La función exponencial de variable compleja

1. Introducción

La serie formal

$$S(X)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}X^n$$

tiene radio de convergencia infinito, pues de la fórmula

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\leq\rho\leq\lim_{n\to\infty}\sup\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

se tiene, para esta serie:

$$\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{1/n!}{1/(n+1)!}\right|=\liminf_{n\to\infty}|n+1|=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} sup\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1/n!}{1/(n+1)!}\right|=\limsup_{n\to\infty}|n+1|=\infty$$

así, pues, $\rho=\infty$.

Nos ocupamos en este artículo de los aspectos algebraicos y topológicos de la función exponencial e^z.

Consideraremos para ello tanto el campo $(C,+,.)$ de los números complejos, como el espacio topológico (C,T), donde T es la topología métrica en C inducida por la métrica usual, esto es:

$$\forall z_1,z_2\in C,\ d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$$

Consideraremos también el espacio numérico R^2, así como el espacio topológico (R^2,T'), donde T' es la topología natural.

Resulta inmediato que la aplicación $h:R^2\to C$ tal que $\forall(x,y)\in R^2, h(x,y)=x+iy$ es un isomorfismo de espacios vectoriales y también un homeomorfismo de espacios topológicos.

2. Definición y propiedades básicas

Def. 01:

Se define la función exponencial de variable compleja como la función compleja $f:C\to C$ dada por la serie formal $S(X)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}X^n$:

$$f(z)=e^z=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}z^n$$

Si es $h:R^2 \to C$ el indicado homeomorfismo del plano numérico en el plano complejo, estudiaremos la función $h^{-1}\circ f\circ h:R^2 \to R^2$ y su comportamiento frente a las estructuras topológica y geométrica de R^2.

La restricción al campo real de la función exponencial de variable compleja así definida coincide con la definición de la función exponencial de variable real

$$\forall x\in R,\ f(x)=e^x=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n$$

Teorema 1: La función exponencial de variable compleja es:

a) Indefinidamente derivable, siendo $\frac{de^z}{dz}=e^z$

b) Analítica $\forall z\in C$.

c) Un homomorfismo $(C,+)\to(C',.)$, siendo $C'=C-\{0\}$.

Demostración:

a) Es consecuencia de que la función definida en su disco de convergencia por una serie formal es indefinidamente derivable en dicho disco de convergencia, siendo la derivada primera de la función igual a la función que define la serie derivada.

En particular, la serie derivada de la serie $S(X)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}X^n$ es la misma serie $S(X)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}X^n$. $S'(X)=S(X)\to\frac{de^z}{dz}=e^z$

b) Es obvio, de la teoría de series complejas.

c) Veamos que $f(z_1+z_2)=f(z_1).f(z_2),\ \forall z_1,z_2\in C$ y que $f(z)\in C'=C-\{0\},\forall z\in C$:

$$f(z_1).f(z_2)=e^{z_1}.e^{z_2}=\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}z_1^n\right).\left(\sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}z_2^m\right)=\sum_{n\geq 0}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!.(n-p)!}z_1^p z_2^{n-p}=$$

$$=\sum_{n\geq 0}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{n!}\frac{n!}{p!.(n-p)!}z_1^p z_2^{n-p}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n=e^{z_1+z_2}=f(z_1+z_2)$$

En particular, $f(z).f(-z)=f(z+(-z))=f(0)=e^0=1\to f(z)\neq 0,\forall z\in C$, por tanto es $\forall z\in C,\ f(z)\in C-\{0\}$.

Teorema 2:

a) La función exponencial de variable compleja $e^z:(C,T)\to(C,T)$ es continua.

b) La función $f(z)=e^z:(C,T)\to(C',T')$ es continua.

Demostración:

a) Toda función definida por una serie formal es continua en su disco de convergencia.

b) Si llamamos $g(z)=e^z:(C,T)\to(C,T)$ se tiene que $g(C)\subseteq C'$. Por tanto, para ver la continuidad, bastará probar que la imagen inversa de un abierto de T′ es un abierto de T:

$$\forall U\in T',\exists G\in T/U=C'\cap G\to g^{-1}(U)=g^{-1}(C'\cap G)=g^{-1}(G)\in T$$

Por tanto $f(z)=e^z:(C,T)\to(C',T')$ es continua.

