

# Elementos de Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos

Alexander Moreno Sánchez

Centro Colombiano de Cosmología Astrofísica y Astronáutica (CCCAA)

Bogotá. D. C, Colombia.

amorenosa@unal.edu.co

Recibido 01-12- 2021; Aceptado 24 - 12- 2021; Publicado en línea 27 - 12- 2021

---

## Resumen

Se hace una breve introducción a los sistemas dinámicos, se presentan elementos matemáticos que definen los conceptos propios de los sistemas dinámicos, también se presentan algunos ejemplos de estudio y solución de sistemas dinámicos discretos y continuos.

**PACS:** 97.60.Bw, 26.30.Ef, 07.85.-m, 97.70.Rz

**Palabras Claves:** sistema dinámico, sistemas discretos, sistemas continuos, puntos fijos.

## Abstract

A brief introduction to dynamical systems is made, mathematical elements that define the concepts of dynamical systems are presented, some examples of study and solution of discrete and continuous dynamical systems are also presented.

**PACS:** 97.60.Bw, 26.30.Ef, 07.85.-m, 97.70.Rz

**Keywords:** dynamic system, discrete systems, continuous systems, fixed points.

©2021.

---

## 1 Introducción

Los sistemas dinámicos constituyen un enorme campo de estudio analítico y sistemático de enormes porciones de la realidad. Sus aplicaciones son múltiples desde las matemáticas puras, hasta sistemas muy complejos como son las redes y sistemas de computo avanzados, pasando por multitud de sistemas convencionales como circuitos eléctricos, sistemas mecánicos, o sistemas hidráulicos. Un sistema dinámico puede entenderse y aproximarse como un conjunto de elementos que evolucionan con el tiempo. Muchos sistemas físicos presentan este tipo de características, por ejemplo los sistemas más básicos son sistemas mecánicos y eléctricos los cuales describen los principios y fundamentos de los sistemas dinámicos, pero igualmente existen modelos sociales, económicos, matemáticos, computacionales, climáticos, biológicos, y de otros tipos que son aún más abstractos. El comportamiento y evolución de un sistema dinámico, se estudia definiendo los estados y límites del sistema, como también los elementos constitutivos y sus relaciones reciprocas; con lo cual se pueden elaborar modelos, esquemas, técnicas y representaciones que permitan conocer su evolución y estados futuros de un sistema dinámico.

Existe una amplia clasificación de sistemas dinámicos. pero se pueden considerar dos tipos básicos, los sistemas dinámicos discretos y los sistemas dinámicos continuos, en los sistemas discretos el tiempo transcurre

en ciertos intervalos o lapsos y es muy frecuente su descripción mediante relaciones recursivas, es decir donde los estados se definen de forma específica y concreta en un intervalo de tiempo, mientras en los sistemas continuos el tiempo transcurre de forma continu y la descripción del sistema es mediante ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones diferenciales. Pero independiente del tipo de sistema siempre se busca entender la evolución y los estados futuros de dichos sistemas[1][2][3][4].

## 2 Conceptos básicos de sistemas dinámicos

Para avanzar en el estudio de sistemas dinámicos y lograr su modelamiento se definen diferentes conceptos los cuales permiten obtener o predecir valores de una determinada magnitud para dar respuesta a problemas o necesidades del mundo real (físicas, económicas, biológicas, médicas...). Un sistema es un ente u objeto que está compuesto de diferentes componentes o partes que se interrelacionan de alguna manera entre sí (con todos los demás o con alguno de ellos). Según la teoría de sistemas, todos los constituyentes son un sistema en sí mismos o son componentes de otro sistema de mayor nivel. Los sistemas dinámicos son aquellos en los que su comportamiento cambia o evoluciona con el paso del tiempo y estas modificaciones o transformaciones de su estado pueden ser analizadas o modeladas mediante modelos matemáticos[5][6].

La metodología que permite estudiar y describir cómo afecta el entorno y la iteración entre los componentes y partes que conforman el sistema a lo largo del tiempo al comportamiento o estado del sistema se denomina dinámica de sistemas. Entonces, ¿Por qué son importantes los sistemas dinámicos? Como se ha mencionado anteriormente, los sistemas dinámicos tienen múltiples aplicaciones para el estudio y modelado de sistemas reales para resolver múltiples problemas o dar respuesta a diversas necesidades. Algunos ejemplos reales de utilización de sistemas dinámicos son: calcular las ganancias o rentabilidad que se obtendrá con una determinada inversión económica a lo largo del tiempo, predecir la población de una determinada región pasados un determinado número de años o la evolución temporal de esta, estudiar el comportamiento de una determinada población bajo algunas condiciones especiales, modelar el comportamiento de ciertos sistemas físicos, y así sucesivamente. La teoría matemática que hay detrás de los sistemas dinámicos es bastante compleja y rigurosa, por ello se hace necesario definir los siguientes elementos:

Un sistema dinámico consiste en un espacio de fase o de estado y una regla matemática que describe la evolución de cualquier punto en este espacio, los sistemas dinámicos modelan, por ejemplo desde un péndulo simple, el crecimiento de una población, una pandemia, el corazón o cerebro humano, o el universo entero. Por lo tanto, los SD son de gran importancia ya que permiten reunir muchas propiedades, variables y dinámicas de una gran cantidad de sistemas.

El estado de un sistema es un conjunto de cantidades que representan o describen el sistema en consideración y el espacio de estado es el conjunto de todos los posibles valores de las cantidades o variables representativas del sistema en consideración.

Existen dos tipos principales de sistemas dinámicos. El primero es el de los sistemas dinámicos continuos cuya evolución es definida por ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y el otro tipo es el de los sistemas dinámicos discretos definidos mediante ecuaciones en diferencias. Un tipo particular de sistemas dinámicos continuos son los sistemas dinámicos autónomos.

La forma estándar de un sistema dinámico, usualmente se expresa como

$$\dot{x} = f(x) , \quad (1)$$

donde  $x \in X$ , es decir que  $x$  es un elemento del espacio de estado  $X \subset \mathbb{R}^n$ , y  $f : X \rightarrow X$ , esta función es un campo vectorial, ya que

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \quad (2)$$

y

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3)$$

Este conjunto de ecuaciones diferenciales definen el campo vectorial del sistema. En cualquier punto  $x \in X$  y en cualquier instante particular  $t$ ,  $f(x)$  define un campo vectorial en  $\mathbb{R}^n$ .

### 3 Definición (*punto crítico*)

El sistema de ecuaciones autónomo  $\dot{x} = f(x)$ , se dice que tiene un punto crítico o punto fijo en  $x = x_0$  si sólo si  $f(x_0) = 0$ .

Un punto crítico  $(x, y) = (x_0, y_0)$ , es estable si todas las soluciones  $x(t)$  inician cerca o permanecen estacionarias en este punto, y es asintóticamente estable si éste es estable y las soluciones se aproximan al punto crítico para todas las condiciones iniciales cercanas[7][8]. Igualmente tenemos el teorema de punto fijo de Brouwer el cual establece que toda función continua de un intervalo cerrado en sí mismo  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ , tiene al menos un punto fijo en  $[a, b]$ .

