CONJUNTOS FILTRANTES O DIRIGIDOS RETÍCULOS

Los conjuntos ordenados y acotados pueden estudiarse como conjuntos filtrantes con cota superior mínima y cota inferior máxima. Esto permite definir los retículos de orden y establecer su equivalencia con una estructuración algebraica sobre leyes de composición interna, que nos lleva necesariamente a los conceptos clásicos de retículos, álgebras y anillos booleanos.

Conjuntos filtrantes o dirigidos. Semirretículos:

a) Idea de conjunto filtrante o dirigido:

Definición 1:

Un conjunto ordenado *A* tal que todo subconjunto del mismo de dos elementos esté acotado superiormente (mayorado) se dice que es *filtrante superiormente*. Si todo subconjunto de dos elementos de A está acotado inferiormente (minorado), se dirá *filtrante inferiormente.* Un *conjunto filtrante* es un conjunto que es filtrante superiormente y filtrante inferiormente.

$$(A,\leq) filtr\_\sup \Leftrightarrow \forall a,b \in A, \exists m_s \in A / a \leq m_s, b \leq m_s$$
$$(A,\leq) filtr\_\inf \Leftrightarrow \forall a,b \in A, \exists m_i \in A / a \geq m_i, b \geq m_i$$
$$(A,\leq)\ filtr \Leftrightarrow (A,\leq)\ filtr\_\sup \wedge (A,\leq)\ filtr\_\inf$$

Teorema 1:

1) Todo subconjunto finito de un conjunto filtrante superiormente es mayorado:

$$(A,\leq)\ filtr\_\sup \wedge \{a_1,...,a_n\} \subseteq A \Rightarrow \exists x \in A / x \geq a_i, i = 1,...,n$$

2) En todo conjunto filtrante superiormente, un elemento maximal es también máximo, y, por consiguiente, es único.

Demostración:

1) Por inducción:

1.1) Para n=2 se verifica, por ser (A, ≤) filtrante_sup: $\exists x \in A / x \geq a_1, x \geq a_2$

1.2) Sea cierto para n=k-1, veamos que ha de ser cierto para n=k:

$\exists y \in A / y \geq a_i, i = 1,...,k-1 \wedge \{y, a_k\}$ $mayorado \Rightarrow \exists x \in A / x \geq y, x \geq a_k \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x \in A / x \geq a_i, i = 1,...,k$

Por consiguiente, la proposición se verifica, para todo subconjunto finito.

2) Por reducción al absurdo:

$$m \in A / m \max imal \wedge m \; no \max imo \Rightarrow \exists n \in A / (no \; m \geq n) \wedge (no \; n \geq m) \wedge A \; filtr \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists x \in A / x \geq m \wedge x \geq n \wedge x \neq m \wedge x \neq n \Rightarrow m \; no \max imal$$

Es inmediato que el teorema se verifica de forma análoga para conjuntos filtrantes inferiormente:

1) $(A, \leq) \; filtr\_\inf \wedge \{a_1,...,a_n\} \subseteq A \Rightarrow \exists x \in A / x \leq a_i, i = 1,...,n$

2) En todo conjunto filtrante inferiormente, un elemento minimal es también mínimo, y, por consiguiente, es único.

b) Semirretículos:

Definición 2:

Un sub_semirretículo es un conjunto ordenado tal que todo par de elementos del mismo admite mayorante mínimo o supremo, que se puede indicar por $x \vee y$

$$\sup\{x, y\} = x \vee y$$

Un inf_semirretículo es un conjunto ordenado tal que todo par de elementos del mismo admite un minorante máximo o ínfimo, que indicaremos por $x \wedge y$

$$\inf\{x, y\} = x \wedge y$$

Teorema 2:

1) En un sup_semirretículo, todo subconjunto finito admite supremo.
2) Para toda familia de sup_semirretículos, el conjunto producto es también un sup_semirretículo.