3. La exponencial imaginaria

3.1. Definición:

Teorema 3:

a) Sea $U = \{z / z \in C \wedge |z| = 1\}$. Se tiene que $(U,.)$ es subgrupo multiplicativo de $(C,.)$.

b) Sean las aplicaciones

$q : R \to C$, tal que $q(y) = iy, \forall y \in R$.

$f : C \to C$, tal que $f(z) = e^z, \forall z \in C$.

Entonces la aplicación $f \circ q = g : R \to C$ verifica:

1. $g(R) \subseteq U$.
2. g es un homomorfismo: $(R,+) \to (U,.)$.
3. $g : (R,T_d) \to (C,T)$ es una aplicación continua.

Demostración:

a) Como (C,.) es un grupo multiplicativo, (U,.) será subgrupo multiplicativo de (C,.) sii $\forall z \in U, \exists z^{-1} \in U / z.z^{-1} \in U$. Se cumple:

$$\forall z \in U, |z| = 1 \to z \neq 0 \to \exists z^{-1} \in C / z.z^{-1} = 1 \to |z.z^{-1}| = 1 \to z.z^{-1} \in U \wedge |z.z^{-1}| =$$
$$= |z|.|z^{-1}| = 1 \to |z^{-1}| = 1 \to z^{-1} \in U \wedge z.z^{-1} \in U$$

b)

1. $$\left.\begin{array}{l} g(y) = (f \circ q)(y) = f(iy) = e^{iy} \\ g(-y) = (f \circ q)(-y) = f(-iy) = e^{-iy} \end{array}\right\} \to g(y).g(-y) = 1 \to |g(y).g(-y)| = 1 \to$$

$$\to g(y), g(-y), g(y).g(-y) \in U \to \forall y \in R, |g(y)| = 1 \wedge g(y) \in R \to$$
$$\to \forall y \in R, g(y) \in U \to g(R) \subseteq U$$

2. $\forall y_1, y_2 \in R, \to g(y_1 + y_2) = e^{i(y_1+y_2)} = e^{iy_1}.e^{iy_2} = g(y_1).g(y_2)$

3. La aplicación $q : R \to C / \forall y \in R, q(y) = iy \in C$ es trivialmente continua.

La aplicación $f : C \to C / \forall z \in C, f(z) = e^z \in C$ es continua por el teorema 2.

La aplicación $g : R \to C / \forall y \in R, g(y) = (f \circ q)(y) = f[q(y)] = f(iy) = e^{iy} \in C$ es continua, por ser composición de funciones continuas.

3.2. Definición de las funciones seno y coseno:

Del teorema anterior, sabemos que

$$e^{iy} = 1 + \frac{1}{1!}iy - \frac{1}{2!}y^2 - \frac{1}{3!}iy^3 + \frac{1}{4!}y^4 + \frac{1}{5!}iy^5 - \frac{1}{6!}y^6 - \frac{1}{7!}iy^7 - \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \frac{1}{6!}y^6 + \ldots\right) + i\left(\frac{1}{1!}y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \frac{1}{7!}y^7 - \ldots\right)$$

Def. 02:

Definimos las funciones $sen(y)$ y $\cos(y)$ como las aplicaciones de R en R dadas por

$$\cos(y) = 1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \frac{1}{6!}y^6 + \ldots, \qquad sen(y) = \frac{1}{1!}y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \frac{1}{7!}y^7 - \ldots$$

es decir, por las series formales

$$T(X) = 1 - \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{4!}X^4 - \frac{1}{6!}X^6 + \ldots \quad \text{y} \quad S(X) = \frac{1}{1!}X - \frac{1}{3!}X^3 + \frac{1}{5!}X^5 - \frac{1}{7!}X^7 - \ldots$$

cuyas derivadas respectivas son:

$$T'(X) = -\frac{1}{1!}X + \frac{1}{3!}X^3 - \frac{1}{5!}X^5 + \frac{1}{7!}X^7 - ... = -S(X)$$

$$S'(X) = 1 - \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{4!}X^4 - \frac{1}{6!}X^6 + ... = T(X)$$