Si  $x^*$  es un punto fijo ( $f(x) = x$ ), cuando la función  $f$  es derivable, y  $|f'(x^*)| < 1$ , entonces, el punto  $x^*$  se llama punto fijo atractor. Cuando una iteración funcional comienza suficientemente cerca de él, irremediablemente cae dentro de su ámbito de influencia y la sucesión (órbita) converge. Por el contrario, si  $|f'(x^*)| > 1$  se trata de un punto fijo repulsor, y por muy cerca de él que se comience, la sucesión termina por alejarse[8][9].

### 4 Teoría de la estabilidad lineal

Dado un sistema dinámico  $\dot{x} = f(x)$  con un punto crítico en  $x = x_0$ , el mismo se puede linealizar, realizando una expansión de Taylor, tal que

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots, \quad (4)$$

lo cual se puede expresar como

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad (5)$$

entonces, aplicando la definición de punto crítico y eliminando los términos de alto orden, se obtiene

$$\dot{x} = f'(x_0)(x - x_0). \quad (6)$$

En esta parte, para el punto crítico  $x_0$  se puede deducir que

1. Es estable si  $f'(x_0) < 0$
2. Es inestable si  $f'(x_0) > 0$
3. Desconocido, si  $f'(x_0) = 0$ , en la teoría de estabilidad lineal este criterio no decide.

Para sistemas de altas dimensiones, los valores propios de la matriz Jacobiana del sistema evaluado en los puntos críticos revela información sobre la estabilidad de los puntos fijos. Entonces, dado un sistema dinámico  $\dot{x} = f(x, t)$  con punto crítico en  $x = x_0$ , el sistema linealizado alrededor del punto crítico se expresa como

$$\mathcal{J} = Df(x_0) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{x=x_0}, \quad (7)$$

donde  $\mathcal{J}$  es llamada la matriz Jacobiana.

Si  $x = x_0$  es un punto fijo o crítico del sistema  $\dot{x} = f(x)$ , se dice que  $x_0$  es hiperbólico si ninguno de los valores propios de  $Df(x_0)$  tienen parte real cero, y no hiperbólico en caso contrario. Si el punto es no hiperbólico, la teoría de estabilidad lineal falla y por tanto técnicas alternativas tales como las funciones de Lyapunov's o la teoría de la variedad central deben aplicarse[10].

### 5 Modelo discreto

El modelo a considerar es el de Ricker. En esta práctica realizaremos la simulación de un modelo clásico discreto no lineal conocido con el nombre de Modelo de Ricker. El modelo de Ricker se ha venido utilizando a partir de la publicación del artículo original en 1950 hasta la actualidad, en dinámica de poblaciones de peces, y especialmente

en la evolución de una población de salmones. Según la página web de la Canadian Aquatic Resources Section of the American Fisheries Society <sup>3</sup>, William Edwin Ricker (1908-2001) nació en Waterdown, Ontario y fue un gran biólogo teórico, además de gran entomólogo. Sus libros de textos, especialmente en ecología, siguen teniendo una gran influencia en los estudios actuales de posgrados.

Se trata de un modelo discreto basado en una ecuación en diferencias, con el objetivo de predecir, conocido el valor inicial  $y_0$  y el número de individuos que habrá en cierto momento  $t + 1$  a partir de la cantidad de individuos en el momento  $t$ . Es decir, el modelo es un sistema dinámico del tipo:

$$y_{t+1} = f(y_t) ; y_0 = y(0) , \quad (8)$$

cuyas ecuaciones están dadas por

$$y_{t+1} = y_t e^{r(1-\frac{y_t}{k})} ; y_0 = y(0) , \quad (9)$$

donde  $r$  es la tasa intrínseca de crecimiento y  $k$  su capacidad de carga.

El modelo es dependiente de la densidad de la población y generaliza al modelo logístico. En su formulación existe un término que limita el crecimiento de la población para que ésta no crezca sin límite. Observamos que para valores pequeños  $y_t \ll k$ , la población crecerá exponencialmente, pero a medida que  $y_t$  aumenta el factor exponencial de la ecuación reduce el crecimiento de  $y_t + 1$ .

Estudio de los puntos de equilibrio: Los puntos de equilibrios del modelo son las soluciones constantes. Como la función  $f$  que define al modelo viene dada por

$$f(x) = x e^{r(1-\frac{x}{k})} , \quad (10)$$

entonces los puntos de equilibrio se obtienen resolviendo

$$f(x) = x e^{r(1-\frac{x}{k})} = x , \quad (11)$$

lo cual corresponde a la intersección de la curva  $f(x)$  y la bisectriz en el primer cuadrante, así se obtiene

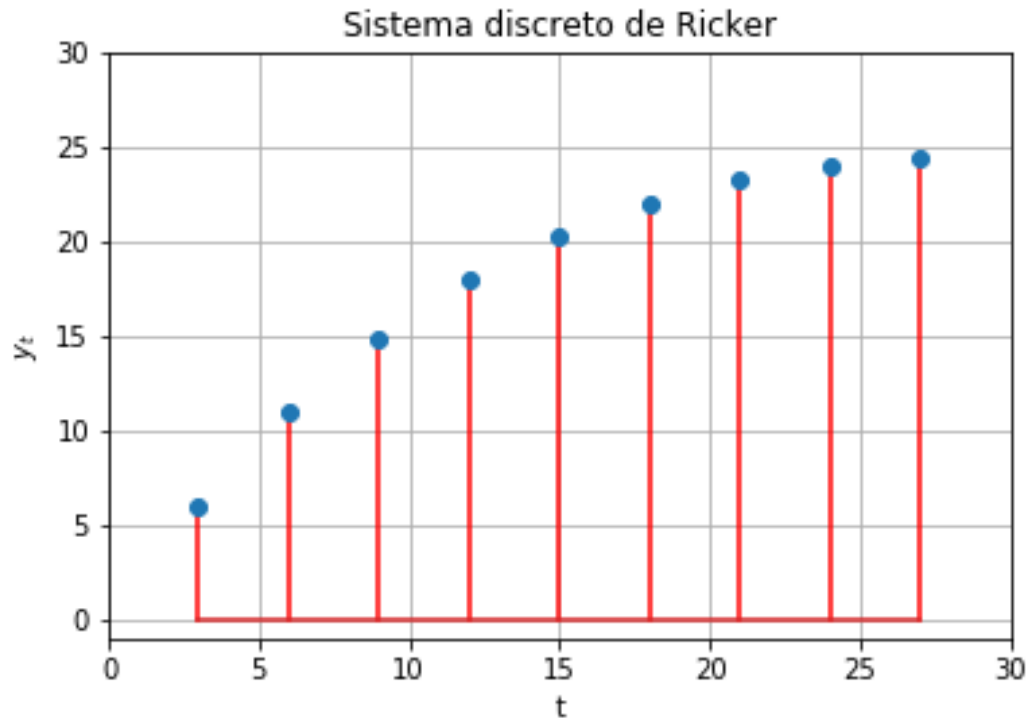
$$x(e^{r(1-\frac{x}{k})} - 1) = 0 , \quad (12)$$

