Los Flujos Caóticos Más Simples (FCMS)
Un mito entre lo complejo y lo complicado

Gilberto Paredes[1]

La ignorancia afirma o niega rotundamente; la ciencia, duda.

Voltaire

Introducción

Existen en la naturaleza, muchos sistemas dinámicos que son sensibles a las condiciones iniciales. Sistemas donde una pequeña variación en uno de sus estados, puede conducir al mismo a evolucionar de manera muy distinta. Por ejemplo, sea el sistema $M(x,y,z)$, el cual puede empezar a evolucionar partiendo del estado A, esto es, $x(0)=0.000002345$, $y(0)=0.0000004321$ y $z(0)=0.0000000000122432578$. Ustedes, podrían preguntarse. ¿Qué le pasaría al sistema $M(x,y,z)$, si al estado A, le cambiáramos una de sus condiciones iniciales, por ejemplo la condición $z(0)$, dejando $x(0)$ y $y(0)$ invariables? Tomando en cuenta esta última sugerencia, sea entonces $z(0)=0{,}0000000000122432657 9$.

Si nosotros dejamos ahora que $M(x,y,z)$ evolucione según las condiciones iniciales A y luego de manera independiente tomamos las condiciones donde sólo la variable $z(0)$ cambió en el último digito, es lógico esperar que el hecho de cambiar un 8 por un 9 en la posición 19 de $z(0)$ no debería causar efecto

[1] *Gilberto Paredes es Licenciado en Física, egresado de La Universiad del Zulia (LUZ), Venezuela. Obtuvo el grado de Magister Scientiae en Física Fundamental en la Universidad de Los Andes (ULA-Mérida), Venezuela. Está adscrito al Departamento de Matemática y Física, (con el escalafón de asistente), de la Universidad Nacional Experimental del Táchira, Venezuela. e-mail: gilbpar@unet.edu.ve*

alguno al sistema; y en el caso, de causar algún efecto, debería ser muy pequeño, invisible a nuestros sentidos. He aquí algo fantástico, los dos sistemas cambian drásticamente. Si comparamos la evolución del sistema en el primer y segundo caso, y si lográramos cuantificar las diferencias, estas podrían diferir enormemente.

Los cambios que los sistemas experimentan a las condiciones iniciales, es lo que conocemos como ***caos.*** En una situación similar se encontró ***Lorenz*** [1], cuando trató de modelar el clima, introduciendo para ello un modelo matemático sencillo. Lorenz esperaba que, variando sólo una millonésima parte de alguna de las condiciones iniciales en uno de los estados de su sistema, encontraría soluciones iguales o muy parecidas. Sorpresa la de Lorenz, cuando observó que al variar una condición inicial, esta puede conducir al sistema a cambiar drásticamente. Metafóricamente lo comparó con un hecho curioso, por ejemplo, si una mariposa mueve sus alas al otro lado del continente, este movimiento puede cambiar el clima en este lado del globo terrestre, efecto conocido en la literatura como efecto mariposa (J. Gonzalez, 2001) [2]. Fascinante nos puede resultar la sencillez matemática como se pueda modelar cualquier proceso, pero más sorprendente aún es, lo complicado y/o complejo que pueden resultar las respuestas que emergen de tal sistema, una vez que han sido alteradas.

El Modelo de Lorenz

Matemáticamente el modelo que según ***Lorenz*** simulaba el clima se puede escribir así:

$$x' = - ax + ay \qquad (1)$$

$$y' = - xz + rx - y \qquad (2)$$

$$z' = xy - bz \qquad (3)$$

x', y', z', representan las primeras derivadas en las variables x, y, z.
a , b, y r son constantes, relacionadas con las condiciones climáticas; tales como presión, temperatura, etc.

El sistema anterior por ser bastante complicado, solo tiene solución numérica. Para resolver este problema, se ha escrito un programa en lenguaje *fortran*[2] El resultado se muestra en la figura 1.

