Espacios Proyectivos

0. Resumen

Si se define en un espacio vectorial de dimensión n+1 sobre un cuerpo k a la izquierda, una relación de proyectividad entre sus vectores, que sea de equivalencia y que por consiguiente parta al conjunto de los vectores del espacio en clases o punto proyectivos, formando cada una de estas clases la recta vectorial que definen los vectores proporcionales entre sí, nos encontramos con un espacio cociente de puntos proyectivos que es lo que denominamos espacio proyectivo sobre el espacio vectorial dado.

En el conjunto de las partes del espacio proyectivo definimos también la relación de dependencia lineal proyectiva y la aplicación de linealización entre las partes, lo cual desembocará en el concepto de variedad lineal proyectiva. Y en este conjunto de las variedades lineales proyectivas podemos definir leyes internas de unión, intersección y suma de variedades lineales proyectivas de forma que nos encontramos con un retículo que resulta ser isomorfo al retículo modular, complementario y atómico de las variedades lineales vectoriales construidas sobre el espacio base de dimensión n+1.

En el retículo modular de las variedades lineales proyectivas la dimensión de cada variedad es una unidad menor que la dimensión de la variedad lineal vectorial asociada, por lo que los puntos proyectivos, con dimensión cero, construidos como conjuntos de vectores entre sí proporcionales, se corresponden con rectas vectoriales, variedades de dimensión 1. Asimismo, las rectas proyectivas, de dimensión 1, son correspondientes con planos vectoriales, de dimensión 2, y así sucesivamente, hasta el conjunto total de puntos proyectivos, de dimensión n, como correspondiente al espacio vectorial asociado, de n+1 dimensiones.

En este trabajo se propone una construcción axiomática del espacio proyectivo, de las variedades lineales proyectivas, de sus relaciones de dualidad y de complementariedad hasta llegar a establecer la configuración de (n+2)-vertice y el concepto de coordenadas proyectivas.

1. La relación de dependencia lineal proyectiva

Definición 1:

Dado un espacio vectorial $\left(V_{n+1,}k\right)$ de dimensión $n+1$, definido a la izquierda sobre el cuerpo k, definimos una relación entre sus vectores a fin de partir el espacio en clases:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_{n+1} - \{0\}, \quad \vec{x} R \vec{y} \Leftrightarrow \exists \alpha \in k - \{0\} / \vec{y} = \alpha . \vec{x}$$

Es decir, un vector $\vec{x}$ está relacionado con otro vector $\vec{y}$ si existe un elemento α no nulo del cuerpo de definición del espacio que permite obtener $\vec{y}$ al multiplicarlo por $\vec{x}$ por la izquierda.

Teorema 1

La relación R anterior es una relación de equivalencia, esto es, es reflexiva, simétrica y transitiva.

Demostración:

1) $\forall \vec{x} \in V_{n+1} - \{0\}, \exists 1 \in k / \vec{x} = 1.\vec{x} \Rightarrow \vec{x} R \vec{x} \Rightarrow R \textit{ reflexiva}$

2) $\vec{x} R \vec{y} \Rightarrow \exists \alpha \in k - \{0\} / \vec{y} = \alpha \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \alpha^{-1} \vec{y} \Rightarrow \exists \alpha^{-1} \in k - \{0\} / \vec{x} = \alpha^{-1} \vec{y} \Rightarrow \vec{y} R \vec{x}$

3) $\left.\begin{array}{l} \vec{x} R \vec{y} \Rightarrow \exists \alpha \in k - \{0\} / \vec{y} = \alpha \vec{x} \\ \vec{y} R \vec{z} \Rightarrow \exists \beta \in k - \{0\} / \vec{z} = \beta \vec{y} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{z} = \beta.(\alpha \vec{x}) = (\beta \alpha).\vec{x} \Rightarrow \vec{x} R \vec{z} \Rightarrow R \textit{ transitiva}$

Así pues, la relación R es reflexiva, simétrica y transitiva. Se trata de una relación de equivalencia, y, como tal, parte al espacio sobre el que está definida en clases de equivalencia, estando constituida cada clase por todos los vectores equivalentes entre sí.

Definición 2

Cada una de las clases de equivalencia, $[\vec{x}]$, está formada por todos los vectores equivalentes entre sí y se denomina *punto proyectivo.* El conjunto cociente

$$P = (V_{n+1} - \{0\})/R$$

es el conjunto de todas las clases de equivalencia, esto es, de todos los puntos proyectivos.

Cada uno de los vectores $\vec{x} \in V_{n+1} - \{0\}$ es un representante de un determinado punto proyectivo $[\vec{x}]$.

Si consideramos el conjunto $P = (V_{n+1} - \{0\})/R$ de los puntos proyectivos del espacio y el álgebra de Boole de sus partes, $p(P)$, podemos definir una relación de dependencia lineal, dl, en su contexto, que llamamos *relación de dependencia lineal proyectiva.*

Definición 3

$$\forall A, B \in p(P),\ AdlB \Leftrightarrow \forall [\vec{x}] \in A, \exists [\vec{y}_1], \ldots, [\vec{y}_r] \in B / \vec{x} = a_1 \vec{y}_1 + \ldots + a_r \vec{y}_r,\ a_i \in k - \{0\}$$

Es decir: *A depende linealmente de B sii para cualquier punto proyectivo de A existen puntos proyectivos de B cuyos representantes vectoriales verifican la relación vectorial antedicha.*

Vemos que en esta definición usamos un representante determinado, $\vec{x}$, del punto proyectivo $[\vec{x}]$ y también representantes determinados, $\vec{y}_i$, de los puntos $[\vec{y}_i]$. Es conveniente probar que no importa qué representante se tome para cada punto. Veamos para ello el siguiente teorema.

Teorema 2

La definición de dependencia lineal proyectiva no depende de los representantes elegidos para cada punto.

Demostración:

Sean $\vec{x}'\in[\vec{x}],\ \vec{y}_i^{'}\in[\vec{y}_i]$, tales que $\begin{matrix}\vec{x}'=m.\vec{x},\ m\in k-\{0\}\\ \vec{y}_i'=m_i.\vec{y}_i,\ m\in k-\{0\}\end{matrix},\ i=1,...,r$

$$\vec{x}=\sum_{i=1}^{r}a_i\vec{y}_i,\ \ a_i\in k-\{0\}\Rightarrow m^{-1}.\vec{x}'=\sum_{i=1}^{r}a_i.m_i^{-1}.\vec{y}_i^{'}\Rightarrow \vec{x}'=\sum_{i=1}^{r}(m.a_i.m_i^{-1}).\vec{y}_i^{'}$$

Es decir, si $\vec{x}=\sum_{i=1}^{r}a_i\vec{y}_i,\ \ a_i\in k-\{0\}$ entonces también $\vec{x}'=\sum_{i=1}^{r}.a_i^{'}.\vec{y}_i^{'},\ \ a_i^{'}\in k-\{0\}$
Siendo $\vec{x}'\in[\vec{x}],\ \vec{y}_i^{'}\in[\vec{y}_i]$

Teorema 3

$\forall A,B,C\in p(P),$ se verifica una propiedad de inclusión y otra de transitividad de la relación de dependencia lineal proyectiva:

1) $A\subseteq B\Rightarrow A\ dl\ B$

2) $A\ dl\ B\ \wedge\ B\ dl\ C\Rightarrow A\ dl\ C$

Demostración:

1) Es obvio, pues $\forall[\vec{x}]\in A,\ \exists 1\in k-\{0\}/1.\vec{x}=\vec{x}\Rightarrow A\ dl\ A\Rightarrow\begin{cases}A\ dl\ A\\ A\subseteq B\end{cases}\Rightarrow A\ dlB$

2) $A\ dl\ B\Rightarrow\forall\vec{x}\in[\vec{x}]\in A,\ \exists[\vec{y}_i],...,[\vec{y}_r]\in B,\ \exists a_1,...,a_r\in k-\{0\}/\ \vec{x}=\sum_{i=1}^{r}a_i.\vec{y}_i,\ \ \vec{y}_i\in[\vec{y}_i]$

$B\ dl\ C\Rightarrow\forall\vec{y}\in[\vec{y}]\in B,\ \exists[\vec{z}_i],...,[\vec{z}_s]\in C,\ \exists b_1,...,b_s\in k-\{0\}/\ \vec{y}=\sum_{j=1}^{s}b_j.\vec{z}_j,\ \ \vec{z}_j\in[\vec{z}_j]$

de lo cual:

$$\forall\vec{x}\in[\vec{x}]\in A,\ \vec{x}=\sum_{i=1}^{r}a_i.\sum_{j=1}^{s}d_{ij}\vec{z}_{j_i}=\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{r}a_id_{ij}\right).\vec{z}_j\Rightarrow A\ dl\ C$$

Definición 4

Se llama *espacio proyectivo sobre V_{n+1}*, al par (P, dl) formado por el conjunto P de los puntos proyectivos de V_{n+1}, y la relación, *dl*, de dependencia lineal proyectiva:

$$Esp\_proyectivo \equiv \left(\frac{V_{n+1} - \{0\}}{R}, dl \right)$$

Definición 5

Una parte, A, de los puntos del espacio proyectivo P se dice que es linealmente dependiente sii existe al menos un punto en A que de depende linealmente de los restantes puntos de A.