De lo cual se obtiene respectivamente: $\frac{d\cos(y)}{dy} = -sen(y)$ y $\frac{dsen(y)}{dy} = \cos(y)$

Ambas funciones son obviamente analíticas y se verifica la conocida igualdad:

$$e^{iy} = \cos(y) + isen(y).$$

Análogamente, se obtiene $e^{-iy} = \cos(y) - isen(y)$

4. Sobre el número π

Teorema 4:

El conjunto $I = \{y / y \in [0,2] \wedge \cos(y) = 0\}$ verifica:

a) $I \neq \phi$ (no es vacío)

b) $\exists h \in R / h = \min I$ (existe elemento mínimo)

Demostración:

a) Para probar que I es no vacío veamos que la función continua $\cos(y)$ toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo $[0,2]$, por lo que, aplicando el teorema de Bolzano, existirá un punto intermedio $0 < c < 2$ en el que $\cos(y)$ toma el valor cero ($\cos(c) = 0$). Efectivamente:

$$\cos 0 = 1 > 0$$

$$\cos 2 = 1 - \frac{1}{2!}2^2 + \frac{1}{4!}2^4 - \frac{1}{6!}2^6 + \frac{2^8}{8!}.-.. = 1-(1+1) + \frac{16}{24} - \frac{1}{6!}2^6 + \frac{2^8}{8!}.-.. =$$

$$= 0 - \left(1 - \frac{16}{24}\right) - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - .. < 0$$

Por tanto, $\exists c \in [0,2] / \cos c = 0 \rightarrow I \neq \phi$

b) El conjunto I está inferiormente acotado por el cero. Para ver que existe elemento mínimo de I hemos de tener en cuenta que el ínfimo, que es el máximo de las cotas inferiores, puede o no pertenecer al conjunto. Si el ínfimo pertenece al conjunto es también su elemento mínimo. Por ejemplo, el intervalo (3,4] no tiene elemento mínimo y si tiene elemento máximo.

Sea c el elemento ínfimo de I, $c = \inf I$. Veamos que entonces ha de ser, $c \in I$, y por tanto su elemento mínimo, mediante un razonamiento por reducción al absurdo, es decir, probando que si no se cumpliera la tesis, $c \in I$, entonces también será falsa la hipótesis:

Supongamos, entonces que $c = \inf I$ y que $c \notin I$, esto es, que $\cos c \neq 0$. Como la función $\cos(y)$ es continua existirá una bola de centro en c en donde tampoco se anula el coseno:

$$\exists B(c,\delta) / \forall y \in B(c,\delta), \cos(y) \neq 0 \rightarrow c \neq \inf I$$

En definitiva, $c = \inf I = \min I$.

Def. 03:
Definimos el número real π por:

$$\frac{\pi}{2} = \min I = \min\left\{ y / y \in [0,2] \wedge \cos(y) = 0 \right\}$$

Teorema 5:
Sea $g : R \to U$ definida por $\forall y \in R, g(y) = e^{iy}$. Se tiene:
1) La aplicación $g : [0, \pi/2] \to U_1 = U \cap C_1$, ($C_1$ es el primer cuadrante del plano) es un homeomorfismo.
2) La aplicación $g : (h, h+2\pi] \to U, \forall h \in R$ es una aplicación biyectiva continua.
3) La aplicación $g : (h, h+2\pi) \to U - \left\{ e^{ih} \right\}, \forall h \in R$ es un homemorfismo.
4) Si $k \leq 2\pi$ la aplicación $g : (h, h+k) \to g(h, h+k) \subseteq U,\ \forall h \in R$ es un homeomorfismo.
Demostración:
1) se trata de probar que g es aplicación biyectiva, y que es continua con inversa continua entre los espacios métricos $A = [0, \pi/2], U_1 = U \cap C_1$:

Puesto que $\forall y \in A, g(y) = e^{iy} = \cos(y) + isen(y)$, y siendo en A las funciones $\cos(y)$ estrictamente decreciente y $sen(y)$ estrictamente creciente, la función g es inyectiva. Y también es sobreyectiva, pues $\forall z \in U_1, \exists y \in A / g(y) = e^{iy} = z$. Por tanto es una biyección.
Puesto que ambos espacios, $A \equiv [0, \pi/2], U_1 = U \cap C_1$ son espacios métricos, cerrados y acotados, son espacios compactos, y todo subconjunto cerrado en cualquiera de ellos es también compacto. Como la imagen de un compacto es también un compacto, se tiene que la imagen por g de un cerrado del espacio métrico (A, T_A) es un cerrado del espacio métrico (U_1, T_{U_1}), y asimismo, la imagen inversa de un cerrado de (U_1, T_{U_1}) es un cerrado de (A, T_A), por lo que g^{-1} es también continua. Luego g es homeomorfismo.
También, por razón análoga, son homeomorfismos las aplicaciones
$g : [\pi/2, \pi] \to U_2 = U \cap C_2$ (C_2: 2º cuadrante)
$g : [\pi, 3\pi/2] \to U_3 = U \cap C_3$ (C_3: 3º cuadrante)
$g : [3\pi/2, 2\pi] \to U_4 = U \cap C_4$ (C_4: 4º cuadrante)
Obviamente, es $r = 2\pi$ el mínimo número real positivo tal que $e^{ri} = 1\ (e^{2\pi i} = 1)$.
2) Por lo anterior, la aplicación $g : (0, 2\pi] \to U$ es una biyección continua, que, sin embargo, no es un homemorfismo, pues la inversa $g^{-1} : U \to g : (0, 2\pi]$ no es continua en $w = 1$, ya que la sucesión de elementos de U: $\left\{ w_n \right\}_{n \geq 0}$ tal que $w_n = \cos(1/n) + isen(1/n)$ verifica que $\lim_{n \to \infty} w_n = 1$, mientras que la sucesión $\left\{ z_n \right\}_{n \geq 0}$ donde es $z_n = g^{-1}(w_n) = 1/n$ no tiene límite en $(0, 2\pi]$, por lo que g^{-1} es discontinua en $w = 1$.
Si consideramos el intervalo $(h, h+2\pi]$ y la aplicación $\varphi : (h, h+2\pi] \to (0, 2\pi]$, donde es $\varphi(x) = x - h$, vemos que se trata de un homeomorfismo, por lo que $g : (h, h+2\pi] \to U$ es también solo una biyección continua.

3) Como $(h,h+2\pi]\subseteq(0,2\pi]$ se tiene que $g:\left(h,h+2\pi\right)\to U-\left\{e^{ih}\right\},\forall h\in R$ es, al menos, biyección continua. Veamos que la inversa es también continua, por lo que ha de ser homeomorfismo:
$\forall w\in U,\exists b\in\left(h,h+2\pi\right)/e^{ib}=w\ \left(b\ único\right)$.
Si $g^{-1}:U-\left\{e^{ih}\right\}\to\left(h,h+2\pi\right)$ no fuera continua en $w=e^{ib}$ existiría una bola $B(b;\varepsilon)\subseteq\left(h,h+2\pi\right)$ y una sucesión $\left\{w_n\right\}_{n\geq 0}$ tales que $\lim_{n\to\infty}w_n=w$ y entonces $g^{-1}(w)=x_n\notin B(b;\varepsilon),\forall n\in N\to x_n\in\left(h,h+2\pi\right)-B(b;\varepsilon)$.
Como $D=\left[h,h+2\pi\right]-B(0;\varepsilon)$ es cerrado y acotado, cumple la propiedad de Bolzano-Weierstrass, por lo que $\exists c\in\bar{D}$ que es punto de acumulación de $\left\{x_n\right\}$ tal que, como es obvio, $c\neq 1$ y $e^{ic}=w=e^{ib}$, lo cual es imposible por ser g una biyección.
En definitiva, g^{-1} es continua y $g:(h,h+2\pi)\to U-\left\{e^{ih}\right\}$ es homeomorfismo.
4) Como $(h,h+k)\subseteq(h,h+2\pi)$ y $g:(h,h+2\pi)\to U-\left\{e^{ih}\right\}$ es homeomorfismo, será también homeomorfismo $g:\left(h,h+k\right)\to g\left(h,h+k\right)\subseteq U,\ \forall h\in R$.