que conduce a las soluciones  $x_1 = 0$  y  $x_2 = k$ . Por lo tanto, un punto de equilibrio es estable cuando la órbita de cualquier punto tiende a ese punto de equilibrio a medida que transcurre el tiempo, estabilizándose en ese valor. Es conocido que ello ocurre cuando el valor absoluto de la primera derivada de la función que define al modelo en el punto de equilibrio es menor que la unidad. por el contrario si el valor absoluto de la primera derivada en ese punto es mayor que la unidad, entonces el punto de equilibrio será inestable. Entonces, considerando primera derivada

$$f'(x) = e^{r(1-\frac{x}{k})} (1 - \frac{rx}{k}) , \quad (13)$$

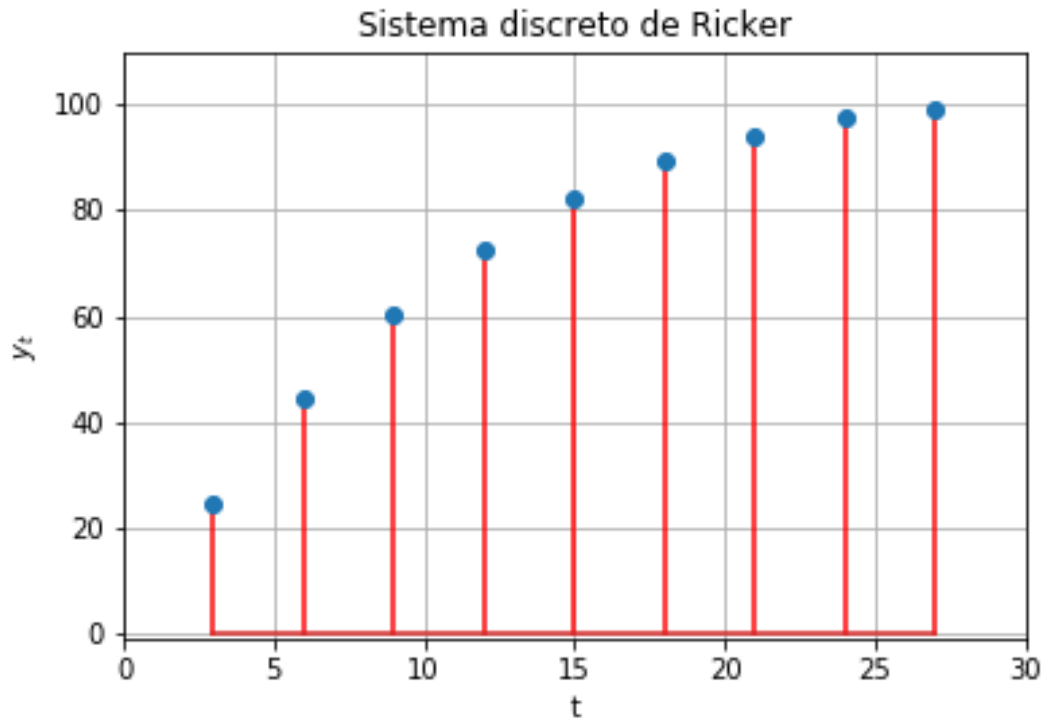
entonces evaluando en el primer punto  $x_1 = 0$  se obtiene  $|f'(0)| = |e^r|$ , lo cual indica que si  $e^r < 1$  el punto  $x_1 = 0$  será estable, lo cual se presenta para  $r < 0$ , pero para las consideraciones de una población debe ser positivo. El segundo punto  $x_2 = k$ , será estable si  $|f'(k)| = |1 - r| < 1$ , es decir que  $0 < r < 2$ , así que mientras se permanezca en el intervalo  $(0, 2)$ , las trayectorias del sistema tienden a estabilizarse en el valor  $k$ .

Se analizará que ocurre  $y_t$  cuando  $t$  aumenta y cuando se varía los valores del parámetro  $r$ , por ejemplo considérese  $r = 0.8$  y 9 valores de tiempo, se obtiene la siguiente gráfica



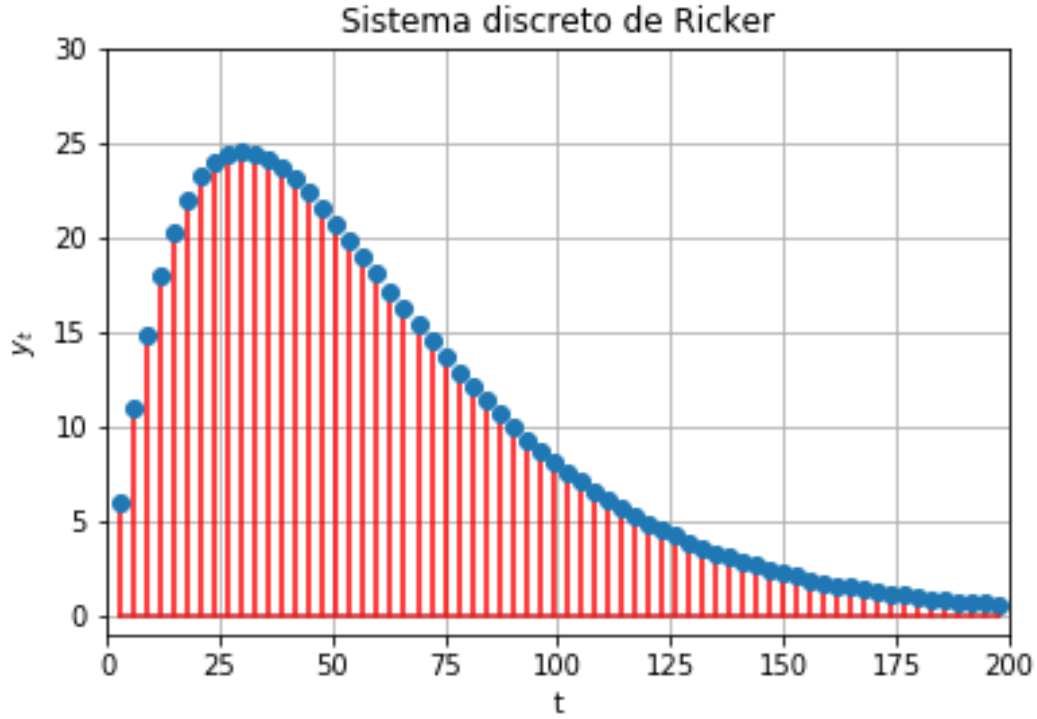
Órbitas para el modelo de Ricker con  $y_0 = 3, r = 0.8, k = 30$ .

Si el valor del punto inicial se cambia, el comportamiento seguirá siendo el mismo, o si se modifica el valor de  $k$ . La órbita siempre tenderá al valor de la capacidad de carga  $k$ . Ahora si se cambia el valor de  $r$  a  $r = 2.2$ , se obtiene la siguiente gráfica



Órbitas para el modelo de Ricker con  $y_0 = 3$ ,  $r = 2.2$ ,  $k = 30$ . Los valores se incrementan fuertemente, o que indica pérdida de estabilidad.