$$\forall A \in p(P),\ A\ ld \Leftrightarrow \exists [\vec{x}] \in A / [\vec{x}]\ dl\ A - [\vec{x}]$$

Diremos que una parte de P es linealmente independiente si no es linealmente dependiente:

$$\forall A \in p(P),\ A\ lind \Leftrightarrow no(A\ ld)$$

Teorema 4:

Si una parte A de P es linealmente dependiente, entonces existen puntos de A con representantes vectoriales linealmente dependientes. O sea:

$$A\ ld \Rightarrow \exists [\vec{x}_1], \ldots, [\vec{x}_u] \in A, \exists \varphi_1, \ldots, \varphi_u \in k - \{0\} / \varphi_1 \vec{x}_1 + \ldots + \varphi_u \vec{x}_u = 0$$
$$(siendo\ \vec{x}_j \in [\vec{x}_j],\ j = 1, \ldots, u)$$

Demostración:

Es inmediato, pues:

$$\forall A \in p(P),\ A\ ld \Leftrightarrow \exists [\vec{x}] \in A / [\vec{x}]\ dl\ A - [\vec{x}] \Leftrightarrow \vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \ldots + \alpha_v \vec{x}_v \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \vec{x} - \alpha_1 \vec{x}_1 - \ldots - \alpha_v \vec{x}_v = 0 \Leftrightarrow \exists \varphi_k \in k - \{0\} / \sum_{k=1}^{u} \varphi_k \vec{x}_k = 0$$

Corolario:

Una parte A de P es linealmente independiente, sii para todo conjunto de puntos de A, $\{[\vec{x}_1], \ldots, [\vec{x}_\upsilon]\}$, sus representantes vectoriales respectivos son linealmente independientes. O sea:

$$A\ lind \Rightarrow \forall \{[\vec{x}_1], \ldots, [\vec{x}_u]\} \in A,\ \varphi_1 \vec{x}_1 + \ldots + \varphi_u \vec{x}_u = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \ldots = \varphi_\upsilon = 0$$
$$(siendo\ \vec{x}_j \in [\vec{x}_j],\ j = 1, \ldots, u)$$

2. Las variedades lineales proyectivas

De lo anterior podemos observar que para cualquier parte $A \in p(P)$ de puntos proyectivos siempre hay puntos del espacio P que dependen linealmente de A. Podemos definir, una aplicación que haga corresponder a cada parte el conjunto de los puntos proyectivos que dependen linealmente de ella.

Definición 6:

Definimos la *aplicación de linealización* $L : p(P) \to p(P)$ de la siguiente forma:

$$\forall A \in p(P), L(A) = \{[\vec{x}] \in P / [\vec{x}]\, dl\ A\}$$

La imagen, $L(A)$, se llama variedad lineal proyectiva engendrada por A.

A es el sistema de generadores de $L(A)$.

Representaremos por $\Gamma(P)$ al conjunto de las variedades lineales proyectivas de P.

Al conjunto vacío, ϕ, se le puede considerar una variedad lineal proyectiva engendrada por sí mismo. O sea, $\phi \in \Gamma(P)$.

Teorema 5:

1) Si A es el sistema de generadores de $L(A)$, entonces $A \subseteq L(A)$.
2) Si $A \subseteq B$, entonces $L(A) \subseteq L(B)$.
3) Si $A \in \Gamma(P)$, entonces $A = L(A)$.

Demostración:

1) Trivialmente, pues los puntos de A dependen linealmente de A.
2) También es trivial, pues si A está contenida en B los puntos que dependen linealmente de de A dependen también linealmente de B.
3) Si A es variedad lineal proyectiva engendrada por si misma, el conjunto de generadores coincide con la variedad.

Definición 7:

Se llama *aplicación natural* a $h : V_{n+1} - \{o\} \to P$, definida por la condición de que

$$\forall \vec{x} \in V_{n+1} - \{0\},\ h(\vec{x}) = [\vec{x}]$$

Esto es, la aplicación tal que a cada vector no nulo del espacio le corresponde el punto proyectivo del cual es representante.

Teorema 6:

Si es $\Gamma(V_{n+1})$ el conjunto de las variedades lineales vectoriales de V_{n+1}, y $\Gamma(P)$ el conjunto de las variedades lineales proyectivas de P, se verifica:

1) $\forall A \in p(P),\ h^{-1}(L(A)) \cup \{0\} \in \Gamma(V_{n+1})$

2) $\forall M \in \Gamma(V_{n+1}),\ h(M - \{0\}) \in \Gamma(P)$

Demostración:

1) Para probar que $h^{-1}(L(A)) \cup \{0\}$ es una variedad lineal vectorial, hemos de probar que toda combinación lineal de vectores de la misma es también un vector de la variedad. Se trata de probar, en definitiva, que si un vector, $\vec{x}$, es combinación lineal de elementos de $h^{-1}(L(A)) \cup \{0\}$, entonces $\vec{x}$ es elemento de $h^{-1}(L(A)) \cup \{0\}$. O sea,

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{r} \varphi_j \vec{x}_j,\ con\ \vec{x}_j \in h^{-1}(L(A)) \cup \{0\},\ j = 1,...,r \Rightarrow \vec{x} \in h^{-1}(L(A)) \cup \{0\}$$

- si $\vec{x}_j = 0,\ j = 1,...,r$, entonces $\vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} \in h^{-1}(L(A)) \cup \{0\}$
- si $\vec{x}_j \neq 0,\ j = 1,...,r$, entonces $[\vec{x}_j] \in L(A), j = 1,...,r \Rightarrow [\vec{x}] \in L(A)$, por tanto, $\vec{x} \in h^{-1}(L(A)) \cup \{0\}$

2) Para probar que $h(M - \{0\}) \in \Gamma(P)$ basta probar que coincide con la variedad lineal proyectiva que engendra: $h(M - \{0\}) = L(h(M - \{0\}))$.

Como $h(M - \{0\}) \subseteq L(h(M - \{0\}))$ solo es necesario probar la inclusión contraria, o sea, $L(h(M - \{0\})) \subseteq h(M - \{0\})$, para lo cual, veamos que todo punto $[\vec{x}]$ que pertenezca a la variedad lineal proyectiva $L(h(M - \{0\}))$ ha de pertenecer también al conjunto de generadores $h(M - \{0\})$:

$$\forall [\vec{x}] \in L(h(M - \{0\})), [\vec{x}]\, dl\ h(M - \{0\}) \Rightarrow \vec{x} = \sum_{k=0}^{s} \varphi_k \vec{x}_k, [\vec{x}_k] \in h(M - \{0\}),$$

$$con\ \varphi_k \neq 0, k = 1,...,s \Rightarrow \vec{x}_k \in [\vec{y}_k], k = 1,...,s,\ \vec{y}_k \in M - \{0\} \Rightarrow \vec{x}_k = m_k \vec{y}_k,\ m_k \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \sum_{k=1}^{s} \varphi_k m_k \vec{y}_k \Rightarrow \vec{x} \in M \Rightarrow [\vec{x}] \in h(M - \{0\})$$

De lo anterior se tiene que, para un espacio vectorial V_{n+1} y su espacio proyectivo asociado P, la imagen natural de una variedad lineal vectorial sin el vector nulo es una variedad lineal proyectiva de P, y al revés, la imagen recíproca de una variedad lineal proyectiva es, junto con el vector nulo, una variedad lineal vectorial de V_{n+1} . La pregunta inmediata que nos hacemos es si es posible establecer alguna correspondencia entre las variedades lineales vectoriales y las variedades lineales proyectivas. Podemos, efectivamente, hacerlo mediante la aplicación natural h en la forma que se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 7:

La aplicación $\Phi : \Gamma(V_{n+1}) \rightarrow \Gamma(P)$ definida por

$$\forall M \in \Gamma(V_{n+1}), \Phi(M) = \begin{cases} \phi, \, si \; M = \{0\} \\ h(M - \{0\}), \, si \; M \neq \{0\} \end{cases}$$

es una aplicación biyectiva.

Demostración:

Para probar que Φ es biyectiva hemos de probar que es sobreyectiva (toda variedad lineal proyectiva L(A) es imagen por Φ de alguna variedad lineal vectorial M) y también es inyectiva (la imagen inversa por Φ^{-1} de cualquier variedad lineal proyectiva es una sola variedad lineal vectorial).

- Es sobreyectiva:

  $\forall L(A) \in \Gamma(P), \exists \Phi^{-1}(L(A)) \in \Gamma(V_{n+1}) / \Phi(\Phi^{-1}(L(A)) = L(A)$, ya que $\Phi^{-1}(L(A)) = h^{-1}(L(A)) \cup \{0\} \in \Gamma(V_{n+1})$, por el teorema 6.