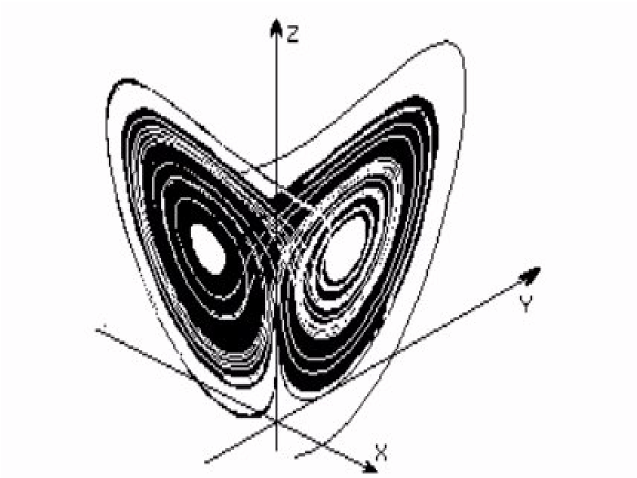


Fig. 1. Atractor de Lorenz en el espacio de fase

Como se puede observar en la figura anterior, las trayectorias de dicho atractor son tan complicadas y caóticas como el modelo mismo.

En realidad para que exista caos, no es necesario tener ecuaciones complejas matemáticamente. Las ecuaciones que modelaban el clima según *Lorenz*, eran complejas desde el punto de vista matemático; tres ecuaciones diferenciales de primer orden, con términos cruzados y cuadráticos (ec.1,2,3). Según el teorema de Poincaré-Bedixon (ver glosario): "para que ocurra caos en un sistema dinámico,

[2] Lenguaje de programación, que significa “traductor de fórmulas”, especial para resolver problemas complejos que involucran soluciones numéricas.

debemos tener como mínimo tres ecuaciones diferenciales, con al menos una no linealidad en una de sus variables". Justamente el modelo de Lorenz se ajustaba muy bien a éste teorema. Hasta hace unos años atrás, éstas eran las ecuaciones más sencillas que describían caos.

A finales del siglo pasado J. C. Sprott [2], introdujo una ecuación que producía caos en ciertos valores de parámetros, una característica importante de esta ecuación era la siguiente: Era una ecuación diferencial de tercer orden, que podría llevarse a tres de primer orden, es decir:

$$x''' + Ax'' + x' - |x| + 1 = 0 \qquad (4)$$

o su equivalente

$$u' = y \qquad (5)$$

$$v' = z \qquad (6)$$

$$a' = - Az - y + |x| - 1 \qquad (7)$$

Si tenemos presente el teorema de Poincaré-Bedixon, estas ecuaciones no deberían producir caos. Sin contradecir este teorema, estas ecuaciones sí producen caos. Como se puede observar en (7), existe una no linealidad en la ecuación a través del valor absoluto en la variable **x**.

Hasta este momento, esta es la ecuación más sencilla que se ha encontrado para simular caos. He aquí la diferencia entre lo complejo y lo complicado. Las ecuaciones de *Lorenz* eran complicadas matemáticamente; para resolverlas se necesitó muchas horas de cálculo, ya que éstas no tenían solución analítica. La estructura de las ecuaciones de Lorenz era ta complicada que era lógico que se obtuvieran estructuras muy complejas, en realidad así lo era. Hoy día rompemos ese mito gracias a Sprott [2].

Sprott construyó una serie de ecuaciones, que desde un punto de vista matemático eran muy sencillas, pero sus soluciones muestran estructuras muy complejas. Podemos afirmar sin temor alguno que "no necesitamos ecuaciones complicadas matemáticamente para encontrar fenómenos complejos".

Los modelos de J.C Sprott.