Igualmente se pueden obtener gráficas para  $r = 0.8$  y una mayor cantidad de puntos, en este caso 66 puntos, y se obtiene la siguiente gráfica, la cual muestra un comportamiento estable tendiendo a un valor constante



Órbitas para el modelo de Ricker con  $y_0 = 3$ ,  $r = 2.2$ ,  $k = 30$ . Los valores se normalizan a un valor constante, lo que indica estabilidad para estas condiciones.

Para el análisis de los sistemas dinámicos continuos se considera un sistema dinámico muy especial, que se estudia en los ámbitos científicos, como son los sistemas dinámicos cosmológicos[9][10].

## 6 Sistema dinámico de Friedmann

En esta sección, se desarrolla una aproximación al estudio de las ecuaciones dinámicas que gobiernan la evolución del universo en el marco de la cosmología estándar. La ecuación de evolución del universo identificada con la esfera gravitacional, está dada por el sistema dinámico de Friedmann, donde se hace la siguiente identificación  $R \equiv a$ , de forma convencional el factor de escala se denota con  $a$ , así las ecuaciones de Friedmann toman la forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (14)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{6}\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3},$$

$$\dot{\rho} = -3H\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \quad (15)$$

tenemos dos ecuaciones diferenciales para las dos variables  $a(t)$ ,  $\rho(t)$ , las cuales se pueden resolver una vez los dos parámetros  $k$  y  $\Lambda$  sean escogidos. En el contexto de la RG, se puede deducir las leyes de la evolución para el factor de escala del universo. Las expresiones anteriores se pueden escribir como[11][12][13]

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (16)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (17)$$

Este conjunto de ecuaciones se puede analizar de varias maneras, una de ellas es el análisis de sistema dinámico, que se puede construir como:

$$\begin{cases} H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \\ \dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Estas ecuaciones forman un conjunto de dos ecuaciones independientes para tres variables  $a$ ,  $p$ ,  $\rho$ , una de las aproximaciones usuales es resolver el sistema dinámico especificando el contenido de materia del universo considerando una ecuación de estado  $p = (\gamma - 1)\rho c^2$ , así, por ejemplo, un fluido sin presión (fluido de galaxias) está dado por  $\gamma = 1$ ,  $p = 0$ ; o un fluido de radiación (fotones, partículas relativistas, neutrinos, etc) modelado con  $\gamma = 4/3$ ,  $p = 1/3\rho c^2$ .

Primero se integra la ecuación de continuidad y se obtiene

$$\rho(a) = C_0 a^{-3\gamma}, \quad (19)$$

la cual se inserta en la primera ecuación de Friedmann, resultando la siguiente expresión

$$\frac{da}{dt} = a \left[ \frac{\kappa}{3} C_0 a^{-3\gamma} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \right]^{1/2}, \quad (20)$$

aquí, tenemos una ecuación diferencial de primer orden para el factor de escala, es decir es función del tiempo y de los parámetros del modelo considerado  $a = a(t; \kappa, C_0, \gamma, k, \Lambda)$ . Con esta ecuación se determinan soluciones específicas para diferentes modelos físicos.

Como se mencionó, la otra aproximación es estudiar el sistema dinámico de Friedmann, que entre otras muchas cosas, permite determinar su espacio de fase. Entonces, se obtiene un sistema dinámico autónomo, introduciendo tres nuevas variables, denotadas por  $\Omega_b$ ,  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_k$ , mediante la siguiente expresión algebraica

$$1 = \frac{\kappa}{3H^2}\rho - \frac{kc^2}{H^2 a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3H^2}, \quad (21)$$

ahora, definimos las variables anteriores como

$$\Omega_b = \frac{\kappa}{3H^2}\rho, \quad \Omega_k = -\frac{kc^2}{H^2 a^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2}. \quad (22)$$

Estas cantidades representan las densidades de energía relativas a densidad de materia, densidad de energía de curvatura y densidad de energía de constante cosmológica, presentes en el universo, donde la densidad de energía de materia bariónica  $\Omega_b$  debe ser positiva, mientras las otras dos densidades pueden asumir cualquier signo. De esta manera la ecuación de Friedmann se puede escribir como

$$1 = \Omega_b + \Omega_k + \Omega_\Lambda. \quad (23)$$

Ahora bien, tenemos que

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2, \quad (24)$$

con lo cual, se obtiene a partir de la segunda ecuación de Friedmann, la siguiente expresión

$$\dot{H} = -(q+1)H^2, \quad (25)$$



con

$$q = \left(\frac{3\gamma}{2} - 1\right)(1 - \Omega_k) - \frac{3\gamma}{2}\Omega_\Lambda . \quad (26)$$

Es conveniente reescribir el conjunto completo de ecuaciones introduciendo una nueva variable temporal adimensional conocido como  $e - folds$  dado por

$$N = \ln\left(\frac{a}{a_0}\right) , \quad (27)$$

donde  $a_0$  es el valor inicial de  $a$ , con lo cual las derivadas respecto a  $N$ , para cualquier cantidad física  $X$ , son dadas por

$$\frac{dX}{dN} = \frac{1}{H} \frac{dX}{dt} , \quad \dot{H} = HH' \quad (28)$$

entonces,

$$H' = -(q + 1)H . \quad (29)$$

Según lo anterior diferencianado  $\Omega_b$ ,  $\Omega_k$ ,  $\Omega_\Lambda$  respecto a  $N$ , se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \Omega'_b = (2q - 3\gamma + 2)\Omega_b \\ \Omega'_\Lambda = 2(q + 1)\Omega_\Lambda \\ \Omega'_k = 2q\Omega_k \end{cases} \quad (30)$$

No es usual estudiar el sistema completo, ya que  $H$  no entra en el sistema autónomo, y además  $\Omega_b$  puede ser deducido de la relación algebraica

$$\Omega_b = 1 - \Omega_k - \Omega_\Lambda , \quad (31)$$

por lo tanto conservamos el sistema cerrado dado por

$$\begin{cases} \Omega'_\Lambda = 2(q + 1)\Omega_\Lambda \\ \Omega'_k = 2q\Omega_k \end{cases} \quad (32)$$

siendo  $q = q(\Omega_\Lambda, \Omega_k)$ .

El sistema anterior es un sistema autónomo, lo cual implica que existe una única integral, o curva integral que pasa a través de un punto dado, excepto donde el vector tangente no este definido (puntos fijos). En cada punto sobre la curva del sistema se asigna un único vector tangente, por ende dos trayectorias no pueden cruzarse, ya que el vector tangente no podría ser único.

