Construyendo la función exponencial

Carmen SÁNCHEZ DÍEZ

Puede construirse la función exponencial neperiana o natural como la función inversa de la función logaritmo natural, $y = L(x)$, que, para que pueda identificarse con la exponencial de base un número real hemos de probar tal coincidencia en el caso de exponente entero y también racional.

El caso de exponente real puede definirse como una extensión del caso de exponente racional, de modo que, al particularizar, se obtengan las propiedades de las exponenciales de exponente racional o entero. La base de la función exponencial neperiana sería, en todo caso, el número real e tal que $L(e)=1$.

Para hacer esa construcción hemos de partir, en definitiva de la función logaritmo natural, $y = L(x)$, cuya construcción puede consultarse en esta misma web, entrando en http://casanchi.com/mat/logaritmo01.htm. En dicha construcción puede observarse cómo la función logaritmo natural es estrictamente creciente, continua y derivable en su dominio. El establecer que tales propiedades se transmiten a la función inversa es lo que nos permitirá el estudio que hacemos a continuación. Comenzamos, en definitiva, probando que la función inversa tiene también estas propiedades de continuidad, crecimiento estricto y derivabilidad.

Sin embargo, recordemos brevemente la definición de función exponencial de variable entera y de función exponencial de variable natural que se muestran en el indicado artículo:

Función exponencial de variable entera:

$$e^0 = 1, \qquad e^n = e..-n-..e, \qquad e^{-n} = \frac{1}{e}..-n-..\frac{1}{e} \quad \forall n \in Z_+ \qquad [0.1]$$

Función exponencial de variable racional:

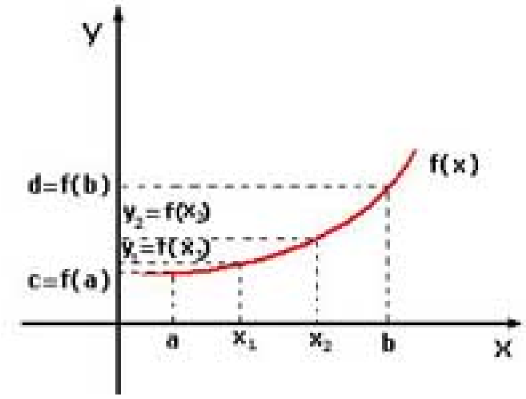
$$p/q \in Q, \;\; e^{p/q} = \sqrt[q]{e^p}\,, \qquad e^{-p/q} = \frac{1}{e^{p/q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{e^p}} \qquad [0.2]$$

Estas funciones, como veremos en adelante, coinciden con la función inversa de la función logaritmo neperiano, esto es, con la exponencial neperiana.

En cambio, la función exponencial de variable real no había sido definida en el articulo que indicamos. La definiremos en este trabajo usando la función logaritmo ya construida.

1. Las propiedades que se mantienen en el proceso de inversión:

Teorema: Si una función real es estrictamente creciente y continua en un intervalo, entonces su inversa es también estrictamente creciente y continua en el intervalo imagen.
Demostración:



a) Consideremos $x_1 < x_2$:
$x_1 < x_2$ y $f(x)$ monótona creciente $\rightarrow$
$\rightarrow f(x_1) < f(x_2) \rightarrow y_1 < y_2$

y al ser continua:

$y_1 < y_2 \rightarrow x_1 < x_2 \rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \rightarrow$
$\rightarrow f^{-1}(y)$ monótona creciente

b) para probar que es continua la función inversa, $x = f^{-1}(y)$ hemos de probar que se verifica que, si llamamos $y_0 = f(x_0)$, y por muy pequeño que sea el número real positivo ε (y que sin perder generalidad puede considerarse que la diferencia y suma con ε están dentro del intervalo, $x_0 - \varepsilon \in (a,b), x_0 + \varepsilon \in (a,b)$):

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \Rightarrow f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon \text{ ,}$$
$$\forall y_0 \in (f(a), f(b))$$