En un trabajo publicado por J.C. Sprott en 1994 [3] en la revista Physical Review E, resume en una tabla lo que son las ecuaciones mas sencillas que exhiben caos. En la tabla 1, se ilustran sólo algunas de ellas.

Columna 1: se presenta el número de caso.

Columna 2: Estructura matemática de la ecuación.

Columna 3: Se especifican los puntos críticos de cada ecuación.

Columna 4: Exponentes de Lyapunov. El valor positivo, prueba que estos sistemas son caóticos.

Columna 5: Dimensión de cada sistema. Los valores fraccionarios, muestran que estos atractores son extraños.

Tabla 1

Caso	***Ecuación***	***Puntos Críticos***	***Exponente de Lyapunov***	***Dimensión***
A	x'=y y'=-x+yz z'=1-y	Ninguno	0.014 0 -0.014	3.00
B	x'=yz y'=x-y z'=1-xy	F2(1,1,0) f2(-1,-1,0)	0.210 0 -1.210	2,174

Los flujos caóticos más simples (FCMS)

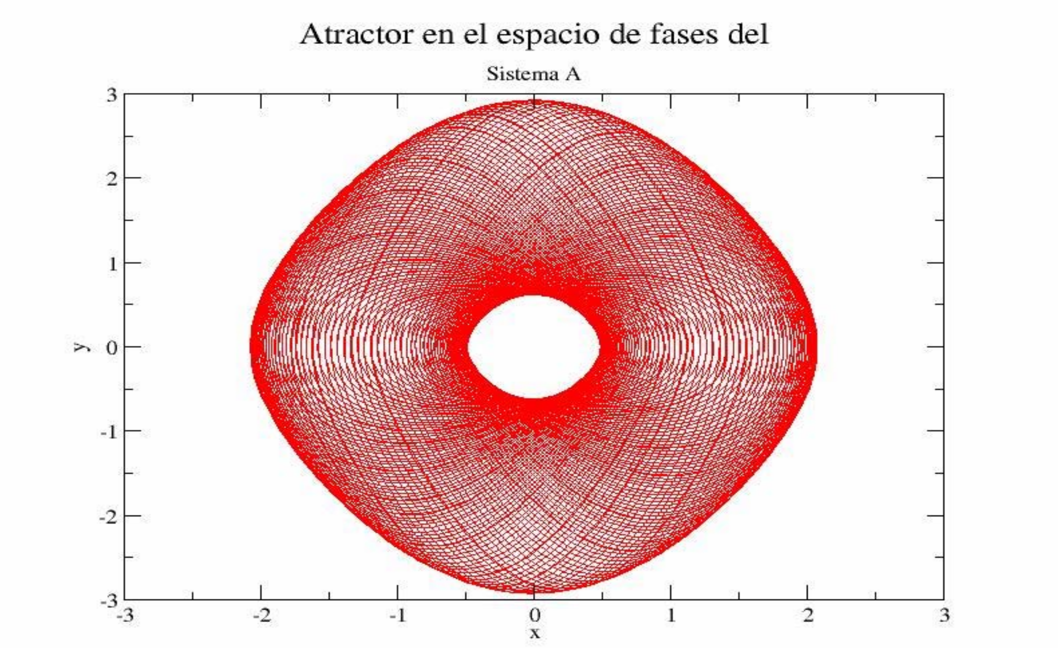
Caso	***Ecuación***	***Puntos Críticos***	***Exponente de Lyapunov***	***Dimensión***
C	x'=yz y'=x-y z'=1-x2	CO(1,1,0) cO (-1,-1,0	0.163 0 -1.163	2,140
D	X'=-y y'=x+z z'=xz+3y2	CO (0,0,0)	0.103 0 -1.320	2,078
E	X'=-2y y'=x+z2 z'=1+y-2z	F2(-0.25,0,0.5)	0.076 0 -2.076	2,037
F	x'=y y'=z z'=-Az-y+|x|-1	ninguno	Positivo en varias regiones	2,055

En la *tabla 1*, podemos observar que estas ecuaciones son matemáticamente más sencillas que las ecuaciones de Lorenz. Realmente esto es así. Podríamos pensar que sus soluciones son también muy sencillas. Para responder a lo anterior resolvamos[3] algunos de esos sistemas y comparemos los resultados con las del modelo complicado de Lorenz.