Para, comprender un poco más la dinámica involucrada se requiere determinar el conjunto de puntos fijos, es decir el conjunto de soluciones tal que  $\Omega'_\Lambda = 0$ ,  $\Omega'_k = 0$ . Estas soluciones representan posiciones de equilibrio, las cuales pueden ser estables o inestables, así los puntos fijos son soluciones de

$$\begin{aligned} (1 + q)\Omega_k &= 0 \\ q\Omega_k &= 0 , \end{aligned} \quad (33)$$

de este modo los puntos fijos son

$$(\Omega_\Lambda, \Omega_k) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\} , \quad (34)$$

cada una de estas soluciones representan un universo con diferentes características físicas:

*i)* Espacio Einstein-dSitter (*EdS*)

Definido por el punto fijo  $(\Omega_\Lambda, \Omega_k) = (0, 0)$ , este es un universo con una sección plana, es decir las hipersuperficies tridimensionales de tiempo constante son euclidianas, sin constante cosmológica, se puede deducir que

$$\Omega_b = 1 \quad , \quad q = \frac{3}{2}\gamma - 1 \quad , \quad (35)$$

e integrando la primera ecuación de Friedman, se obtiene

$$a(t) = \left( \sqrt{\frac{\kappa C}{3}} t \right)^{\frac{2}{3\gamma}} \quad . \quad (36)$$

*ii) Espacio deSitter (dS)*

Definido por el punto fijo  $(\Omega_\Lambda, \Omega_k) = (0, 1)$ , corresponde a un espacio con constante cosmológica y sección espacial plana, donde se puede deducir que

$$\Omega_b = 0 \quad , \quad q = -1 \quad , \quad (37)$$

e integrando nuevamente la primera ecuación de Friedmann, se deduce

$$a(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t} \quad , \quad (38)$$

este tipo de universo es acelerado y está en una expansión exponencial acelerada.

*iii) Universo de Milne (M)*

Este tipo de espacio está definido por  $(\Omega_\Lambda, \Omega_k) = (1, 0)$ , representa un espacio vacío, sin constante cosmológica y con una sección espacial hiperbólica, es decir  $k < 0$ , donde se puede deducir que

$$\Omega_b = 0 \quad , \quad q = 0 \quad , \quad (39)$$

que junto con la primera integral de Friedmann conduce a

$$a(t) = a_0 t \quad . \quad (40)$$

Además, para complementar el estudio dinámico, es interesante estudiar, las llamadas rectas o líneas invariantes, las cuales separan el espacio de fase en regiones desconectadas, estas son:

*iv) Línea  $\Omega_k = 0$*

En este caso, el sistema dinámico anotado anteriormente se reduce a la ecuación de evolución para  $\Omega_\Lambda$ , dada por

$$\Omega'_\Lambda = 3\gamma(1 - \Omega_\Lambda)\Omega_\Lambda \quad . \quad (41)$$

Entonces, si inicialmente  $\Omega_k = 0$ , se establece sobre esta línea y toda la evolución converge a  $\Omega_\Lambda = 1$  (punto fijo dS) o  $\Omega_\Lambda = 0$  (punto fijo EdS). Se sigue también que ninguna línea integral del sistema puede cruzar esta línea. Por lo tanto separa el universo en  $\Omega_k > 0$ , definiendo una región compacta y finita, y  $\Omega_k < 0$ , define una región infinita, si se asume una topología trivial. Entonces si se cruza la línea  $\Omega_k = 0$ , puede implicar un cambio de topología. Note que si  $\gamma = 0$ , el fluido cósmico se comporta como una constante cosmológica y entonces  $\Omega'_\Lambda = 0$  debido a que  $\Omega_k = 0$ .

*v) Línea  $\Omega_\Lambda = 0$*

En este caso el sistema dinámico se reduce a la ecuación de evolución para  $\Omega_k$

$$\Omega'_k = (3\gamma - 2)(1 - \Omega_k)\Omega_k \quad . \quad (42)$$

Como en el caso anterior, durante toda la evolución estamos con  $\Omega_\Lambda = 0$ , que converge a  $\Omega_k = 1$  (punto fijo de Milne M) o converge a  $\Omega_\Lambda = 0$  (punto fijo EdS). Igualmente ninguna línea intergral del sistema puede atravesar dicha línea, y además si  $\gamma = 2/3$ , el fluido cósmico se comporta como un término de curvatura y entonces  $\Omega'_k = 0$  ya que  $\Omega_\Lambda = 0$ .

vi) Línea  $\Omega_b = 0$

Esta es una línea frontera del espacio de fase ya que  $\Omega_b$  es positivo, en consecuencia tenemos  $q = -\Omega_\Lambda$  y el sistema dinámico se reduce a

$$\Omega'_\Lambda = 2(1 - \Omega_\Lambda)\Omega_\Lambda, \quad (43)$$

en este caso el universo converge entorno al espacio de dSitter (dS) o al espacio de Milne (M).

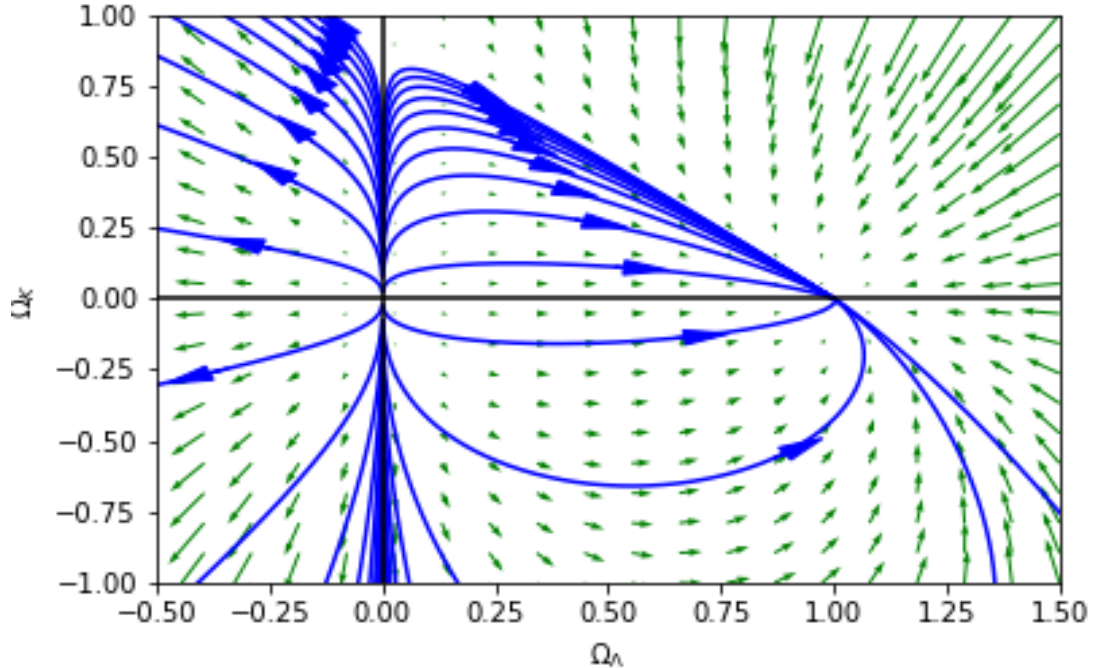
Los casos anteriores se pueden visualizar de forma completa, en diferentes figuras correspondientes al espacio de fase, pueden observarse los puntos fijos, estabilidades y líneas invariantes según el índice barotrópico  $\gamma$ (?)(?).