Demostración:

1) Por inducción. Se verifica para n=2, por definición de sup_semirretículo.
Sea cierto para n=k-1 y veamos que entonces ha de ser cierto también para n=k:
Llamemos $y = \sup\{a_1,...,a_{k-1}\}$, y sea $x = \sup\{y, a_k\}$. x es mayorante del conjunto $\{a_1,...,a_k\} \Rightarrow x \geq y$.
Cualquier otro mayorante z de $\{a_1,...,a_k\} \Rightarrow$ z es mayorante de $\{a_1,...,a_{k-1}\} \Rightarrow$
$\Rightarrow z \geq y \Rightarrow$ z es mayorante de $\{y, a_k\} \Rightarrow z \geq x \Rightarrow x = \sup\{a_1,...,a_k\}$

2) Sea $(A_i, \leq)_{i \in I}$ una familia de sup_semirretículos y llamemos P al conjunto producto cartesiano de los elementos de la familia: $P = \prod_{i \in I} A_i$. Si consideramos ahora dos elementos cualesquiera de P, $a = (a_i)_{i \in I}, b = (b_i)_{i \in I}$, probemos que el elemento de P dado por $c = (c_i)_{i \in I}$ donde es cada $c_i = \sup r\{a_i, b_i\}$, es, precisamente, el supremo de $\{a, b\}$:
   Obviamente, es $a \leq c$ y $b \leq c$. Si consideramos un elemento d de P, $d = (d_i)_{i \in I}$, tal que $a \leq d$ y $b \leq d$ entonces $a_i \leq d_i$ y $b_i \leq d_i$, de donde también $c_i \leq d_i$, , puesto que es $c_i = \sup r\{a_i, b_i\}$, por lo cual $c \leq d$.

Teorema análogo para inf_semirretículos se prueba del mismo modo.

Definición 3:

Un sup_semirretículo completo es un sup_semirretículo en el que todo subconjunto del mismo admite supremo (mayorante mínimo). Un inf_semirretículo completo es un inf_semirretículo en el que todo subconjunto del mismo admite ínfimo (minorante máximo). Obviamente, todo sup_semirretículo completo admite máximo, y todo inf_semirretículo completo admite mínimo.

Retículos de orden y retículos algebraicos:

a) Retículos de orden:

Definición 4:

Se llama *retículo de órden* a un conjunto ordenado que es sup_semirretículo y también inf_semirretículo
En un retículo de órden, por tanto, todo par de elementos admite supremo y también admite ínfimo, lo que nos indica que también todo subconjunto finito admite tanto supremo como ínfimo.

Teorema 3:

Para dos retículos de orden dados, el conjunto producto cartesiano de ambos es también un retículo de orden.

Demostración:

Es trivial, por el Teorema 2, 2).

Definición 5:

Dado un retículo de orden $(A,\leq)$ y un subconjunto S de A, con el mismo orden inducido por el retículo, $(S,\leq/S)$, diremos que $(S,\leq/S)$ es subretículo del retículo $(A,\leq)$ si y solo si se verifica que, para dos elementos cualesquiera de A, el ínfimo y el supremo en A son respectivamente el ínfimo y el supremo en S:

$$\forall a,b\in A,\ \inf_A\{a,b\}=\inf_S\{a,b\},\ \sup r_A\{a,b\}=\sup r_S\{a,b\}$$

Notemos que en general, un subconjunto de un retículo, con su mismo orden inducido, no es un retículo, y cuando lo es, pueden no ser iguales los ínfimos y supremos de dos elementos cualesquiera del retículo, pues se da en general una situación del tipo:

$$\forall a,b\in A,\ \inf_A\{a,b\}\leq\inf_S\{a,b\}\leq\sup r_S\{a,b\}\leq\sup r_A\{a,b\}$$

Definición 6:

Un retículo de orden completo es un conjunto que es inf_semirretículo completo y también es sup_semirretículo completo.

Teorema 4:

Dados dos retículos de orden completos, el conjunto producto cartesiano de ambos también es retículo de orden completo.

Demostración:

Veamos que cualquier subconjunto C del producto cartesiano *AxB* de dos retículos de orden completos, tiene ínfimo y tiene supremo. Sean, pues, dos retículos de orden completos *(A,≤)* y *(B,≤)* y sea *C* un subconjunto del mismo con el orden inducido, o sea:

$$C=A_1xB_1\subseteq AxB,\quad C=\{(x_1,y_1)/x_1\in A_1,y_1\in B_1\},\quad A_1\subseteq A,\ B_1\subseteq B$$

por ser *A* completo, $A_1\subseteq A$ tiene ínfimo y supremo, análogamente, por ser *B* completo, también $B_1\subseteq B$ tiene ínfimo y supremo:

$a_1=\inf A_1,\ a_1^{'}=\sup A_1,\ b_1=\inf B_1,\ b_1^{'}=\sup B_1$, de lo cual es inmediato que existen ínfimo y supremo para el conjunto C:

$$(a_1,b_1)=\inf(A_1xB_1)=\inf C,\quad (a'_1,b'_1)=\sup(A_1xB_1)=\sup C$$

Teorema 5:

Todo semirretículo completo, ya sea sup_semirretículo o inf_semirretículo, que tenga elemento nulo y universal (mínimo y máximo), es también un retículo de orden completo.