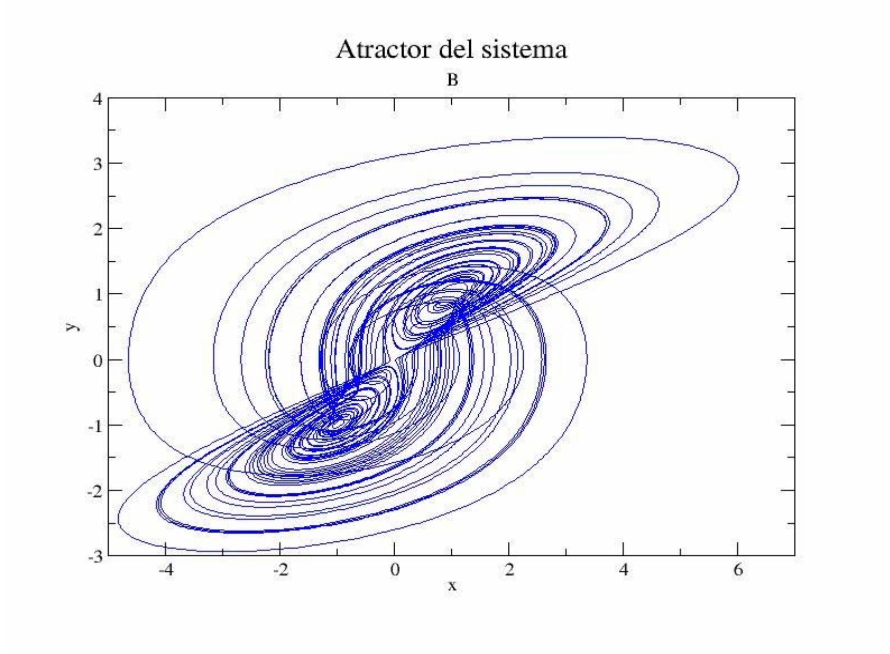
Si somos buenos observadores, estos sistemas matemáticamente sencillos, tienen soluciones *tan o más* complicadas y complejas que el modelo de Lorenz. Con estos resultados rompemos el mito de ***" Algo complicado, no necesariamente conduce a soluciones complejas y viceversa"***. Las ecuaciones propuestas por