$\gamma$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2/3)$	$2/3$	$(2/3, +\infty)$
EdS	A	N.A	S	N.A	R
dS	S	A	A	A	A
M	S	R	R	R	S

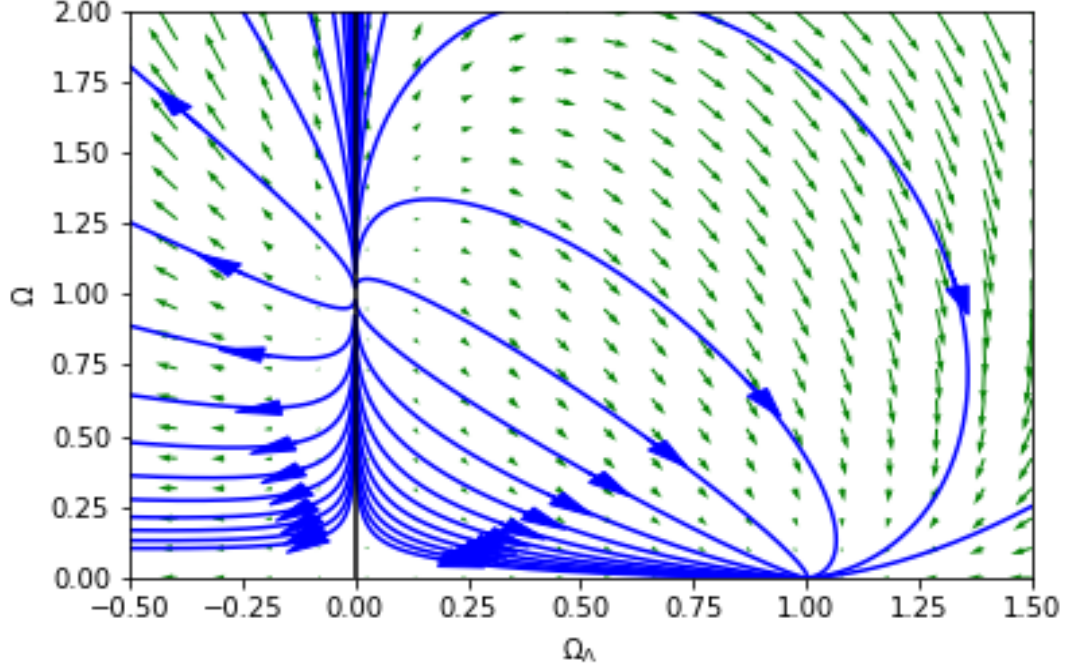
Table 1: Estabilidad de los tres puntos fijos (EdS, dS, M) como una función del índice politrópico  $\gamma$  donde A es atractor, R es repulsor, S es punto de silla

## 7 Soluciones numéricas

La imagen completa del espacio de fase puede ser obtenida mediante la integración numérica del sistema dinámico descrito anteriormente, usando explícitamente un integrador del tipo Runge-Kutta de cuarto orden programado en una rutina de python. La materia ordinaria tal como un fluido sin presión o un fluido de radiación tienen  $\gamma > 1$  corresponde al espacio de fase en el plano  $(\Omega_k, \Omega_\Lambda)$  junto con las trayectorias y campo vectorial.



Trayectorias en el espacio de fase  $(\Omega_k, \Omega_\lambda)$  para  $\gamma = 1$ . Espacio de fase del sistema dinámico en el plano  $(\Omega_k, \Omega_\lambda)$ , allí se tiene los tres puntos fijos, se observa el comportamiento de las trayectorias que siguen las soluciones.



Trayectorias en el espacio de fase  $(\Omega, \Omega_\lambda)$  para  $\gamma = 1$ . Espacio de fase del sistema dinámico en el plano  $(\Omega, \Omega_\lambda)$  para  $\gamma = 1$ , nuevamente, allí se tiene los tres puntos fijos, se observa el comportamiento de las trayectorias que siguen las soluciones.

Los elementos anteriores muestran algunos aspectos del estudio de sistemas dinámicos.

## 8 Modelos cosmológicos en teorías $f(R)$

Para abordar, el estudio de la cosmología en este marco teórico y como es convención, se inicia con el estudio de las ecuaciones de Friedmann modificadas, modeladas como un sistema dinámico autónomo, lo cual permite obtener y restringir la forma que deben de tener las funciones, para sugerir los criterios de viabilidad, de consistencia y de ajuste de datos que reproduzcan la época de radiación, de materia y de expansión acelerada. Se comienza con la acción en el marco de Jordan dada anteriormente junto con el lagrangiano de radiación[16][17][18]

$$S_{f(R)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} f(R) + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_r \right] , \quad (44)$$

donde  $\kappa^2 = 8\pi G$ ,  $\mathcal{L}_m$ ,  $\mathcal{L}_r$  son los lagrangianos de materia y radiación respectivamente. Realizando, los procesos algebraicos correspondientes, se obtienen las respectivas ecuaciones de Friedmann modificadas las cuales se pueden expresar de la siguiente forma

$$3f_R H^2 = \kappa^2(\rho_m + \rho_r) + \frac{1}{2}(f_R R - f) - 3H \dot{f}_R , \quad (45)$$

$$2f_R \dot{H} = -\kappa^2\left(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_r\right) - \ddot{f}_R + H \dot{f}_R , \quad (46)$$

donde  $f_R = \frac{df}{dR}$ , que en el caso de  $f(R) = R$ ,  $\frac{df}{dR} = 1$ , y adicionalmente se considera  $\frac{df}{dR} > 0$  para evitar singularidades en  $\frac{df}{dR} = 0$ .

Las densidades de energía y radiación satisfacen las siguientes ecuaciones de continuidad

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0, \quad (47)$$

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0. \quad (48)$$

Las ecuaciones de Friedmann modificadas, son similares a las ecuaciones que se deducen para una teórica scalar-tensor, con un parámetro Brans-Dick despreciable  $\omega_{BD} = 0$  y un potencial específico dado por  $U = \frac{1}{2}(f_R R - f)$ . Ahora, también se puede construir la ecuación de estado similar a la ecuación obtenida en teorías scalar-tensor, entonces se obtienen las ecuaciones de Friedmann modificadas, en la forma

$$3f_{R0}H^2 = \kappa^2(\rho_{DE} + \rho_m + \rho_r), \quad (49)$$

$$-2f_{R0}\dot{H} = \kappa^2(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_r + \rho_{DE} + p_{DE}), \quad (50)$$

así se obtienen las relaciones para la densidad de energía oscura y la presión de energía oscura, dadas por

$$\kappa^2\rho_{DE} = \frac{1}{2}(f_R R - f) - 3H\dot{f}_R + 3H^2(f_{R0} - f_R), \quad (51)$$

$$\kappa^2 p_{DE} = -\frac{1}{2}(f_R R - f) - (2\dot{H} + 3H^2)(f_{R0} - f_R) + 2H\dot{f}_R + \ddot{f}_R, \quad (52)$$

igualmente, se obtiene la ecuación de conservación para la energía oscura dada por

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(\rho_{DE} + p_{DE}) = 0. \quad (53)$$

Entonces se expresa la ecuación para el parámetro de estado de energía oscura mediante

$$\omega_{DE} = \frac{\rho_{DE}}{p_{DE}} = -1 + \frac{2\ddot{f}_R - 2H\dot{f}_R - 4\dot{H}(f_{R0} - f_R)}{(f_R R - f) - 6H\dot{f}_R + 6H^2(f_{R0} - f_R)}, \quad (54)$$

la cual tiene significado físico análogo al de la materia o radiación convencional, por consiguiente se puede definir la evolución temporal del sector oscuro de la siguiente forma

$$\rho_{DE}(z) = \rho_{DE0} e^{3 \int_0^z \frac{1+\omega_{DE}(z)}{1+z} dz}. \quad (55)$$