Existe, en efecto, un $\delta > 0$ para el cual se verifica la condición. Basta elegir δ como el menor de $f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon)$ y $f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)$, es decir, tomando

$$\delta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)\}$$

- Si el mínimo es $\delta = f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon)$:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \Rightarrow y_0 - f(x_0) + f(x_0 - \varepsilon) < y < y_0 + f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon) \Rightarrow$
$\Rightarrow f^{-1}(y_0) - f^{-1}(f(x_0)) + f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + f^{-1}(f(x_0)) - f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) \Rightarrow$
$\Rightarrow f^{-1}(y_0) - x_0 + x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + x_0 - x_0 + \varepsilon \Rightarrow f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$
- Si el mínimo es $\delta = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)$:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \Rightarrow y_0 - f(x_0 + \varepsilon) + f(x_0) < y < y_0 + f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow f^{-1}(y_0) - f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon)) + f^{-1}(f(x_0)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon)) - f^{-1}(f(x_0)) \Rightarrow$
$\Rightarrow f^{-1}(y_0) - x_0 - \varepsilon + x_0 < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + x_0 + \varepsilon - x_0 \Rightarrow f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$
por tanto $x = f^{-1}(y)$ es continua en y_0.

La función inversa de una función estrictamente monótona y continua en un intervalo $[a,b]$es también estrictamente monótona, con la misma monotonía, y continua en el intervalo imagen $[f(a),f(b)]$.

Teorema: Si una función real de variable real es estrictamente creciente y continua en un intervalo, con derivada no nula en algún punto x de su interior, entonces la función inversa también es derivable con derivada no nula en el punto imagen *y=f(x),* siendo ambas derivadas recíprocas: *f'(x)=1/g'(y).*

Demostración:
Si existe y no es nula $f'(x)$ en $x \in (a,b)$, se trata de probar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(y+h)-f^{-1}(y)}{h} = \frac{1}{f'(x)}$$

Sea $m = f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y) = f^{-1}(y+h) - x \rightarrow$
$\rightarrow x + m = f^{-1}(y+h) \rightarrow y + h = f(x+m) \rightarrow h = f(x+m) - y = f(x+m) - f(x)$
Puesto que f^{-1}es estrictamente creciente, si $h \neq 0 \rightarrow m \neq 0$, de donde:

$$\frac{f^{-1}(y+h)-f^{-1}(y)}{h} = \frac{m}{h} = \frac{m}{f(x+m)-f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x+m)-f(x)}{m}}$$

Por ser continua f^{-1}, cuando h tiende a cero también m tiende a cero, por lo que calculando límites:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(y+h)-f^{-1}(y)}{h} = \frac{1}{\lim\limits_{m \to 0} \frac{f(x+m)-f(x)}{m}} = \frac{1}{f'(x)}$$

2. La función inversa de la función logaritmo natural:

Definición: Puesto que la función logaritmo natural es un isomorfismo de grupos, y por tanto biyectiva, su función inversa también lo es. Se define la función exponencial neperiana, E(x), como la biyección inversa de la función logaritmo:

$$L : R_+ \rightarrow R$$
$$E : R \rightarrow R_+$$

Es decir, es tal que $\forall x \in R,\ L[E(x)] = x,$ o bien, $\forall x \in R_+,\ E[L(x)] = x$

Teorema: Se verifican las propiedades siguientes:
a) $E(0) = 1,\ \ E(1) = e$

b) $E'(x) = E(x), \forall x \in R$
c) $E(x+y) = E(x).E(y), \forall x, y \in R$
Demostración:
a) $L(1) = 0 \to E(L(1)) = E(0) \to 1 = E(0), \;\; L(e) = 1 \to E(L(e)) = E(1) \to e = E(1)$
b) $y = E(x) \to x = L(y) \to (x)' = L'(y) \to 1 = \dfrac{1}{y} y' \to y' = y \to E'(x) = E(x)$
c) Sean $u = E(x), z = E(y)$, se tiene entonces que $x = L(u), y = L(z) \to$
$x + y = L(u) + L(z) = L(u.z) \to x + y = L(u.z) \to E(x+y) = E(L(u.z)) \to E(x+y) = u.z \to$
$\to E(x+y) = E(x).E(y)$

Corolario: $E: R \to R_+$ es un isomorfismo del grupo aditivo $(R,+)$ en el grupo nmultiplicativo $(R_+,.)$

Teorema: La exponencial neperiana de variable racional coincide con la exponencial de variable racional y base e:

$$r = p/q, \;\; E(r) = e^r = e^{p/q} = \sqrt[q]{e^p}$$

Demostración:

Sean $n \in N, h \in R$:

1) $E(0) = E(h + (-h)) = E(h).E(-h) \to 1 = E(h).E(-h) \to E(-h) = 1/E(h)$

2) $E(n.h) = E(h..-n-..h) = E(h)..-n-..E(h) = E(h)^n$

3) Si hacemos $h = 1: E(n.h) = E(n.1) = E(1)^n \to E(n) = e^n$

4) Si hacemos $h = 1/n: E(n.h) = E\left(n.\dfrac{1}{n}\right) = E\left(\dfrac{1}{n}\right)^n \to E(1) = E\left(\dfrac{1}{n}\right)^n \to E\left(\dfrac{1}{n}\right)^n = e \to$

$\to E\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{e}$

5) Si hacemos $h = \dfrac{m}{n}: E\left(\dfrac{m}{n}\right) = E\left(m.\dfrac{1}{n}\right) = E\left(\dfrac{1}{n}\right)^m = \left(\sqrt[n]{e}\right)^m = \sqrt[n]{e^m}$

6) Si es $E\left(-\dfrac{m}{n}\right) = 1 \Big/ E\left(\dfrac{m}{n}\right) = 1 \Big/ \sqrt[n]{e^m}$

3. Definición de la función exponencial de variable real. Propiedades:

Definición: Se define la exponencial de variable real y base e como la exponencial neperiana *E(x),* para todo número real x, esto es:

$$\forall x \in R, e^x = E(x)$$

Teorema: Se verifica la relación:

$$e^{x+y} = e^x.e^y$$

Demostración:

$$e^{x+y} = E(x+y) = E(x).E(y) = e^x.e^y$$

Definición: Para todo número real positivo a definimos la exponencial de base a y variable real en la forma

$$E_a(x) = e^{xL(a)} = a^x$$

donde es $L(a)$ el logaritmo natural de la base a.

Veremos en una de las propiedades que estudiamos a continuación, que la función será monótona creciente si a es mayor que la unidad y monótona decreciente si a es menor que la unidad.

Propiedades básicas:

Veamos un conjunto de propiedades inmediatas, todas ellas consecuencia de las propiedades de la exponencial neperiana y de su inversa, la función logaritmo.

1) $\forall x \in R,\ L(a^x) = x.L(a)$

Demostración:

$$L(a^x) = L\left(e^{xL(a)}\right) = L\left(E(x.L(a))\right) = x.L(a)$$

2) $\forall x \in R,\ (a.b)^x = a^x.b^x$

Demostración:

$$(a.b)^x = e^{xL(a.b)} = e^{xL(a)+xL(b)} = e^{xL(a)}.e^{xL(b)} = a^x.b^x$$

3) $\forall x, y \in R,\ a^{x+y} = a^x.a^y$

Demostración:

$$a^{x+y} = e^{(x+y)L(a)} = e^{xL(a)+yL(a)} = e^{x.L(a)}.e^{y.L(a)} = a^x.a^y$$

4) $\forall x, y \in R,\ \left(a^x\right)^y = \left(a^y\right)^x = a^{x.y}$

Demostración:

$$\left(a^x\right)^y = e^{yL\left(a^x\right)} = e^{y.xL(a)} = e^{x.yL(a)} = e^{xL\left(a^y\right)} = \left(a^y\right)^x = a^{x.y}$$

5) Se verifica para a^x : $a)\ a^0 = 1,\quad b)\ a^1 = a,\quad c)\ \left(a^x\right)' = a^x.L(a)$

Demostración:

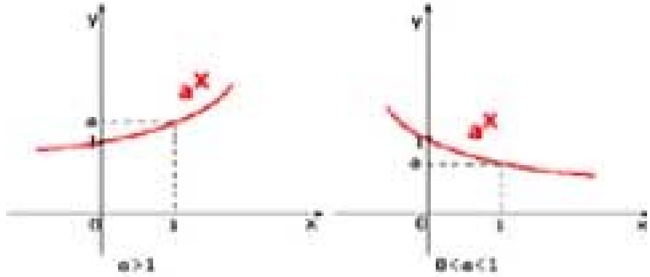
$$a)\ a^0 = e^{0L(a)} = e^0 = 1,\quad b)\ a^1 = e^{1L(a)} = e^{L(a)} = E(L(a)) = a,\quad c)\ \left(a^x\right)' =$$
$$= \left(e^{xL(a)}\right)' = E'(xL(a)) = E(xL(a)).L(a) = e^{xL(a)}L(a) = a^xL(a)$$

6) Si $a > 1$, entonces a^x es continua ymonótona creciente, y si $0 < a < 1$, entonces a^x es continua y monótona decreciente.