- Es inyectiva:

  Hemos de probar que $\forall \Phi(M) \in \Gamma(P), \Phi^{-1}\Phi(M) = M$ y como es $\Phi^{-1}\Phi(M) = h^{-1}h(M - \{0\})$, equivale a probar que $h^{-1}h(M - \{0\}) = M - \{0\}$. Como siempre $M - \{0\} \subseteq h^{-1}h(M - \{0\})$, solo hemos de probar la inclusión contraria, es decir $h^{-1}h(M - \{0\}) \subseteq M - \{0\}$:

  $$\forall \vec{x} \in h^{-1}h(M - \{0\}) \Rightarrow [\vec{x}] \in h(M - \{0\}) \Rightarrow \exists \vec{y} \in M - \{0\} / \vec{x} = m.\vec{y}, m \neq 0 \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow \vec{x} \in M - \{0\}$$

Veamos a continuación el comportamiento de esta aplicación biyectiva entre las variedades del espacio vectorial y las variedades de su espacio proyectivo asociado, frente a las operaciones con variedades lineales proyectivas. Es conveniente saber si es estable respecto a las operaciones internas en $\Gamma(P)$ a fin de establecer si es o no un isomorfismo entre las variedades lineales vectoriales y las variedades lineales proyectivas. Hemos de precisar, para ello, las operaciones básicas de intersección y suma de variedades lineales proyectivas.

Teorema 8:

La intersección de dos variedades lineales proyectivas es también una variedad lineal proyectiva:

$$\forall A_1, A_2 \in \Gamma(P), \, A_1 \cap A_2 \in \Gamma(P)$$

Demostración:

Si llamamos $L(A_1 \cap A_2)$ a la variedad lineal proyectiva engendrada por la intersección $A_1 \cap A_2$, se cumple que $A_1 \cap A_2 \subseteq L(A_1 \cap A_2)$, puesto que $A_1 \cap A_2$ es el conjunto generador de la variedad.

Si probamos que también se verifica la inclusión $L(A_1 \cap A_2) \subseteq A_1 \cap A_2$ habremos probado que $A_1 \cap A_2 = L(A_1 \cap A_2) \in \Gamma(P)$:

$$\forall [\vec{x}] \in L(A_1 \cap A_2) \Rightarrow [\vec{x}]\, dl\ A_1 \cap A_2 \Rightarrow [\vec{x}]\, dl\ A_1 \wedge [\vec{x}]\, dl\ A_2 \Rightarrow \left([\vec{x}]\, dl\ A_1 \wedge A_1 \in \Gamma(P)\right) \wedge$$
$$\wedge \left([\vec{x}]\, dl\ A_2 \wedge A_2 \in \Gamma(P)\right) \Rightarrow [\vec{x}] \in A_1 \wedge [\vec{x}] \in A_2 \Rightarrow [\vec{x}] \in A_1 \cap A_2$$

Definición 8:

Se define la suma de variedades lineales proyectivas como la mínima variedad lineal proyectiva que contenga a su unión, esto es, la intersección de todas las variedades lineales proyectivas que contengan a la unión de ambas:

$$\forall A_1, A_2 \in \Gamma(P),\ A_1 + A_2 = \bigcap \{A \in \Gamma(P) / A_1 \cup A_2 \subseteq A\}$$

Teorema 9:

La suma de dos variedades lineales proyectivas es la variedad lineal proyectiva engendrada por su unión:

$$\forall A_1, A_2 \in \Gamma(P),\ A_1 + A_2 = L(A_1 \cup A_2)$$

Demostración:

Veamos que se cumple la doble inclusión:

- Si $L(A_1 \cup A_2)$ es una variedad lineal proyectiva engendrada por $A_1 \cup A_2$ y sabemos, por definición, que la suma $A_1 + A_2$ es la intersección de todas estas variedades, se tiene que $A_1 + A_2 \subseteq L(A_1 \cup A_2)$
- Por otra parte, si es $A_1 + A_2$ una variedad lineal proyectiva (aunque sea la mínima) engendrada por $A_1 \cup A_2$, debe cumplirse que $A_1 \cup A_2 \subseteq A_1 + A_2$, por lo que, por el teorema 5, es $L(A_1 \cup A_2) \subseteq L(A_1 + A_2) = A_1 + A_2$, pues la variedad engendrada por una variedad es ella misma.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 + A_2 \subseteq L(A_1 \cup A_2 \\ L(A_1 \cup A_2) \subseteq A_1 + A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow L(A_1 \cup A_2) = A_1 + A_2$$

Esta propiedad se cumple también en las variedades lineales vectoriales:

$$\forall M_1, M_2 \in V_{n+1},\ L(M_1 \cup M_2) = M_1 + M_2$$

Teorema 10:

La aplicación biyectiva Φ es estable para la intersección y suma de variedades lineales proyectivas:

1) $\Phi(M_1 \cap M_2) = \Phi(M_1) \cap \Phi(M_2)$
2) $\Phi(M_1 + M_2) = \Phi(M_1) + \Phi(M_2)$

Demostración:

1) Veamos que se verifica la doble inclusión:

a)

$$\forall[\vec{x}] \in \Phi(M_1 \cap M_2) \Rightarrow [\vec{x}] \in [h(M_1 \cap M_2) - \{0\}] \Rightarrow \vec{x} \in M_1 \cap M_2 - \{0\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{x} \in M_1 - \{0\} \wedge \vec{x} \in M_2 - \{0\} \Rightarrow [\vec{x}] \in h(M_1) - \{0\} \wedge [\vec{x}] \in h(M_2) - \{0\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\vec{x}] \in (h(M_1) - \{0\}) \cap (h(M_2) - \{0\}) \Rightarrow [\vec{x}] \in \Phi(M_1) \cap \Phi(M_2)$$

de lo cual: $\Phi(M_1 \cap M_2) \subseteq \Phi(M_1) \cap \Phi(M_2)$

b)

$$\forall[\vec{x}] \in \Phi(M_1) \cap \Phi(M_2) \Rightarrow [\vec{x}] \in (h(M_1) - \{0\}) \cap (h(M_2) - \{o\}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{x} \in [\vec{y}] / \vec{y} \in M_1 - \{0\}) \wedge \vec{y} \in M_2 - \{0\} \Rightarrow \vec{x} \in M_1 - \{0\} \wedge$$
$$\wedge\, \vec{x} \in M_2 - \{0\} \Rightarrow \vec{x} \in (M_1 - \{0\}) \cap (M_2 - \{0\}) \Rightarrow \vec{x} \in (M_1 \cap M_2) - \{0\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\vec{x}] \in h(M_1 \cap M_2) - \{0\} \Rightarrow [\vec{x}] \in \Phi(M_1 \cap M_2)$$

resultando que: $\Phi(M_1) \cap \Phi(M_2) \subseteq \Phi(M_1 \cap M_2)$

y de la doble inclusión: $\Phi(M_1 \cap M_2) = \Phi(M_1) \cap \Phi(M_2)$

2) Veamos que también se verifica la doble inclusión:

a)

$$\forall[\vec{x}] \in \Phi(M_1 + M_1) \Rightarrow [\vec{x}] \in h(M_1 + M_1) - \{0\} \Rightarrow [\vec{x}] \in h(L(M_1 \cup M_1)) - \{0\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{x} \in L(M_1 \cup M_1) - \{0\} \Rightarrow \vec{x} = \sum_{j=1}^{r} m_j \vec{x}_j / \vec{x}_j \in M_1 \cup M_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{x} = \sum_{j=1}^{r} m_j \vec{x}_j / [\vec{x}_j] \in h(M_1 \cup M_2) - \{0\} \Rightarrow [\vec{x}] \in L(h(M_1 \cup M_2) - \{0\}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\vec{x}] \in L(h(M_1 - \{0\}) \cup h(M_2 - \{0\})) \Rightarrow [\vec{x}] \in L(\Phi(M_1) \cup \Phi(M_2)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\vec{x}] \in \Phi(M_1) + \Phi(M_2)$$

obteniéndose: $\Phi(M_1 + M_2) \subseteq \Phi(M_1) + \Phi(M_2)$

b)

$$\forall[\vec{x}]\in\Phi(M_1)+\Phi(M_2)\Rightarrow[\vec{x}]\in L(\Phi(M_1)\cup\Phi(M_2))\Rightarrow$$
$$\Rightarrow[\vec{x}]\in L((h(M_1)-\{0\})\cup(h(M_1)-\{0\}))\Rightarrow\vec{x}=\sum_{k=1}^{s}m_k\vec{x}_k\,/[\vec{x}_k]\in h(M_1)-\{0\}\vee$$
$$\vee[\vec{x}_k]\in h(M_2)-\{0\}\Rightarrow\vec{x}=\sum_{k=1}^{s}m_k\vec{x}_k\,/\,\vec{x}_k\in M_1-\{0\}\vee\vec{x}_k\in M_1-\{0\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\vec{x}=\sum_{k=1}^{s}m_k\vec{x}_k\,/\,\vec{x}_k\in(M_1-\{0\})\cup(M_2-\{0\})\Rightarrow\vec{x}=\sum_{k=1}^{s}m_k\vec{x}_k\,/\,\vec{x}_k\in(M_1\cup M_2-\{0\})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\vec{x}\in L(M_1\cup M_2-\{0\})\Rightarrow[\vec{x}]\in h(L(M_1\cup M_2)-\{0\})\Rightarrow[\vec{x}]\in h(M_1+M_2)-\{0\})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow[\vec{x}]\in\Phi(M_1+M_2)$$

siendo, por tanto: $\Phi(M_1)+\Phi(M_2)\subseteq\Phi(M_1+M_2)$

y de la doble inclusión: $\Phi(M_1+M_2)=\Phi(M_1)+\Phi(M_2)$

Vemos, en definitiva, que la aplicación biyectiva Φ es un isomorfismo covariante entre el conjunto de las variedades lineales vectoriales y el conjunto de las variedades lineales proyectivas, por lo que la estructura de uno se puede trasladar al otro. Como el conjunto de las variedades lineales vectoriales, dotado de la intersección y la suma de variedades, es un retículo modular, complementario y atómico, concluimos también que el conjunto de las variedades lineales proyectivas tiene esa misma estructura, es decir, se trata de un retículo modular, complementario y atómico.