La densidad de energía oscura se obtiene de las observaciones, y el parámetro de estado se parametriza de varias formas. En la primera ecuación de Friedmann introducida en esta sección, se puede considerar el parámetro cosmológico

$$\tilde{\Omega}_x = \frac{\kappa^2 \rho_x}{3H^2 f_R}, \quad (56)$$

donde  $x$  denota cualquier componente energética. Con lo cual el parámetro de estado se puede obtener de las observaciones según lo siguiente

$$\omega_{DE} = \frac{(1+z)\frac{dh^2}{dz} - 3h^2 - \Omega_{r0}(1+z)^4}{3[h^2 - \Omega_{m0}(1+z)^3 - \Omega_{r0}(1+z)^4]}, \quad (57)$$

donde  $h = \frac{H}{H_0}$ . De lo anterior se encuentra que para la región de bajo corrimiento al rojo se tiene dominio de materia y energía oscura, se hace despreciable la radiación, con lo cual para  $z \ll z_{eq}$

$$\omega_{DE} = \frac{(1+z)\frac{dh^2}{dz} - 3h^2}{3[h^2 - \Omega_{m0}(1+z)^3]}, \quad (58)$$

adicionalmente, se define la ecuación de estado efectiva, mediante

$$\omega_{eff} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}, \quad (59)$$

la cual se puede expresar de forma general como

$$\omega_{eff} = \tilde{\Omega}_{DE}\omega_{DE} + \frac{1}{3}\tilde{\Omega}_r, \quad (60)$$

si se define la siguiente relación

$$\tilde{\Omega}_x = \frac{\kappa^2 \rho_x}{3H^2 f_{R0}}. \quad (61)$$

## 9 Sistema dinámico autónomo en teorías $f(R)$

En esta sección se introduce el sistema dinámico cosmológico en el marco de teorías  $f(R)$ , que en términos generales consisten en una modificación a la acción de Einstein-Hilbert. Para realizar el estudio de la dinámica cosmológica en modelos  $f(R)$ , se construye el sistema dinámico correspondiente, definiendo variables adimensionales, de la siguiente manera y considerando  $\kappa = 1$ , así se tiene [19][20][21][22]

$$S_{f(R)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} f(R) + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_r \right], \quad (62)$$

la cual conduce a

$$\begin{cases} 3f_R H^2 = \rho_m + \rho_r + \frac{1}{2}(f_R R - f) - 3H\dot{f}_R \\ -2f_R \dot{H} = \rho_m + \frac{4}{3}\rho_r - H\dot{f}_R + \ddot{f}_R \\ \rho_m + 3H\dot{\rho}_m = 0 \\ \rho_r + 4H\dot{\rho}_r = 0 \end{cases} \quad (63)$$

la primera ecuación de Friedmann se puede expresar como

$$1 = \frac{\rho_m}{3f_R H^2} + \frac{\rho_r}{3f_R H^2} + \frac{R}{6H^2} - \frac{f}{6f_R H^2} - \frac{f'_R}{f_R}, \quad (64)$$

con lo cual se definen las siguientes variables adimensionales

$$x_1 = -\frac{f'_R}{f_R}, \quad x_2 = -\frac{f}{6f_R H^2}, \quad x_3 = \frac{R}{6H^2} = 2 + \frac{\dot{H}}{H}, \quad x_4 = \frac{\rho_r}{3f_R H^2}, \quad \Omega_m = \frac{\rho_m}{3f_R H^2}, \quad (65)$$

de este modo se tiene que

$$\Omega_m = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4. \quad (66)$$

Derivando cada una de las variables definidas respecto a  $N = \log a$ , como fue definido anteriormente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones autónomo

$$\begin{cases} x'_1 = -1 - x_3 - 3x_2 + x_1^2 - x_1 x_3 + x_4 \\ x'_2 = \frac{x_1 x_3}{m} - x_2(2x_3 - x_1 - 4) \\ x'_3 = -\frac{x_1 x_3}{m} - 2x_3(x_3 - 2) \\ x'_4 = -2x_3 x_4 + x_1 x_4 \end{cases} \quad (67)$$

donde se define[23][24][25]

$$m = \frac{Rf_{RR}}{f_R} \quad , \quad r = -\frac{Rf_R}{f} = \frac{x_3}{x_2} \quad . \quad (68)$$

Derivando  $R$  como función de  $\frac{x_3}{x_2}$  se consigue expresar  $m$  como función de  $\frac{x_3}{x_2}$  y obtener una función  $m = m(r)$ , entonces con el uso de estas expresiones obtenemos

$$\omega_{DE} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1 - x_4 y - 2x_3}{1 - y(1 - x_1 - x_2 - x_3)} \right] \quad , \quad (69)$$

$$\omega_{eff} = -\frac{1}{3}(2x_3 - 1) \quad , \quad (70)$$

donde se ha definido  $y = \frac{f_R}{f_{R0}}$ .

## 9.1 Puntos críticos

Si consideramos, pequeños corrimientos al rojo, es decir hacemos despreciable la radiación, en este caso  $x_4 = 0$ , se pueden obtener los puntos críticos del sistema y las condiciones de estabilidad del mismo, dichos puntos se pueden expresar como[26][28][29][30]

$P_1(x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2)$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{eff} = -1$
$P_2(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 0)$	$\Omega_m = 2$	$\omega_{eff} = \frac{1}{3}$
$P_3(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{eff} = \frac{1}{3}$
$P_4(x_1, x_2, x_3) = (-4, 5, 0)$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{eff} = \frac{1}{3}$
$P_5(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{3m}{1+m}, -\frac{1+4m}{2(1+m)^2}, \frac{1+4m}{2(1+m)} \right)$	$\Omega_m = 1 - \frac{m(7+10m)}{2(1+m)^2}$	$\omega_{eff} = -\frac{m}{1+m}$
$P_6(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{2(1-m)}{1+2m}, \frac{1-4m}{m(1+2m)}, -\frac{(1-4m)(1+m)}{m(1+2m)} \right)$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{eff} = \frac{2-5m-6m^2}{3m(1+2m)}$

Table 2: Tabla de puntos críticos para el sistema dinámico

Los puntos  $P_5, P_6$  satisfacen la ecuación  $x_3 = -(m(r) + 1)x_2$ , es decir

$$m(r) = -r - 1 \quad . \quad (71)$$

## 10 Conclusiones

Segun lo anterior podemos concluir lo siguiente: Se resolvió y aproximó los sistemas dinámicos discretos y continuos, igualmente se obtuvieron los puntos críticos y de estabilidad de los sistemas dinámicos discretos y continuos, también, se analizaron las posibles trayectorias que debe seguir la evolución cosmológica para ser consecuente con el modelo estándar. La solución del sistema dinámico, muestra trayectorias y puntos críticos que son de expansión acelerada, lo que es equivalente a soluciones geométricas de energía oscura. Igualmente, las soluciones obtenidas son coherentes con el modelo estándar. Un aspecto muy importante del estudio de sistemas dinámicos continuos cosmológicos, es el estudio de un tipo de dinámica gravitacional diferente a las dinámicas clásicas o puramente relativistas, puede considerarse las teorías  $f(R)$ , como una extensión natural primera del marco relativista general estándar, el estudio de este tipo de dinámicas puede arrojar luces sobre enormes campos de estudio gravitacional y astrofísico, por ello se destaca este tipo de aproximación de sistema dinámica a un esquema o modelo más amplio y general que los modelos clásicos. Bajo estas aproximaciones se intenta resaltar algunos pocos aspectos importantes de los sistemas dinámicos en especial los sistemas dinámicos cosmológicos, cabe resaltar que igualmente los sistemas dinámicos discretos son de enorme importancia en aplicaciones muy concretas de electrónica, comunicaciones y otros muchos campos.