Demostración:

Hagamos la demostración para un inf_semirretículo. Sea, pues, *(A,≤)* un inf_semirretículo completo, por lo cual existe ínfimo para cualquier subconjunto *A′* de *A*. Llamemos *a = infA′.*

Sean, entonces, $a = \inf A'$, $\phi = \min A$, $\mu = \sup A$. Para probar que A es completo, bastará ver que existe $\sup A'$. Para ello consideremos el conjunto $X_{A'}$ de todos los mayorantes de A′. Tal conjunto no es vacío, pues $\mu \in X_{A'}$. Supongamos que es s el infimo del conjunto $X_{A'}$: $s = \inf X_{A'}$. Esto quiere decir que cualquier elemento de A′ es menor o igual que cualquier elemento de $X_{A'}$, es decir, cualquier elemento de A′ es minorante de $X_{A'}$. O sea, $\forall z \in A', z \leq s \Rightarrow s\ mayor\ de\ A' \Rightarrow s \in \mathrm{X}_{A'} \Rightarrow s = \min \mathrm{X}_{A'}$. por lo cual, $\sup A' = s$.

b) Retículos algebraicos:

Definición 7:

Un *retículo algebraico (A,*,*′)* es un conjunto A dotado de dos leyes de composición interna, * y *′, que tienen las propiedades siguientes:

a) Son idempotentes: $\forall x \in A, \quad x * x = x, \quad x *' x = x$
b) Son conmutativas: $\forall x, y \in A, \quad x * y = y * x, \quad x *' y = y *' x$
c) Son asociativas: $\forall x, y, z \in A, \quad x * (y * z) = (x * y) * z, \quad x *' (y *' z) = (x *' y) *' z$
d) Propiedad de Absorción: $\forall x, y \in A, \quad (x * y) *' x = x, \quad (x *' y) * x = x,$

Un retículo algebraico distributivo es un retículo algebraico en el que las dos leyes de composición internas son distributivas la una con respecto de la otra.

Teorema 6:

Si el par (A,≤) es un retículo de orden, entonces la terna (A,*,*′) en donde se ha hecho

$* = \wedge =$ ínfimo, $\quad *' = \vee =$ supremo

es un retículo algebraico.

Demostración:

Se verifica trivialmente, teniendo en cuenta que es $x \vee y =$ *supremo del par* $\{x, y\}$, que es $x \wedge y =$ *ínfimo del par* $\{x, y\}$:

1. $\forall x \in A, x \vee x = x, \ x \wedge x = x$ (Propiedad de Idempotencia)
2. $\forall x, y \in A, x \vee y = y \vee x, \ x \wedge y = y \wedge x$ (Propiedad Conmutativa)
3. $\forall x, y, z \in A, \ x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (Propiedad Asociativa)
4. $\forall x, y \in A, \ (x \vee y) \wedge z = x, \ (x \wedge y) \vee z = x$ (Propiedad de Absorción)

Teorema 7:

En todo retículo algebraico puede definirse un orden desde sus leyes de composición interna, de forma que sea un retículo de orden.

Demostración:

Si $(A,*,*')$ es un retículo algebraico, bastará definir el orden de la siguiente manera:

$$x \le y \Leftrightarrow x*'y = y \ \vee \ x*y = x$$

Las dos afirmaciones de la disyuntiva de la definición son equivalentes, por lo que la definición es consistente. La demostración simbólica es inmediata desde las propiedades de absorción y de conmutatividad de las leyes internas del retículo:

$$x*'y = y \Rightarrow (x*'y)*x = y*x = x*y$$
$$x*y = x \Rightarrow (x*y)*'y = x*'y = y*'x$$

Veamos que se verifican las propiedades de la relación de orden:

1. Propiedad reflexiva:
$$\forall x \in A,\ x*x = x \Rightarrow x \le x$$

2. Propiedad antisimétrica:
$$\left.\begin{matrix} x \le y \\ y \le x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x*y = x \\ y*x = y \end{matrix}\right\} \wedge x*y = y*x \Rightarrow x = y$$