A las partes o subconjuntos de este retículo se acostumbra a denominar *figuras.*

Definición 9:

Se define la dimensión de una variedad lineal proyectiva, A, como la dimensión de la variedad lineal vectorial imagen por Φ disminuida en una unidad:

$$\forall A\in\Gamma(P),\ \dim(A)=\dim(\Phi^{-1}(A))-1$$

Los puntos proyectivos tienen dimensión cero, ya que se corresponden con rectas del espacio vectorial, es decir:

$$\dim[\vec{x}]=\dim\left(\Phi^{-1}(recta)\right)-1=1-1=0$$

Se denominan rectas proyectivas y planos bidimensionales proyectivos, a las variedades lineales proyectivas de dimensión 1 y 2, respectivamente. Las restantes variedades lineales proyectivas son de dimensión r>2. De ellas, las variedades de dimensión n-1 se denominan *hiperplanos proyectivos.* Los planos bidimensionales proyectivos serían, en un espacio proyectivo tridimensional, también hiperplanos proyectivos (de dimension 2).

La única variedad lineal proyectiva de dimensión n es el espacio P de los puntos proyectivos:

$$\dim P=\dim(\Phi^{-1}(P))-1=\dim(V_{n+1})-1=n+1-1=n$$

La dimensión de la variedad vacía, Φ, es -1:

$$\phi \in \Gamma(P), \dim(\phi) = \dim(\Phi^{-1}(\phi)) - 1 = \dim\{0\} - 1 = 0 - 1 = -1$$

Teorema 11:

La suma de las dimensiones de dos variedades lineales proyectivas es igual a la dimensión de su suma más la dimensión de su intersección:

$$\forall A, B \in \Gamma(P),\ \dim A + \dim B = \dim(A + B) + \dim(A \cap B)$$

Demostración:

Puesto que sabemos que en las variedades lineales vectoriales se verifica la propiedad análoga:

$$\forall M_1, M_2 \in \Gamma(V_{n+1}),\ \dim M_1 + \dim M_2 = \dim(M_1 + M_2) + \dim(M_1 \cap M_2)$$

la usaremos para probar la propiedad en las variedades lineales proyectivas:

$$\begin{aligned}
&\forall A, B \in \Gamma(P),\ \dim A + \dim B = \dim(\Phi^{-1}(A)) - 1 + \dim(\Phi^{-1}(B)) - 1 = \\
&= \dim(\Phi^{-1}(A) + \Phi^{-1}(B)) + \dim(\Phi^{-1}(A) \cap \Phi^{-1}(B)) - 2 = \dim\left(\Phi^{-1}(A + B)\right) + \\
&+ \dim\left(\Phi^{-1}(A \cap B)\right) - 2 = \dim\left(\Phi^{-1}(A + B)\right) - 1 + \dim\left(\Phi^{-1}(A \cap B)\right) - 1 = \\
&= \dim(A + B) + \dim(A \cap B)
\end{aligned}$$

Definición 10:

Se denomina *base* de una variedad lineal proyectiva A, a un sistema generador de A que sea linealmente independiente.

$$B \text{ base de } A \in \Gamma(P) \Leftrightarrow A = L(B) \wedge B\ l.ind.$$

Teorema 12:

1) Si $\{[\vec{v}_0], [\vec{v}_1], \ldots, [\vec{v}_n]\}$ es base de $A \in \Gamma(P)$, entonces $\{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ es base de $\Phi^{-1}(A)$..
2) Todas las bases de una variedad lineal proyectiva tienen el mismo número de puntos, igual a su dimensión aumentada en una unidad.

Demostración:

1) $\{[\vec{v}_0], [\vec{v}_1], \ldots, [\vec{v}_n]\}$ base de $A \Leftrightarrow \{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ son l.independ y generan $\Phi^{-1}(A) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{\vec{v}_0, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ es una base de $\Phi^{-1}(A)$.
2) Es evidente, de 1), pues sabemos que todas las bases de una variedad lineal vectorial tienen el mismo número de vectores.

3. Rectas, planos e hiperplanos proyectivos.

Teorema 13:

1) Por dos puntos del espacio proyectivo P pasa una y solo una recta proyectiva.
2) Por tres puntos del espacio proyectivo P pasa un y solo un plano proyectivo bidimensional.
3) Si dos puntos proyectivos dados pertenecen un cierto plano proyectivo, la recta que contiene a ambos puntos está contenida en el plano proyectivo.

Demostración:

1) Sean los puntos proyectivos $[\vec{x}], [\vec{y}]$. Sabemos que la mínima variedad lineal proyectiva engendrada por la unión de ampos puntos es $[\vec{x}]+[\vec{y}]=L([\vec{x}]\cup[\vec{y}])$. Si r es una recta que pasa por ambos puntos, será $[\vec{x}]+[\vec{y}]\subseteq r$, y, por otra parte, como la dimensión de r es 1, será r la mínima variedad lineal proyectiva que contiene a ambos puntos, luego $r\subseteq[\vec{x}]+[\vec{y}]$. En definitiva, es $r=[\vec{x}]+[\vec{y}]$
2) Igual que en el apartado anterior: $[\vec{x}]+[\vec{y}]+[\vec{z}]=L([\vec{x}]\cup[\vec{y}]\cup[\vec{z}])$, y cualquier plano pl que contenga a los tres puntos será $pl\subseteq[\vec{x}]+[\vec{y}]+[\vec{z}]$. Por consiguiente, se tiene que $pl=[\vec{x}]+[\vec{y}]+[\vec{z}]$.
3) En el plano proyectivo $pl=[\vec{x}]+[\vec{y}]+[\vec{z}]$, la recta $r=[\vec{x}]+[\vec{y}]$ es parte de dicho plano, luego $r=[\vec{x}]+[\vec{y}]\subseteq pl$.

Teorema 14:

1) Todo hiperplano proyectivo es una variedad lineal proyectiva maximal.
2) $H\in\Gamma(P)$ es hiperplano proyectivo $\Leftrightarrow \exists f\in V_{n+1}^{*},\ f\neq 0 / H=\{[\vec{x}]/ f(x)=0\}$

Demostración:

1) Si H es hiperplano proyectivo del espacio proyectivo P, es $\dim H=n-1$. Si hay una variedad $A\in\Gamma(P)/H\subseteq A\Rightarrow \dim A>\dim H\Rightarrow \dim A=n\Rightarrow A=P$. Por consiguiente H es variedad lineal proyectiva maximal.
2) Veamos la doble implicación, probando que se verifica en cada uno de los dos sentidos:
   a) $H\in\Gamma(P)$ es hiperplano proyectivo $\Rightarrow \exists f\in V_{n+1}^{*},\ f\neq 0/H=\{[\vec{x}]/ f(x)=0\}$
      $\dim H=n-1\wedge \dim P=n\Rightarrow \exists[\vec{y}]\in P/[\vec{y}]\notin H\wedge P=L([\vec{y}]\cup H)=[\vec{y}]+H$
      Puesto que $V_{n+1}=\Phi^{-1}(P)$, será: $V_{n+1}=\Phi^{-1}([\vec{y}]+H)=\Phi^{-1}([\vec{y}])+\Phi^{-1}(H)$
      Es decir, $V_{n+1}=L(\vec{y})\oplus\Phi^{-1}(H)$, por lo cual se tiene que:
      $$\forall\vec{z}\in V_{n+1},\ \vec{z}=\alpha.\vec{y}+\vec{x},\ siendo\ \alpha\in k,\ \vec{x}\in\Phi^{-1}(H)$$

Sea la aplicación lineal $f \in V_{n1}^*,\ f \neq 0 / f(\vec{z}) = f(\alpha.\vec{y} + \vec{x}) = \alpha$. Se ha de cumplir que $f(\alpha.\vec{y} + \vec{x}) = \alpha.f(\vec{y}) + f(\vec{x}) = \alpha \Rightarrow f(\vec{y}) = 1 \wedge f(\vec{x}) = 0$. Esto quiere decir que $\forall \vec{x} \in \Phi^{-1}(H),\ f(\vec{x}) = 0$, o bien:

$$H = \{[\vec{x}]/ f(\vec{x}) = 0\}$$

(la ecuación $f(\vec{x}) = 0$ se denomina *ecuación del hiperplano H*)

b) $\exists f \in V_{n+1}^*,\ f \neq 0 / H = \{[\vec{x}]/ f(x) = 0\} \Rightarrow H \in \Gamma(P)$ es hiperplano proyectivo.

$\exists \vec{y} \in V_{n+1} / f(\vec{y}) \neq 0\ \exists \vec{y} \in V_{n+1} / f(\vec{y}) = 1$.