## References

- [1] <http://www.dean.usma.edu/math/research/mathtech/java/DDSPProject/ddsproject.html>
- [2] Un link de links interesantes: <http://ecademy.agnesscott.edu/jwiseman/mat311/links.html>
- [3] Las páginas de Robert L. Devaney: <http://math.bu.edu/people/bob/yhttp://math.bu.edu/DYSYS/applets/>
- [4] Spivak M., Calculus, Segunda Edición, Editorial Reverte, México, D.F., 1999.
- [5] Spivak M., Cálculo en Variedades, Editorial Reverte, España, 1968.
- [6] Stefan P., A theorem of Sharkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line, *Comm. Math. Phys.*, 54(1977), 237-248.
- [7] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* 517, 565 (1999); A. G. Riess et al., *Astron. J.* 116, 1009 (1998); *Astron. J.* 117, 707 (1999); J. L. Tonry et al., *Astrophys. J.* 594, 1 (2003); R. A. Knop et al., *Astrophys. J.* 598, 102 (2003).
- [8] Straffin P. D., Periodic Points of Continuous Functions, *Mathematics Magazine*, 51 (1978), 99-105.
- [9] Vellekoop M. y Berglund R., On Intervals, Transitivity, Chaos, *Amer. Math. Monthly*, 101 (1994), 353-355.
- [10] Walters P., *An Introduction to Ergodic Theory*. Graduate Texts in Math. 79, Springer Verlag, New York, 1982.
- [11] R. R. Caldwell, *Phys. Lett. B* 545, 23-29 (2002); R. R. Caldwell, M. Kamionkowski and N. N. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 91, 071301 (2003); S. M. Carroll, M. Hoffman and M. Trodden, *Phys. Rev. D* 68, 023509 (2003); P. Singh, M. Sami and N. Dadhich, *Phys. Rev. D* 68 023522 (2003).
- [12] L. Perivolaropoulos, *JCAP* 0510, 001 (2005); S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, [arXiv:astro-ph/0610092](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0610092).
- [13] L. Perivolaropoulos, *JCAP* 0510, 001 (2005); S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, [arXiv:astro-ph/0610092](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0610092).
- [14] S. Capozziello, V. F. Cardone, S. Carloni and A. Troisi, *Int. J. Mod. Phys. D* 12, 1969 (2003).
- [15] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* 70, 043528 (2004).
- [16] S. Capozziello, F. Occhionero and L. Amendola, *Int. J. Mod. Phys. D* 1 (1993) 615.
- [17] J. Philippe Uzan, R. Lehoucq, A dynamical Study of the Friedmann Equations, *Eur. J. Phys.* 22 (2001) 371-384, [arXiv:physics/0108066](https://arxiv.org/abs/physics/0108066).
- [18] N. Chan, *Dynamical Systems in Cosmology*, thesis PhD, University College London, 2012.
- [19] V. Sahni and A. A. Starobinsky, *Int. J. Mod. Phys D.* 9, 373 (2000); S. M. Carroll, *Living Rev*, 4, 1 (2001); T. Padmanabhan, *Phys Rept.* 380, 235 (2003); P. J. E. Peebles and B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* 75, 559 (2003); V. Sahni, *Lect. Notes Phys.* 653, 141 (2004).
- [20] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* 15, 1753 (2006).
- [21] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* 517, 565 (1999); A. G. Riess et al., *Astron. J.* 116, 1009 (1998); *Astron. J.* 117, 707 (1999); J. L. Tonry et al., *Astrophys. J.* 594, 1 (2003); R. A. Knop et al., *Astrophys. J.* 598, 102 (2003).
- [22] D. N. Spergel et al., *Astrophys. J. Suppl.* 148, 175 (2003); D. N. Spergel et al., [arXiv:astro-ph/0603449](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0603449).
- [23] D. J. Eisenstein et al., *Astrophys. J.* 633, 560 (2005); C. Blake, D. Parkinson, B. Bassett, K. Glazebrook, M. Kunz and R. C. Nichol, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 365, 255 (2006).



- 
- [24] B. Jain and A. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* 91, 141302 (2003).
- [25] V. Sahni and A. A. Starobinsky, arXiv:astro-ph/0610026.
- [26] Y. Fujii, *Phys. Rev. D* 26, 2580 (1982); L. H. Ford, *Phys. Rev. D* 35, 2339 (1987); C. Wetterich, *Nucl. Phys. B.* 302, 668 (1988); B. Ratra and J. Peebles, *Phys. Rev. D* 37, 321 (1988); Y. Fujii and T. Nishioka, *Phys. Rev. D* 42, 361 (1990); E. J. Copeland, A. R. Liddle, and D. Wands, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 688, 647 (1993); C. Wetterich, *A&A* 301, 321 (1995); P. G. Ferreira and M. Joyce, *Phys. Rev. Lett.* 79, 4740 (1997); *Phys. Rev. D* 58, 023503 (1998); R. R. Caldwell, R. Dave and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* 80, 1582 (1998); I. Zlatev, L. M. Wang and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* 82, 896 (1999); P. J. Steinhardt, L. M. Wang and I. Zlatev, *Phys. Rev. D* 59, 123504 (1999).
- [27] L. Amendola, *Phys. Rev. D* 62, 043511 (2000); L. Amendola and D. Tocchini-Valentini, *Phys. Rev. D* 64, 043509 (2001); L. Amendola and C. Quercellini, *Phys. Rev. D* 68, 023514 (2003).
- [28] L. Amendola, M. Quartin, S. Tsujikawa and I. Waga, *Phys. Rev. D* 74, 023525 (2006).
- [29] A. Melchiorri, L. Mersini-Houghton, C. J. Odman and M. Trodden, *Phys. Rev. D* 68, 043509 (2003); U. Alam, V. Sahni, T. D. Saini and A. A. Starobinsky, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 354, 275 (2004); B. A. Bassett, P. S. Corasaniti and M. Kunz, *Astrophys. J.* 617, L1 (2004).
- [30] R. R. Caldwell, *Phys. Lett. B* 545, 23-29 (2002); R. R. Caldwell, M. Kamionkowski and N. N. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 91, 071301 (2003); S. M. Carroll, M. Hoffman and M. Trodden, *Phys. Rev. D* 68, 023509 (2003); P. Singh, M. Sami and N. Dadhich, *Phys. Rev. D* 68, 023522 (2003).