3. Propiedad transitiva:
$$\left.\begin{matrix} x \le y \\ y \le z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x*y = x \\ y*z = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow x*z = (x*y)*z = x*(y*z) = x*y = x \Rightarrow x \le z$$

Veamos finalmente que para todo par de elementos de A existe el ínfimo y también existe el supremo:

Puesto que $x*'y = y \Rightarrow x \le y, \quad x*y = x \Rightarrow x \le y$, se tiene:

$$x*'(x*'y) = (x*'x)*'y = x*'y \Rightarrow x \le x*'y$$
$$y*'(x*'y) = y*'(y*'x) = (y*'y)*'x = y*'x = x*'y \Rightarrow y \le x*'y$$

Es decir:

$$\left.\begin{matrix} x \le x*'y \\ y \le x*'y \end{matrix}\right\} \Rightarrow x*'y = \sup r\{x,y\}$$

Análogamente:

$$(x*y)*x = (y*x)*x = y*(x*x) = y*x = x*y \Rightarrow x*y \le x$$
$$(x*y)*y = (x*y)*y = x*(y*y) = x*y \Rightarrow x*y \le y$$

Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x*'y \leq x \\ x*'y \leq y \end{array}\right\} \Rightarrow x*'y = \inf\{x, y\}$$

Modularidad y distributividad. Complementación:

Definición 8:

Un retículo (A,≤) se dice *modular* si se verifica que

$$a \leq b \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c, \ \forall a, b, c \in A$$

Definición 9:

Un retículo (A,≤) se dice *distributivo* si se verifica que

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \quad \forall a, b, c \in A$$

Definición 10:

Dado un retículo, (A,≤), con mínimo $\phi = \min A$ y máximo $\mu = máxA$, se llama *complemento de un elemento* $x \in A$ a todo elemento $x' \in A$ tal que se verifica:

$$x \wedge x' = \phi, \quad x \vee x' = \mu$$

Definición 11:

Se llama *retículo complementario o complementado*, a todo retículo con mínimo y máximo tal que todo elemento del mismo tiene un complemento.

Teorema 8:

En todo retículo distributivo se verifica que

$$\left.\begin{array}{l} z \wedge x = \quad z \wedge y \\ z \vee x = \quad z \vee y \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} x = x \vee (z \wedge x) = \quad x \vee (z \wedge y) = (x \vee z) \wedge (x \vee y) \\ y = y \vee (z \wedge y) = \quad y \vee (z \wedge x) = (y \vee z) \wedge (y \vee x) = (x \vee z) \wedge (x \vee y) \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

Teorema 9:

En todo retículo distributivo, el complemento de un elemento cualquiera, si existe, es único.

Demostración:

Supongamos que el elemento x tuviera dos complementos distintos, x' y x", bastaría aplicar el teorema 8:

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge x' = x \wedge x'' = \phi \\ x \vee x' = x \vee x'' = \mu \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \wedge x' = x \wedge x'' \\ x \vee x' = x \vee x'' \end{array}\right\} \Rightarrow x' = x''$$

Retículos de Boole. Álgebras de Boole. Anillos de Boole:

a) Retículos y Álgebras de Boole:

Definición 12:

Se define el concepto de retículo de Boole como un retículo de orden que sea distributivo y también complementado.

Un álgebra de Boole es una 5-pla formada por un conjunto A, dos leyes internas, * y *', cumpliendo las propiedades de idempotencia, conmutatividad, asociatividad, absorción y distributividad, y, finalmente, dos elementos, ϕ y μ, que se denominan *nulo y universal*, respectivamente, para los cuales se cumple que

$$\forall x \in A, \exists x' \in A / x * x' = \phi, x *' x' = \mu, \; x * \phi = \phi, x *' \mu = \mu, x *' \phi = x, x * \mu = x$$

Teorema 10:

1) Si $(A, \leq)$ es un retículo de Boole, entonces, siendo ϕ el mínimo, y μ el máximo, se tiene que la 5-pla (A, v, $\wedge$, ϕ , μ) es un Álgebra de Boole, cuyas operaciones internas son v y $\wedge$.
2) Si (A, *, *', ϕ , μ) es un Álgebra de Boole, entonces, el conjunto ordenado $(A, \leq)$, donde "≤" es la relación definida en el desarrollo de la demostración del teorema 7 es un retículo de Boole.