Teorema 6:
Sea $g:R\to U$ definida por $\forall y\in R, g(y)=e^{iy}$. Se tiene:
1) U es conexo.
2) El homomorfismo $g:(R,+)\to(U,.)$ verifica que $\ker g=\left\{2\pi n/n\in Z\right\}=2\pi Z$.
3) Sea el grupo cociente $R/2\pi z$ y el epimorfismo canónico $n:R\to R/2\pi z$. La aplicación $g:R\to U$ induce una aplicación $q:R/2\pi z\to U$ tal que $g=q\circ n$. Si T_N es la topología cociente en $R/2\pi z$ se tiene:
   a) $q:(R/2\pi z,+)\to(U,.)$ es un isomorfismo.
   b) $q:(R/2\pi z,T_N)\to(U,T_U)$ es un homemorfismo.
Demostración:
1) Puesto que $U=g\left(\left(h,h+2\pi\right]\right)$, g es continua y $\left(h,h+2\pi\right]$ un intervalo conexo de R, se deduce que U es conexo.
2) Por el teorema anterior sabemos que 2π es el mínimo número real positivo tal que $e^{2\pi i}=1$. Como g es homomorfismo, será también $e^{2\pi ni}=1,\forall n\in Z$.
Veamos que $\forall r\in\ker g$ es $r=2\pi n$:
Si no fuera $r=2\pi n$ se tendría que $2\pi n<r<2\pi(n+1)$. Si llamamos $s=r-2\pi n$, se tendrá que $0<r-2\pi n<2\pi\to 0<s<2\pi$, y $e^{ri}=e^{(s+2\pi n)i}=e^{si}.e^{2\pi ni}=e^{si}=1$, lo cual contradice la afirmación de que es 2π el mínimo número real positivo tal que verifica $e^{2\pi i}=g(2\pi)=1$. Por consiguiente es $\ker g=2\pi Z$.
3) De la descomposición canonica del epimorfismo $g:R\to U$ obtenemos el homomorfismo $q:(R/2\pi Z,+)\to(U,.)$ tal que $g=q.n$, cumpliendo que:
3.a) q es continua, pues si $G\in T_U$ entonces $g^{-1}(G)\in T_d$, es decir $n^{-1}(q^{-1}(G))\in T_d$. Por definición de topología cociente $q^{-1}(G)\in T_n$, lo que prueba que q es continua.
3.b) Como $\left[0,2\pi\right]$ es compacto en R, n es continua y $n\left(\left[0,2\pi\right]\right)=R/2\pi Z$, se deduce que $R/2\pi Z$ es $T_N-compacto$.

3.c) Como una aplicación continua y biyectiva de un espacio topológico compacto en un espacio topológico de Hausdorff es un homeomorfismo, podemos afirmar que la aplicación $q:(R/2\pi Z, T_N) \to (U, T_U)$ es homeomorfismo.

6. Bibliografía:

AHLFORS, Lars; Análisis de variable compleja, 1966, Ed. Aguilar, Madrid.
COPSON, E.T.; An introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable, 1972, Oxford University Press, Londres.
KNOPP, Konrad; Theory of Functions, 1947, Dover Publications, New York.
CHURCHILL, Ruel V.; Teoría de funciones de variable compleja, 1966, McGraw-Hill, New York.
PHILLIPS, E.G.; Funciones de variable compleja, 1963, Dossat, Buenos Aires.
LEVINSON, Norman-REDHEFFER, Raymond M.; Curso de Variable compleja, 1990, Reverté, Barcelona.
DIEUDONNÉ, Jean; Fundamentos de Análisis Moderno, 1979, Reverté, Barcelona.
CARATHEODORY, C.; Theory of Functions of a Complex Variable, 1983, Chelsea Publishing, Providence.
MARKUSHEVICH, A.I.; Teoría de funciones analíticas, 1986, Mir, Moscú.