Sea $N = \ker f$ y llamemos $M = L(\vec{y}) \oplus \ker f$ .Veamos que $M = V_{n+1}$:

$\forall \vec{z} \in V_{n+1},\ f(\vec{z} - f(\vec{z}).\vec{y}) = f(\vec{z}) - f(\vec{z}) f(\vec{y}) = f(\vec{z}) - f(\vec{z}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{z} - f(\vec{z}).\vec{y} = \vec{x} \in \ker f \Rightarrow \vec{z} = f(\vec{z}).\vec{y} + \vec{x} \wedge f(\vec{z}) \in k \wedge \vec{x} \in \ker f \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{z} = f(\vec{z}).\vec{y} + \vec{x} \wedge f(\vec{z}).\vec{y} \in L(\vec{y}) \wedge \vec{x} \in N \Rightarrow \vec{z} \in L(\vec{y}) \oplus N = M$

En definitiva, $V_{n+1} \subseteq M \Rightarrow M = V_{n+1}$, por lo cual, siendo $\dim V_{n+1} = n + 1$. y Asimismo $\dim L(\vec{y}) = 1$, se deduce que $\dim N = \dim \ker f = n$, por lo cual:

$\dim H = \dim\left(\Phi^{-1}(\ker f)\right) = n - 1 \Rightarrow H = \{[\vec{x}]/ f(\vec{x}) = 0\}$ es hiperplano proyectivo.

Corolario:

1) La intersección de una recta proyectiva con un hiperplano proyectivo que no la contiene es un único punto proyectivo.
2) La intersección de dos rectas proyectivas distintas es un único punto proyectivo.
3) La intersección de un plano proyectivo bidimensional con un hiperplano proyectivo que no lo contiene es una recta proyectiva.
4) La intersección de dos hiperplanos proyectivos distintos del espacio proyectivo tridimensional es una recta proyectiva.

Demostración:

1) Si la recta no está incluida en el hiperplano, la unión de ambas variedades genera el espacio proyectivo:

$$r \not\subset H \Rightarrow L(r \cup H) = P \Rightarrow r + H = P \Rightarrow \dim(r + H) = \dim P = n$$

por tanto:

$$\dim(r \cap H) = \dim r + \dim H - \dim(r + H) = 1 + n - (1 + n) = 0$$

lo que indica que la variedad intersección es un punto proyectivo. Esto es, se trata de que

$$r \cap H = \{[\vec{z}]/ \vec{z} = a.\vec{x},\ \vec{x} \in V_{n+1}\}$$

podemos encontrar una expresión, a partir de la recta que pasa por dos puntos proyectivos, $[\vec{v}], [\vec{u}]$:

$$r \equiv [\vec{v}] + [\vec{u}],\ H = \{[\vec{z}]/ f(\vec{z}) = 0\} \Rightarrow r \cap H = \{[\vec{z}]/ \vec{z} \in \Phi^{-1}([\vec{v}] + [\vec{u}]) \wedge f(\vec{z}) = 0\}$$

es decir:

$$r \cap H = \{[\vec{z}] / \vec{z} = a.\vec{v} + b.\vec{u} \wedge f(\vec{z}) = 0\} = \{[\vec{z}] / f(\vec{z}) = f(a.\vec{v} + b.\vec{u}) = 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{[\vec{z}] / f(\vec{z}) = a.f(\vec{v}) + b.f(\vec{u}) = 0\} \Rightarrow r \cap H = \left\{[\vec{z}] / \vec{z} = a(.\vec{v} - \frac{f(\vec{v})}{f(\vec{u})}.\vec{u})\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \cap H = \left\{[\vec{z}] / \vec{z} = a.\vec{x},\ \vec{x} = \vec{v} - \frac{f(\vec{v})}{f(\vec{u})}.\vec{u} \in V_{n+1}\right\}$$

2) Es igual que el apartado anterior:

$$r_1 \neq r_2 \Rightarrow L(r_1 \cup r_2) = A \Rightarrow r_1 + r_2 = A \Rightarrow \dim(r_1 + r_2) = \dim A = 2$$

$$\dim(r_1 \cap r_2) = \dim r_1 + \dim r_2 - \dim(r_1 + r_2) = 1 + 1 - 2 = 0$$

3) Sea μ plano proyectivo bidimensional y sea H hiperplano tal que $\mu \not\subset H$:

$$\mu \not\subset H \Rightarrow L(\mu \cup H) = P \Rightarrow \mu + H = P \Rightarrow \dim(\mu + H) = \dim P = n$$

$$\dim(\mu \cap H) = \dim \mu + \dim H - \dim(\mu + H) = 2 + n - (1 + n) = 1$$

lo que indica que la intersección, al tener dimensión 1, es una recta proyectiva.

4) Si la dimensión del espacio proyectivo P es 3, los hiperplanos del mismo serán las variedades de dimensión 2.

$$H_1 \neq H_2 \Rightarrow L(H_1 \cup H_2) = P \Rightarrow H_1 + H_2 = P \Rightarrow \dim(H_1 + H_2) = \dim P = 3$$

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2) = 2 + 2 - 3 = 1$$

4. **El isomorfismo de dualidad:**

4.1. Sobre el espacio dual:

Repasando algo sobre los espacios duales: sobre todo espacio vectorial (V_{n+1}, k) sabemos que puede definirse el espacio de las formas lineales de V_{n+1} en *k, o espacio dual* (V_{n+1}^*, k). En estos espacios sabemos también que podemos establecer un isomorfismo de ortogonalidad, w, entre el retículo de las variedades lineales vectoriales de (V_{n+1}, k) y el retículo de las variedades lineales duales de (V_{n+1}^*, k), por el cual a cada variedad vectorial M se le hace corresponder la variedad lineal dual, *w(M)*, ortogonal a la misma:

$$w : \Gamma(V_{n+1}) \to \Gamma(V_{n+1}^*)\ ,\quad \forall M \in \Gamma(V_{n+1}), w(M) \in \Gamma(V_{n+1}^*)$$

siendo

$$w(M)=\left\{f\in V_{n+1}^{*}\ /\ f(\vec{x})=0,\ \forall\vec{x}\in M\right\}$$

resultando ser w un isomorfismo contravariante entre ambos retículos:

$$\forall M_1,M_2\in\Gamma(V_{n+1}),\ \begin{cases} w(M_1+M_2)=w(M_1)\cap w(M_2)\\ w(M_1\cap M_2)=w(M_1)+w(M_2)\end{cases}$$

también, continuando con el repaso, mencionemos la relación entre la dimensión de la variedad ortogonal $w(M)$ del espacio dual y la dimensión de la variedad M dada del espacio vectorial, cuando nos encontramos en espacios finitodimensionales:

$$\dim w(M)=\dim V_{n+1}-\dim M \qquad [4.1\_1]$$

4.2. El esquema general de los cuatro retículos:

De lo visto hasta aquí podemos resumir que conocemos la existencia de dos espacios vectoriales, cada uno con su espacio proyectivo asociado:

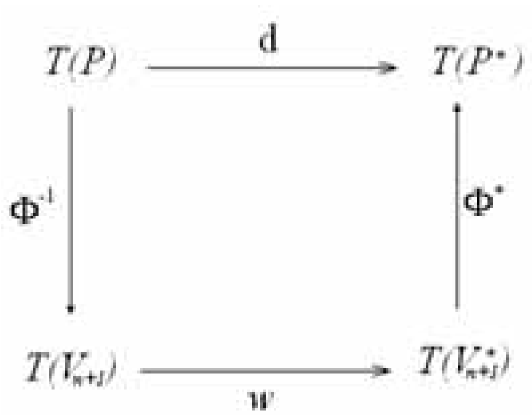
a) (V_{n+1},k) , espacio vectorial a la izquierda sobre el cuero k, en el que, al definir la relación R (definición 1) hacemos la partición en clases que originan la aparición del espacio proyectivo asociado P, y cuyos retículos de variedades admiten un isomorfismo covariante que hemos representado por Φ :

$$\Phi:\Gamma(V_{n+1})\to\Gamma(P)/\ \forall M_1,M_2\in\Gamma(V_{n+1}),\ \begin{cases}\Phi(M_1+M_2)=\Phi(M_1)+\Phi(M_2)\\ \Phi(M_1\cap M_2)=\Phi(M_1)\cap\Phi(M_2)\end{cases}$$

b) Igualmente, para el espacio dual (V_{n+1}^{*},k) podemos considerar su espacio proyectivo asociado $P*$, y el correspondiente isomorfismo covariante Φ^{*} entre sus retículos:

$$\Phi^{*}:\Gamma(V_{n+1}^{*})\to\Gamma(P^{*})/\forall M_1^{*},M_2^{*}\in\Gamma(V_{n+1}^{*}),\ \begin{cases}\Phi^{*}(M_1^{*}+M_2^{*})=\Phi^{*}(M_1^{*})+\Phi^{*}(M_2^{*})\\ \Phi^{*}(M_1^{*}\cap M_2^{*})=\Phi^{*}(M_1^{*})\cap\Phi^{*}(M_2^{*})\end{cases}$$

Se tiene, en definitiva, el siguiente esquema:



El isomorfismo $d=\Phi^{*}\circ w\circ\Phi^{-1}$ se denomina *isomorfismo de dualidad.*

Teorema 15:

1) La dualidad, d, es un isomorfismo contravariante entre los retículos $\Gamma(P)$ y $\Gamma(P^*)$.
2) Si $A \in \Gamma(P)$, entonces $\dim(d(A)) = n - \dim A - 1$

Demostración:

1) Es inmediato, pues al ser $d = \Phi^* \circ w \circ \Phi^{-1}$, se trata de la composición de un isomorfismo covariante con otro contravariante.
   Es decir, se verifica que:
   $$\forall A, B \in \Gamma(P), \begin{cases} d(A+B) = d(A) \cap d(B) \in \Gamma(P^*) \\ d(A \cap B) = d(A) + d(B) \in \Gamma(P^*) \end{cases}$$
2) Se trata de probar que $\dim(d(A)) = n - \dim A - 1$.
   Por ser $d(A) = \Phi^* \circ w \circ \Phi^{-1}(A) = \Phi^* \circ w\left(\Phi^{-1}(A)\right) = \Phi^*\left(w\left(\Phi^{-1}(A)\right)\right)$, se tiene:
   $$\dim\left(\Phi^{-1}(A)\right) = \dim A + 1$$
   $$\dim\left(w\left(\Phi^{-1}(A)\right)\right) = \dim V_{n+1} - \dim\left(\Phi^{-1}(A)\right) = n + 1 - (\dim A + 1) = n - \dim A$$
   $$\dim\left(\Phi^*\left(w\left(\Phi^{-1}(A)\right)\right)\right) = \dim\left(w\left(\Phi^{-1}(A)\right)\right) - 1 = n - \dim A - 1$$

Teorema 16:

1) la imagen dual del vacío es todo el espacio proyectivo dual:
   $$d(\phi) = P^*$$
2) La figura dual de un punto es un hiperplano:
   $$\forall[\vec{x}] \in \Gamma(P), d([\vec{x}]) = H^* \in \Gamma(P^*)$$
3) La figura dual de un hiperplano es un punto:
   $$\forall H \in \Gamma(P), d(H) = [\vec{x}^*] \in \Gamma(P^*)$$

Demostración:

1) Veamos que, efectivamente, la imagen dual del conjunto vacío es todo el espacio proyectivo dual:

   a) $\phi \in \Gamma(P) \Rightarrow \Phi^{-1}(\phi) = 0 \in \Gamma(V_{n+1})$, por la definición del isomorfismo Φ dada en el enunciado del Teorema 7.
   b) $0 \in V_{n+1}, w(0) = V_{n+1}^*$, pues $\forall f \in V_{n+1}^*, f(0) = 0 \Rightarrow f \in w(0) \Rightarrow V_{n+1}^* \subseteq w(0)$, de donde se deduce que $w(0) = V_{n+1}^*$.
   c) Finalmente, $\Phi^*(V_{n+1}^*) = P^*$, por la definición del isomorfismo **Φ***.

   En definitiva, $d(\phi) = \Phi^* \circ w \circ \Phi^{-1}(\phi) = P^*$

2) Veamos ahora que la imagen de un punto del espacio proyectivo P es un hiperplano de su espacio proyectivo dual P*:

   $$\forall[\vec{x}] \in \Gamma(P), \dim[\vec{x}] = 0 \Rightarrow \Phi^{-1}([\vec{x}]) = a\vec{x} \in V_{n+1} / \dim(a\vec{x}) = 1$$
   $w(\vec{x}) = \left\{f \in V_{n+1}^* / f(\vec{x}) = 0\right\} = M^* \in V_{n+1}^*$, y por [4.1_1] es:

$$\dim M^* = \dim V_{n+1} - \dim(a\vec{x}) = n + 1 - 1 = n$$

Finalmente, es $\Phi^*(M^*) = H^* \in \Gamma(P^*) \Rightarrow \dim H^* = \dim M^* - 1 = n - 1$

Por lo cual se tiene, en definitiva, que:

$$d([\vec{x}]) = \Phi^* \circ w \circ \Phi^{-1}([\vec{x}]) = H^* / \dim H^* = n - 1 \Rightarrow H^* \; hiperplano$$

3) Para ver que la imagen de un hiperplano es un punto del espacio proyectivo dual, observemos:

$H \subseteq \Gamma(P), hiperplano \Rightarrow \dim H = n - 1$

Y por el teorema 15_2): $\dim d(H) = n - \dim H - 1 = n - (n-1) - 1 = 0$

O sea, $\dim d(H) = 0 \Rightarrow d(H)$ *es punto proyectivo del espacio dual*.

Definición 12:

Dada una familia de hiperplanos del retículo de las variedades proyectivas del espacio proyectivo P, se dice que esta familia es linealmente independiente si la familia de sus respectivos puntos duales en el retículo de las variedades lineales proyectivas del espacio dual proyectivo P* es linealmente independiente:

$$Si \; H_j \subseteq P / \dim H_j = n - 1 \wedge d(H_j) = h_j \in P^*, j = 1,...,r$$ entonces se define:

$$\{H_1,...,H_r\} \subseteq \Gamma(P) \; lind \Leftrightarrow \{h_1,...,h_r\} \subseteq \Gamma(P^*) \; lind$$

Un hiperplano H del retículo de variedades lineales proyectivas del espacio proyectivo P se dice que es combinación lineal de una familia de hiperplanos de dicho retículo, si su imagen dual en el retículo de las variedades lineales proyectivas del espacio dual proyectivo P^* depende linealmente de la familia de los puntos duales de dicha familia de hiperplanos en P^*.

$$Si \; H_j \subseteq P / \dim H_j = n - 1 \wedge d(H_j) = h_j \in P^*, j = 1,...,r \wedge h = d(H), \dim H = n - 1$$

$$H \; com\_lin\_de \; \{H_1,...,H_r\} \Leftrightarrow h \; com\_lin\_de \; \{h_1,...,h_r\}$$

Entenderemos como *rango* de una familia de hiperplanos del retículo de variedades lineales proyectivas de P al rango de la familia de puntos duales en el espacio proyectivo dual P*:

$$Si \; H_j \subseteq P / \dim H_j = n - 1 \wedge d(H_j) = h_j \in P^*, j = 1,...,r,$$

$$rango\{H_1,...,H_r\} = rango\{h_1,...,h_r\}$$

Definición 13:

Un haz lineal de hiperplanos proyectivos es una familia de hiperplanos cuya imagen dual es una recta proyectiva.

Como una recta proyectiva es un subespacio del correspondiente espacio proyectivo dual P*, un haz lineal de hiperplanos proyectivos es un subespacio del espacio proyectivo P.

Teorema 17:

Dos planos distintos cualesquiera de un haz lineal de hiperplanos proyectivos constituyen una base del mismo.

$$F\ haz\_lin\_hiperp \Rightarrow \forall H_1, H_2 \in F / H_1 \neq H_2, \{H_1, H_2\}\ base\ de\ F$$

Demostración:

- Si los dos planos son distintos, $H_1 \neq H_2$, serán trivialmente linealmente independientes, es decir, los puntos de uno no dependen de los puntos del otro.
- Veamos que son generadores del espacio F constituido por el haz lineal de los hiperplanos:

  $d(H_1) = [h_1], d(H_2) = [h_2]$, siendo, por teorema 10, $[h_1], [h_2]$ puntos del espacio dual P^*. Sea la recta que contiene a ambos puntos:

$$[r] = [h_1] + [h_2]$$

Como, por definición de haz lineal de hiperplanos, la imagen dual de cualquiera de los planos está en una misma recta, se entiende que el punto imagen dual de cualquier otro hiperplano del haz se encuentra en la recta anterior:

$\forall H \in \Gamma(P), d(H) = [h] \subseteq [r]$, es decir $[h]\, dl\, [r] = [h_1] + [h_2]$, o sea:
$\forall f, f_1, f_2 \in V_{n+1}^* / f \in [h], f_1 \in [h_1], f_2 \in [h_2], \exists \varphi_1, \varphi_2 \in k,\ f = \varphi_1.f_1 + \varphi_2.f_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f\ comb\_lineal\_de\ \{f_1, f_2\} \Rightarrow [h]\, com\_lineal\_de\ \{[h_1], [h_2]\}$
por la definición 12, $[h]\, com\_lineal\_de\ \{[h_1], [h_2]\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \Phi^{-1}[h]\, com\_lineal\_de\ \{\Phi^{-1}[h_1], \Phi^{-1}[h_2]\} \Rightarrow H\, com\_lineal\_de\ \{H_1, H_2\}$
En definitiva todo hiperplano del haz es combinación lineal de los dos planos indicados, por lo que ambos planos generan a todo el haz lineal de hiperplanos.

Como también son ambos entre sí independientes, constituyen una base de dicho espacio proyectivo.

Teorema 18:

Dado un haz lineal de hiperplanos proyectivos, F, cualquier punto $[\vec{z}]$ del espacio P está contenido en un hiperplano del haz.