Demostración:

- Si $a > 1$, entonces $L(a) > 0 \rightarrow (a^x)' = x.L(a) > 0 \rightarrow a^x$ mon. creciente

- Si $0 < a < 1$, entonces $L(a) < 0 \rightarrow (a^x)' = x.L(a) < 0 \rightarrow a^x$ mon. decreciente
En ambos casos es continua por tener derivada.



7) La exponencial de base a es un isomorfismo del grupo aditivo $(R,+)$ en el grupo multiplicativo $(R_+,.)$. Es estrictamente creciente si $a>1$ y es estrictamente decreciente si $0<a<1$.

Demostración:

a) Es inyectiva, pues es estrictamente monótona (creciente si a>1, decreciente si 0<a<1.
b) Es suprayectiva, pues $\forall y \in R_+, \exists x^0 \in R / E(x^0) = y \rightarrow \exists x = x^0 / L(a) \in R$, tal que $E(x.L(a)) = a^x = y$. En definitiva, $\forall y \in R_+, \exists x \in R / a^x = y$
c) Es homomorfismo, pues de la propiedad 3): $a^{x+y} = a^x.a^y$

Se trata, pues de un homomorfismo biyectivo, o sea, de un isomorfismo.

8) Si a>0, entonces la exponencial $E_a(x) = a^x$ es la función inversa de la función logaritmo en base a, $\log_a x = L(x)/L(a)$:

Demostración:

$$E_a[\log_a(x)] = a^{\log_a(x)} = e^{L(a).\log_a(x)} = e^{L(a).\frac{L(x)}{L(a)}} = e^{L(x)} = x$$

$$\log_a[E_a(x)] = \frac{L(E_a(x))}{L(a)} = \frac{L(a^x)}{L(a)} = \frac{xL(a)}{L(a)} = x$$

9) La función exponencial neperiana, E(x), crece más rápidamente que cualquier polinomio, es decir,

$$\forall n \in N, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

Demostración:

- Veamos que $e^x > x, \forall x \in R$
  - Si $x \leq 0$ es inmediato, pues $e^x > 0 \rightarrow e^x > x$
  - Si $0 < x < 1, L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} < 0 \rightarrow x > L(x) \rightarrow e^x > e^{L(x)} = x$
  - Si $x = 1 \rightarrow e^1 = e \wedge e^0 = 1 \wedge creciente \rightarrow e > 1 \rightarrow e^1 > 1 \rightarrow e^x > x$
  - Si $x > 1 \rightarrow L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} < \int_1^x dt = x - 1 \rightarrow e^{x-1} > e^{L(x)} = x \rightarrow e^x / e > x \rightarrow e^x > xe > x$

- Veamos que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x} = \infty$

De ser $e^x / x = \dfrac{e^{\frac{x}{2}} . e^{\frac{x}{2}}}{2 \frac{x}{2}} = \dfrac{e^{x/2}}{x/2} . \dfrac{e^{x/2}}{2}$. Por el apartado anterior, $\dfrac{e^{x/2}}{x/2} > 1$, por tanto:

$e^x / x > \dfrac{e^{x/2}}{2}$, por lo que, al tomar límites: $\lim\limits_{x \to \infty} e^x / x > \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{x/2}}{2} = \infty$, de donde

resulta $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x} = \infty$

- Veamos finalmente que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty, \ \forall n \in N$

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{x/n}\right)^n}{\left(x/n\right)^n . n^n} = \frac{1}{n^n} \left[\frac{e^{x/n}}{x/n} \right]^n \to \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n^n} . \lim_{x \to \infty} \left[\frac{e^{x/n}}{x/n} \right]^n = \frac{1}{n^n} \left[\lim_{x \to \infty} \frac{e^{x/n}}{x/n} \right]^n = \infty^n = \infty$$

4.Bibliografía:

AHLFORS, Lars V.; Análisis en Variable Compleja, Ed. Aguilar, 1971, Madrid
APOSTOL, Tom M.; Calculus, Ed. Reverté, 1984, Barcelona
SPIVAK, Michael; Calculus, Ed. Reverté, 1983, Barcelona
LANG, S.; Complex Analysis, Ed. Addison Wesley Publishing, 1977, New York