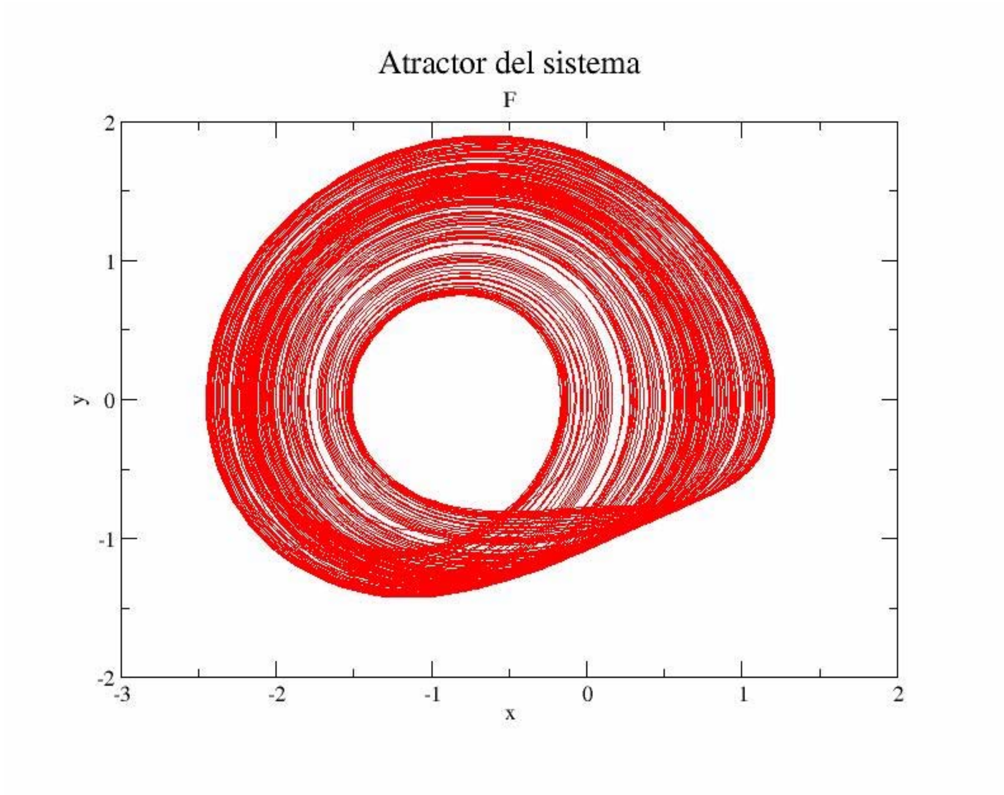
[3] Los programas para resolver los sistemas A, B y F, no se incluyen debido a que son propiedad del autor de este artículo. Los mismos han sido corridos usando la red de computación del Laboratorio de Física Aplicada y Computacional (**LFAC**).

Sprott, son muy sencillas en lo que se refiere a estructura matemática, pero la evolución temporal o espacial de tales sistemas conduce a fenómenos muy complejos. El autor de este artículo estudió en su tesis de maestría, el ***sistema F*** *de la tabla 1*, logrando descubrir fenómenos de comportamiento colectivo con esta ecuación tan sencilla, que hasta el presente solo se habían observado en sistemas complicados como los de Lorenz y Rossler [5].



Los flujos caóticos más simples (FCMS)





Glosario [4]

Atractor: Estado asimptótico de un sistema dinámico en su espacio de fase.

Atractor Extraño: Estado asimptótico en el espacio de fase de sistemas caóticos disipativos con una estructura geométrica fractal.

Caos: Sistemas sensibles a las condiciones iniciales.

Ciclo límite: Única trayectoria cerrada contenida en región anular del espacio de fase.

Dimensión fractal: Dimensión fracionaria de un objeto.

Espacio de fase: Es un espacio matemático con coordenadas ortogonales que representa cada una de las variables necesarias para especificar el estado instantáneo de un sistema.

Exponente de Lyapunov: Es un número que nos indica si existe caos o no en un sistema. Sí al menos un valor calculado es positivo, esto implica que el sistema es caótico.

Puntos fijos: Puntos de equilibrio de una ecuación.

Teorema de Poincaré-Bedixon: Si n = 2 (número de ecuaciones), los únicos atractores posible en el espacio de fases son:

a) Puntos estacionarios
b) Ciclos límites

" No existe caos en dimensión **n** *menor o igual a 2, de sistemas o flujos continuos en el tiempo"*

Los flujos caóticos más simples (FCMS)

Bibliografía

[1] Stefan J. Linz and J.C. Sprott. "lementary chaotic flow". Physics Lett. A. 259 1999.

[2] J. Gonzalez. "atractores extraños". Revista Aleph Sub-Cero, Serie de Divulgación. 2001

[3] J.C. Sprott. "Some simple chaotic flows". Physical Review E. 50. 1994

[4] M. G. Cosenza. "Caos y dinámica no lineal". Notas de clase. Universidad de Los Andes. Venezuela.

[5] L. Brunnet, H. Chate, P. Manneville. Physica D, 78, 141. 1994.