Demostración:

Sea $\{H_1, H_2\}$ una base del espacio F. Si el punto proyectivo $[\vec{z}]$ pertenece a alguno de ellos, ya está probado. Caso contrario se tiene

$H_1 = \{[\vec{x}] \in P / f_1(\vec{x}) = 0\},\ H_2 = \{[\vec{x}] \in P / f_2(\vec{x}) = 0\} \wedge [\vec{z}] \notin H_1 \wedge [\vec{z}] \notin H_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f_1(\vec{z}) \neq 0 \wedge f_2(\vec{z}) \neq 0$
Cualquier otro hiperplano, H, del haz, será $H = \{[\vec{x}] / f(\vec{x}) = 0\}$, cumpliéndose además, por ser combinación lineal de los elementos de la base, que $\exists \varphi_1, \varphi_2 \in k,\ f = \varphi_1.f_1 + \varphi_2.f_2$, o sea $H = \{[\vec{x}] / \varphi_1 f_1(\vec{x}) + \varphi_2 f_2(\vec{x}) = 0\}$

Si elegimos $\varphi_1 = f_2(\vec{z}), \varphi_2 = -f_1(\vec{z})$, se obtiene el plano

$$H_z = \{[\vec{x}] / f_2(\vec{z}).f_1(\vec{x}) - f_1(\vec{z})f_2(\vec{x}) = 0\}$$

el cual, obviamente, contiene al punto $[\vec{z}]$, pues $f(\vec{z}) = f_2(\vec{z}).f_1(\vec{z}) - f_1(\vec{z})f_2(\vec{z}) = 0$

En definitiva, para cualquier punto del espacio proyectivo, siempre existe un hiperplano al cual pertenece.

Teorema 19:

Para toda variedad lineal vectorial $M \in \Gamma(V_{n+1})$, se verifica que la imagen dual del conjunto de hiperplanos de P que contienen a $\Phi(M)$ es $\Phi^*(w(M))$, cumpliéndose la relación

$$\dim \Phi(M) + \dim \Phi^*(w(M)) = n - 1$$

Demostración:

Sea F una familia de hiperplanos del espacio proyectivo $P(V_{n+1})$ que contienen a la variedad $\Phi(M)$

$$\forall H \in F, \Phi(M) \subseteq H \Rightarrow d(\Phi(M)) \subseteq d(H) \Rightarrow d(\Phi(M)) \subseteq d(F)$$

Como, por el teorema 16_3), la imagen dual de un hiperplano es un punto de P^*, se tiene que

$$\forall H \in F, \Phi(H) = h \in d(\Phi(M)) \Rightarrow d(F) \subseteq d(\Phi(M))$$

En definitiva, es $d(F) = d(\Phi(M))$, y como por definición del isomorfismo de dualidad d, es $d(\Phi(M)) = \Phi^* \circ w \circ \Phi^{-1}(\Phi(M)) = \Phi^* \circ w(M)$, se verifica lo indicado en el enunciado:

$$d(F) = \Phi^* \circ w(M)$$

Para ver la expresión de la dimensión, tenemos en cuenta el teorema 15_2):

$$\dim\big(d(\Phi(M))\big) = n - \dim \Phi(M) - 1$$

o sea,

$$\dim(\Phi^* \circ w(M)) = \dim\big(d(\Phi(M))\big) = n - \dim \Phi(M) - 1$$

de donde:

$$\dim \Phi(M) + \dim(\Phi^* \circ w(M)) = n - 1$$

Corolario:

1) La familia F de hiperplanos proyectivos que contienen a una variedad lineal proyectiva $\Phi(M)$ de dimensión n-2 es un haz lineal de hiperplanos proyectivos.
2) Si n=3, entonces los hiperplanos proyectivos del haz lineal que contiene a la variedad $\Phi(M)$ de dimensión n-2 se cortan en una recta proyectiva.
3) Si n=2, entonces los hiperplanos proyectivos del haz lineal que contiene a la variedad $\Phi(M)$ de dimensión n-2 se cortan en un punto proyectivo.

Demostración:

1) Si $\dim(\Phi(M)) = n - 2,$ se tiene que:
$$\dim \Phi(M) + \dim(\Phi^* \circ w(M)) = n - 1 \Rightarrow \dim(\Phi^* \circ w(M)) = n - 1 - (n - 2) = 1$$

Es decir: $\dim d(F) = \dim \Phi^* \circ w(M) = 1 \Rightarrow d(F)$ es recta proyectiva, de donde se deduce que F es un haz lineal de hiperplanos proyectivos, por definición.

2) Es trivial, pues en este caso $\dim(\Phi(M)) = 3 - 2 = 1$, con lo que es $\Phi(M)$ una recta proyectiva que está contenida en el haz de hiperplanos. Es decir, todos los hiperplanos del haz se cortan en dicha recta proyectiva.
3) En este caso los hiperplanos H del haz son realmente rectas proyectivas, pues $\dim H = 2 - 1 = 1$, es decir, se trata de un haz de rectas proyectivas que se cortan en $\Phi(M)$, y como $\dim(\Phi(M)) = 2 - 2 = 0$, todo el haz se corta en un punto.

Definición 14:

1) $\forall A, B \in \Gamma(P),$ se denomina proyección de A desde B (o bien proyección de B desde A) a la variedad suma $A + B \in \Gamma(P)$

2) $\forall A, B \in \Gamma(P),$ se denomina *sección* o *corte* de A por B (o bien *sección* o *corte* de B por A) a la variedad intersección $A \cap B \in \Gamma(P)$.

3) Dos variedades proyectivas se dicen *incidentes* si una de ella está contenida en la otra:

$$A, B \in \Gamma(P) \text{ incidentes } \Leftrightarrow A \subseteq B \vee B \subseteq A$$

Definición 15:

Consideremos una variedad lineal proyectiva A del espacio proyectivo $P(V_{n+1})$ asociado al espacio vectorial V_{n+1}. Se denomina *radiación de base A* al espacio proyectivo asociado al espacio vectorial cociente $V_{n+1}/\Phi^{-1}(A)$, esto es, al espacio

$$P\left(V_{n+1}/\Phi^{-1}(A)\right)$$

siendo Φ el isomorfismo covariante entre el retículo $\Gamma(V_{n+1})$ de las variedades lineales vectoriales y el retículo $\Gamma(P)$ de las variedades lineales proyectivas del correspondiente espacio proyectivo asociado.

Por abreviar, representaremos por P/A a la radiación de base A en el espacio proyectivo P.

Teorema 22:

Los puntos del espacio proyectivo P/A son las variedades lineales proyectivas $[\vec{x}] + A / [\vec{x}] \notin A$, o sea, son las proyecciones de A desde los puntos $[\vec{x}] \in P$ tales que $[\vec{x}] \notin A$.

Demostración:

$$\forall \vec{z} \in V_{n+1}/\Phi^{-1}(A) \equiv P/A,\ \vec{z} = \vec{x} + \Phi^{-1}(A) / \vec{x} \notin \Phi^{-1}(A) \Rightarrow \Phi(\vec{z}) = [\vec{z}] = \Phi(\vec{x} + \Phi^{-1}(A)) =$$
$$= \Phi(\vec{x}) + \Phi\Phi^{-1}(A) = \Phi(\vec{x}) + A = [\vec{x}] + A \in P/A \wedge [\vec{x}] \notin A$$

Es inmediato que los puntos $\vec{x}_k + \Phi^{-1}(A),\ k = 1,\dots,r$ son linealmente independientes sii lo son también los puntos imágenes $[\vec{x}_k] + A,\ k = 1,\dots,r$

Teorema 23:

1) La figura dual, $d(P/A)$, de las radiaciones de base A, es el conjunto F de todos los hiperplanos de $d(A)$.
2) El conjunto de todos los hiperplanos de una variedad lineal de un espacio proyectivo es también un espacio proyectivo.

Demostración:

1) Veamos en primer lugar que la imagen dual de cada punto de la radiación es un hiperplano de $d(A)$. A continuación veremos que todo hiperplano de $d(A)$ es la imagen dual de un punto de la radiación.

Sea $G_x = d([\vec{x}] + A) = d([\vec{x}]) \cap d(A)$ la imagen dual de un punto de la radiación. Se tiene obviamente que $G_x \subseteq d(A)$. Veamos su dimensión.
Por ser $[\vec{x}]$ un punto del espacio proyectivo P, su dual es un hiperplano de P*, por lo que $\dim d([\vec{x}]) = n-1$. Llamemos $\dim d(A) = n_A$.
Se tiene, por el teorema 11:

$$\dim G_x = \dim\left(d([\vec{x}]) \cap d(A)\right) = \dim d([\vec{x}]) + \dim d(A) - \dim\left(d([\vec{x}]) + d(A)\right) =$$
$$= n - 1 + n_A - \dim d([\vec{x}] \cap A) = n - 1 + n_A - \dim d(\phi) = n - 1 + n_A - \dim P^* =$$
$$= n - 1 + n_A - n = n_A - 1$$

En definitiva:

$$G_x \subseteq d(A) \wedge \left.\begin{array}{c} \dim G_x = n_A - 1 \\ \dim d(A) = n_A \end{array}\right\} \Rightarrow G_x \ \textit{hiperplano de}\ d(A)$$

Ya sabemos que la imagen dual de cada punto de la radiación es un hiperplano de d(A), falta solo establecer que todos los hiperplanos de d(A) son imágenes duales de puntos de la radiación:

$$\forall G \subseteq d(A) / G \ \textit{hiperplano de}\ d(A) \Rightarrow \dim G = \dim d(A) - 1$$

Sea $U = d^{-1}(G) \Rightarrow d(U) = G \subseteq d(A) \Rightarrow A \subseteq U$. Por el teorema 15_2):

$$\dim(U) = n - \dim d(U) - 1 = n - \dim G - 1 = n - \left(\dim(d(A) - 1\right) - 1 = n - \dim d(A) =$$
$$= n - (n - \dim A - 1) = \dim A + 1 \Rightarrow \exists [\vec{x}] \in U / [\vec{x}] \notin A \Rightarrow U = [\vec{x}] + A$$

2) Es obvio, una vez probado lo anterior.