Demostración:

1) Por el teorema 6, la terna (A,v, $\wedge$) es un retículo algebráico, y, por ser $(A, \leq)$ de Boole, también es distributivo. Por ser $(A, \leq)$ complementado tendrá mínimo y máximo, ϕ y μ,, que son el elemento nulo y universal del álgebra booleana. El complementario x' de cualquier elemento x será el complementario en el retículo de Boole. Luego, efectivamente, la 5-pla (A, v, $\wedge$, ϕ , μ) es un Álgebra de Boole.
2) Si es (A, *, *', ϕ , μ) un álgebra de Boole, por el teorema 7, el conjunto ordenado $(A, \leq)$ que se extrae del retículo algebráico (A, *, *') verifica también la propiedad distributiva, con mínimo y máximo los elementos ϕ , μ, respectivamente. El complementario de x será el comlementario x' en el álgebra

de Boole. Por tanto, se obtiene un retículo de orden distributivo y complementado, esto es, un retículo de Boole.

Teorema 11 (Leyes de De Morgan):

En todo retículo de Boole se verifican las relaciones:

$$1) \quad (x \wedge y)' = x' \vee y', \qquad\qquad 2) \quad (x \vee y)' = x' \wedge y'$$

siendo x', y' los elementos complementarios de x, e y, respectivamente.

Demostración:

Se trata de probar que $\begin{matrix} (x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = \phi \\ (x \wedge y) \vee (x' \vee y') = \mu \end{matrix}$ y que $\begin{matrix} (x \vee y) \wedge (x' \wedge y') = \phi \\ (x \vee y) \vee (x' \wedge y') = \mu \end{matrix}$:

1) $(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = (x \wedge y \wedge x') \vee (x \wedge y \wedge y') = (\phi \wedge y) \vee (x \wedge \phi) = \phi \vee \phi = \phi$
$(x \wedge y) \vee (x' \vee y') = (x \vee x' \vee y') \wedge (y \vee x' \vee y') = (\mu \vee y') \wedge (\mu \vee x') = \mu \wedge \mu = \mu$

2) $(x \vee y) \wedge (x' \wedge y') = (x \wedge x' \wedge y') \vee (y \wedge x' \wedge y') = (\phi \wedge y') \vee (\phi \wedge y') = \phi \vee \phi = \phi$
$(x \vee y) \vee (x' \wedge y') = (x \vee y \vee x') \wedge (x \vee y \vee y') = (\mu \vee y) \wedge (x \vee \mu) = \mu \wedge \mu = \mu$

b) Anillos de Boole:

Teorema 12:

1) Un retículo de Boole, $(A, \leq)$, puede ser estructurado como un anillo conmutativo, idempotente y con elemento unidad *(Anillo de Boole).*
2) Recíprocamente, todo Anillo de Boole (anillo conmutativo, idempotente y con elemento unidad), puede ordenarse como un retículo de Boole.

Demostración:

1) Trivialmente se puede comprobar la verificación de las propiedades que definen tal anillo definiendo las leyes aditiva y multiplicativa de la forma:

$$x + y = (x' \vee y') \wedge (x \vee y) \qquad\qquad x.y = x \wedge y$$

2) Se obtiene asimismo un Álgebra de Boole mediante la siguiente definición de las leyes internas del Álgebra a partir de las leyes del Anillo de Boole de la forma:

$$x * y = x + y + x.y \qquad\qquad x *' y = x.y$$

A partir de un Álgebra de Boole se obtiene fácilmente la estructura de retículo de Boole (teorema 10, 2)).

Bibliografía:

ALBERCA, P., MARTÍN, D.; "Métodos matemáticos: Álgebra Lineal y Geometría", Ediciones Aljibe, 2001.
BURGOS, J. De; "Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana", Ed. McGraw Hill, 2000.
DUBREIL, P. Y OTROS; "Lecciones de álgebra moderna". Ed. Paraninfo, 1970
NAKOS, G., JOYNER, D.; "Álgebra Lineal con aplicaciones". Ediciones Thomson, 1991
PEERMINGEAT, N., GLAUDE, D.; "Algebras de Boole, teoría y métodos de cálculo y aplicaciones". Editorial Vicens Vives, 1993.
ROSEN, K.; "Discrete Mathematics and its Applications ". Ed. McGraw-Hill, 1991