consideremos la aplicación

$$\omega : P(V) \rightarrow P(W)$$

definida por la condición

$$\forall M \in P(V), \omega(M) = \{ y \in W / x \perp y, \forall x \in M \}$$

esto es, la aplicación que hace corresponder a cada parte de V el conjunto de elementos de W que son ortogonales a todos y cada uno de los elementos de M.

Análogamente podemos definir

$$\omega' : P(W) \to P(V)$$

por la condición

$$\forall N \in P(W), \omega'(N) = \{x \in V / x \perp y, \forall y \in N\}$$

(son los elementos de V que son ortogonales a cada elemento de la parte N de W)

05.2. Propiedades:

Teorema 05.1: Sean los k-espacios vectoriales V y W, de dimensiones respectivas $\dim V = m$ y $\dim W = n$. Se verifica:

01) $M \subseteq M' \to \omega(M') \subseteq \omega(M)$.

02) $M \subseteq \omega^2(M)$.

03) $\omega(M) = \omega^3(M)$.

04) $\omega(M)$ es subespacio vectorial de W.

05) Si es $L(M)$ la variedad lineal engendrada por M, $\omega(M) = \omega(L(M))$.

06) $\forall M, N \in P(V), \omega(M \cup N) = \omega(M + N) = \omega(M) \cap \omega(N)$.

07) Si son $M, N$ variedades lineales, $\omega(M) \cup \omega(N) \subseteq \omega(M) + \omega(N) \subseteq \omega(M \cap N)$

08) $V_0 = \ker f_i$ y $W_0 = \ker f_d$.

09) $\dim\left(V/\omega(W)\right) = \dim\left(W/\omega(V)\right)$.

10) Si es *M* variedad lineal de *V* y *f* es ordinaria: $co\dim\left(\omega(M)\right) = \dim M$ .

11) Si es *f* ordinaria, *M* variedad lineal y m=n $\to \omega^2(M) = M$.

12) Si es *f* ordinaria, *M, M'* var. lineales y m=n $\to \omega(M) \cap \omega(M') = \omega(M) + \omega(M')$

Demostración:

01) Se debe al carácter restrictivo de la condición de ortogonalidad: siempre es mayor (o igual) el número $\omega(M)$ de vectores ortogonales a los vectores del conjunto M, que el número de vectores que siendo ortogonales a M también son ortogonales a otros vectores no contenidos en *M, M'-M*, por lo que siempre será $\omega(M') \subseteq \omega(M)$.

02) El conjunto $\omega(M)$ contiene todos los vectores ortogonales a M, que también pueden ser ortogonales a otros vectores exteriores a M, por lo que el conjunto $\omega^2(M) = \omega(\omega(M))$ de los vectores ortogonales a $\omega(M)$ no es solo M, sino que también contiene a los vectores que siendo exteriores a M son ortogonales a los vectores de $\omega(M)$. Es decir, $M \subseteq \omega^2(M)$.

03) Del apartado 02), $M \subseteq \omega^2(M)$, por lo que aplicando el apartado 01), ha de ser $\omega^3(M) \subseteq \omega(M)$. Pero también se deduce de 02), sustituyendo M por $\omega(M)$, que $\omega(M) \subseteq \omega^2(\omega(M)) = \omega^3(M)$, por lo que

$$\left.\begin{array}{l} \omega^3(M) \subseteq \omega(M) \\ \omega(M) \subseteq \omega^3(M) \end{array}\right\} \to \omega(M) = \omega^3(M)$$

04) Bastará comprobar que $\forall y, z \in \omega(M), \forall a, b \in k, \ ay + bz \in \omega(M)$. Se tiene, efectivamente, que

$$\forall x \in M, \ f(x, ay + bz) = af(x, y) + bf(x, z) = 0 + 0 = 0 \to ay + bz \in \omega(M)$$

05) Del apartado 01), $M \subseteq L(M) \to \omega\left(L(M)\right) \subseteq (M)$

por otra parte: $\forall x \in L(M), \ x = \sum a_i x_i, \ x_i \in M$, por lo que, $\forall y \in \omega(M)$ es

$f(x, y) = \left(\sum a_i x_i, y\right) = \sum\left(a_i x_i, y\right) = \sum a_i (x_i, y) = \sum 0 = 0 \to y \in \omega\left(L(M)\right)$, es decir: $\omega(M) \subseteq \omega\big(L(M)\big)$

de ambas inclusiones se deduce la igualdad

$$\left.\begin{array}{l} \omega\big(L(M)\big) \subseteq (M) \\ \omega(M) \subseteq \omega\big(L(M)\big) \end{array}\right\} \to \omega(M) = \omega\big(L(M)\big)$$

06) Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} M \subseteq M \cup N \\ N \subseteq M \cup N \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} \omega\big(M \cup N\big) \subseteq \omega\big(M\big) \\ \omega\big(M \cup N\big) \subseteq \omega\big(N\big) \end{array}\right\} \to \omega\big(M \cup N\big) \subseteq \omega\big(M\big) \cap \omega\big(N\big)$$

por otra parte:

$$\forall y \in \omega\big(M\big) \cap \omega\big(N\big) \leftrightarrow y \in \omega\big(M\big) \wedge y \in \omega\big(N\big) \to \forall x \in M \cup N,\ f(x,y) = 0 \to$$
$$\to y \in \omega(M \cup N) \to \omega\big(M\big) \cap \omega\big(N\big) \subseteq \omega\big(M \cup N\big)$$

entonces, de ambas inclusiones:

$$\left.\begin{array}{l} \omega\big(M \cup N\big) \subseteq \omega\big(M\big) \cap \omega\big(N\big) \\ \omega\big(M\big) \cap \omega\big(N\big) \subseteq \omega\big(M \cup N\big) \end{array}\right\} \to \omega\big(M \cup N\big) = \omega\big(M\big) \cap \omega\big(N\big)$$

Si $M, N$ fueran variedades lineales, entonces $L(M \cup N) = M + N$, por lo que $\omega(M+N) = \omega\big(L(M \cup N)\big)$. Por el apartado 5): $\omega(M+N) = \omega\big(M \cup N\big)$, y por el apartado 6): $\omega(M+N) = \omega\big(M \cup N\big) = \omega\big(M\big) \cap \omega\big(N\big)$

07) Trivial.

08) Trivial.

09) Por el teorema 04.2, si consideramos que es $f_r \in L\big(V/\omega(W), W/\omega(V); k\big)$ reducida, se tienen los homomorfismos asociados:

$f_{ri} : V/\omega(W) \to \big(W/\omega(V)\big)^*$ monomorfismo

$f_{rd} : W/\omega(V) \to \big(V/\omega(W)\big)^*$ monomorfismo

de lo cual:

$$\dim\big(V/\omega(W)\big) \le \dim\big(W/\omega(V)\big)^* = \dim\big(W/\omega(V)\big)$$
$$\dim\big(W/\omega(V)\big) \le \dim\big(V/\omega(W)\big)^* = \dim\big(V/\omega(W)\big)$$

y de ambas desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} \dim\big(V/\omega(W)\big) \le \dim\big(W/\omega(V)\big) \\ \dim\big(W/\omega(V)\big) \le \dim\big(V/\omega(W)\big) \end{array}\right\} \to \dim\big(V/\omega(W)\big) = \dim\big(W/\omega(V)\big)$$

10) Si aplicamos la propiedad anterior a la restricción de *f* a $M \times W$, se tiene: $\dim\big(M/\omega(W)\big) = \dim\big(W/\omega(M)\big)$ y como tanto f como su restricción son ordinarias a izquierda, se tiene que $\omega(W) = \{0\}$. Por tanto:

$$\dim M = \dim\big(M/\omega(F)\big) = \dim\big(F/\omega(M)\big) = co\dim(\omega(M))$$

11) Del apartado 02): $M \subseteq \omega^2(M)$

y del apartado 10): $\dim \omega M = co\dim(\omega^2(M)) = m - \dim(\omega^2(M))$

$$\dim M = co\dim(\omega(M)) = n - \dim(\omega(M))$$

por tanto

$$\dim M = n - \dim(\omega(M)) = n - \big(m - \dim(\omega^2(M))\big) = (n-m) + \dim(\omega^2(M))$$

y como por hipótesis es m=n: $\dim M = \dim(\omega^2(M)) \to M = \omega^2(M)$

12) Del apartado 07): $\omega(M)+\omega(N) \subseteq \omega(M \cap N)$

del apartado 10):

$$\dim\left(\omega(M \cap N)\right) = n - \dim(M \cap N) = n - \{\dim M + \dim N - \dim(M+N)\} =$$
$$= (n - \dim M) + (n' \dim N) - (n - \dim(M+N)) =$$
$$= \dim(\omega(M)) + \dim(\omega(N)) - \dim\left(\omega(M+N)\right) = \dim(\omega(M)+\omega(N))$$

por consiguiente:

$$\dim\left(\omega(M \cap N)\right) = \dim(\omega(M)+\omega(N)) \to \omega(M \cap N) = \omega(M)+\omega(N)$$

## 06. El rango de una forma bilineal

De ser

$$\left.\begin{array}{l} V_0 = \omega(W) = \ker f_d \\ W_0 = \omega(V) = \ker f_i \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} imagf_i \cong V/\ker f_i = V/\omega(W) \\ imagf_d \cong V/\ker f_d = W/\omega(V) \end{array}\right\} \to V/\omega(W) = W/\omega(V)$$

Se define el rango de la forma bilineal $f \in L\left(V, W; k\right)$ como la dimensión de ambos espacios cocientes.

Es decir:

$$rang(f) = \dim\left(V/\omega(W)\right) = \dim\left(W/\omega(V)\right)$$

Teorema 06.1: Se verifican las equivalencias siguientes

1) $f_i\ monomorfismo \leftrightarrow f_d\ epimorfismo$
2) $f_d\ monomorfismo \leftrightarrow f_i\ epimorfismo$

Demostración:

1) $f_i\ monomorfismo \leftrightarrow \ker f_i = \omega(W) = \{0\} \leftrightarrow rang(f) = \dim V =$

$= \dim V^* = \dim \operatorname{Im} gf \leftrightarrow imagf_d = V^* \to f_d\ epimorfismo$

2) La prueba es análoga.

Corolario:

$-\ f\ ordinaria \to f_i, f_d\ isomorfismos \to f\ no\sin gular$

$-\ no\sin gular \to f\ ordinaria$

**Bibliografía**

Noble, B.; Daniel, J.W., Applied Linear Algebra, Prentice Hall, Londres, 1988
Sainz, M.A.; Serarols, J.L.; Pérez A. M., Algebra, Escuela Plitécnica Superior, Gerona, 1994
Sancho, J., Algebra Lineal y Geometría, Universidad de Zaragoza, 1994