5. Variedades lineales proyectivas complementarias

Definición 16:

Se dice que las variedades lineales proyectivas del espacio proyectivo P son complementarias si la variedad suma coincide con P y son disjuntas

$$A \ complementaria \ de \ B \Leftrightarrow A+B=P \wedge A\cap B=\phi$$

Teorema 24:

Si una variedad A es complementaria de otra variedad B se verifica que la radiación P/B es la proyección del conjunto de los puntos de A desde B.

Demostración:

Proyección de $[\vec{x}_k]\in A$ desde B: $[\vec{x}_k]+B$
Proyección de todos los puntos de A desde B: $G_A=\{[\vec{x}]+B/[\vec{x}]\in A\}$
Radiación de base B: $P/B=\{[\vec{x}]+B/[\vec{x}]\notin B\}$
Se trata de probar que $G_A=P/B$
Puesto que $A\bigcap B=\phi \Rightarrow G_A\subseteq P/B$. Hemos de probar, por tanto, que $P/B\subseteq G_A$, es decir, se trata de probar que $\forall([\vec{x}]+B)\in P/B\Rightarrow([\vec{x}]+B)\in G_A$, o, lo que es lo mismo, que si $[\vec{x}]\notin B\Rightarrow[\vec{x}]\in A$
Para ello vamos a probar que $\dim(([\vec{x}]+B)\cap A)=0$, es decir, que $(([\vec{x}]+B)\cap A)$ es un punto. Como ese punto pertenece a A y no pertenece B (por ser A y B disjuntos), solo puede ser $[\vec{x}]\in A$, con lo que terminaría la prueba.
Veamos:

$$\dim([\vec{x}]+B)=\dim[\vec{x}]+\dim B-\dim([\vec{x}]\cap B)=\dim[\vec{x}]+\dim B-\dim(\phi)=0+\dim B-(-1)=$$
$$=\dim B+1$$
$$\dim([\vec{x}]+B)+\dim A=\dim B+1+\dim A=\dim(A+B)-\dim(A\cap B)+1=\dim P-\dim(\phi)+1=n$$
$$\dim[([\vec{x}]+B)+A]=\dim([\vec{x}]+B)+\dim A-\dim[([\vec{x}]+B)\cap A]=\dim B+1+\dim A-\dim[([\vec{x}]+B)\cap A]=$$
$$=n-\dim[([\vec{x}]+B)\cap A]$$
$$\dim[([\vec{x}]+B)\cap A]=n-\dim[([\vec{x}]+B)+A]=n-\dim P=n-n=0$$

que termina la demostración.

Definición 17:

Dadas dos variedades lineales proyectivas, A y B, entre sí complementarias, se denomina *perspectividad* entre A y P/B a la aplicación biyectiva $\Omega:A\to P/B$ definida por la condición:

$$\forall[\vec{x}]\in A, \Omega([\vec{x}])=[\vec{x}]+B$$

Variedades lineales proyectivas asociadas a un par de variedades lineales proyectivas complementarias.

Sean $A, B \in \Gamma(P),\ A + B = P \ \wedge\ A \cap B = \phi$. Se tienen las conexiones siguientes:

1) Por el isomorfismo de dualidad:

- Para las variedades complementarias, *A* y *B*:

$$d : A \to A^* \qquad d : B \to B^*$$

- Para las radiaciones de base *A* y de base *B*:

$$d : P/A \to \left(P/A\right)^* \qquad d : P/B \to \left(P/B\right)^*$$

2) Por la bisección de perspectividad:

- Para las variedades y radiaciones:

$$\Omega : A \to P/B \qquad \Omega : B \to P/A$$

- Para las variedades y radiaciones duales:

$$\Omega^* : A^* \to \left(P/B\right)^* \qquad \Omega^* : B^* \to \left(P/A\right)^*$$

3) Por composición de las aplicaciones anteriores:

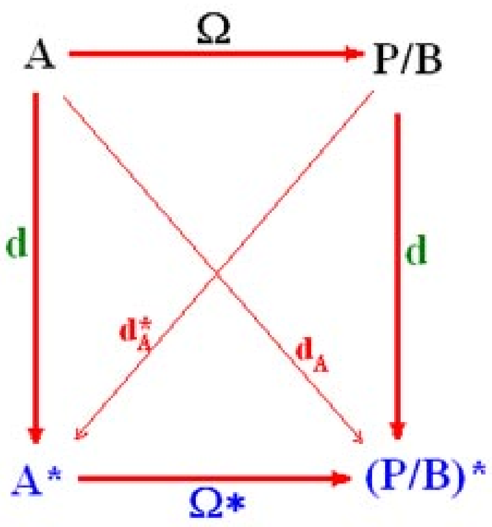
- Desde variedades a radiaciones duales:

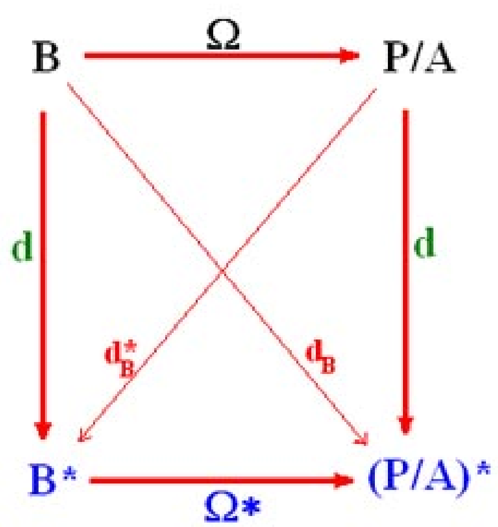
$$d_A : A \to \left(P/B\right)^* \qquad d_B : B \to \left(P/A\right)^*$$

- Desde radiaciones a variedades duales:

$$d_A^* : P/B \to A^* \qquad d_B^* : P/A \to B^*$$

En resumen, se tienen los esquemas:





$$\Omega^* = d.\Omega.d^{-1} \qquad d_A^* = d.\Omega^{-1} \qquad d_B^* = d.\Omega^{-1}$$

Teorema 25:

Todas las variedades que aparecen en los diagramas anteriores tienen la misma dimensión.

Demostración:

$\dim A^* = \dim A$, pues ambas variedades duales son isomorfas por el isomorfismo contravariante de dualidad. $d : A \to A^*$ $\quad d : B \to B^*$

$\dim(P/B) = \dim A$, pues existe entre ambos conjuntos la bisección de perspectividad. $\Omega : A \to P/B$ $\quad \Omega : B \to P/A$

$\dim(P/B)^* = \dim(P/B) = \dim A$, por ser variedades duales, isomorfas por dualidad.

La dimensión, en definitiva, coincide con la dimensión de la variedad A que aparece en el diagrama (todo ello siempre que se cumpla la hipótesis de que ambas variedades lineales proyectivas, A y B, con complementarias).

6. Configuraciones, r-vértices, coordenadas proyectivas:

Definición 18:

Una configuración es un conjunto finito de variedades lineales proyectivas

$$CONF = \{A^k_{m_k}\}, \quad k = 0,1,...,n-1, \quad m_k = 1,2,...,s_k$$

cuyas dimensiones son $k = 0,1,2,...,n-1$. y son tales que el número φ_{ij} de variedades lineales proyectivas $A^i_{m_i}$ de la configuración incidentes con las variedades lineales proyectivas $A^j_{m_j}$ depende únicamente de i y de j.

La matriz (φ_{ij}) se llama *matriz de incidencias de la configuración.*

Definición 19:

Un ejemplo de configuración en un espacio proyectivo P es lo que se denomina un r-vértice d-dimensional, que es un conjunto de r puntos proyectivos que engendran una variedad lineal proyectiva d dimensional, y tal que d+1 de estos puntos son linealmente independientes.

Teorema 26:

Sea el espacio proyectivo P sobre el espacio vectorial a izquierda (V_{n+1},k), y consideremos un (n+2)-vértice n-dimensional:

$$R_v = \{[\vec{x}_0],[\vec{x}_1],...,[\vec{x}_n];[\vec{y}]\}$$

Siempre es posible encontrar un representante $\vec{z}_i \in [\vec{x}_i],\ i = 0,1,...,n$ de cada uno de los n+1 primeros puntos, de modo que

$$\vec{z}_0 + \vec{z}_1 + ... + \vec{z}_n = \vec{u} \in [\vec{y}]$$

estando todos estos representantes unívocamente determinados salvo un factor a la izquierda.

Demostración:

Si son $[\vec{x}_0],[\vec{x}_1],...,[\vec{x}_n]$ linealmente independientes en P, entonces los representantes $\vec{z}_0,\vec{z}_1,...,\vec{z}_n$ serán linealmente independientes en (V_{n+1},k), que es de dimensión $n+1$, es decir, si añadimos otro vector, ya el conjunto será linealmente dependiente:

$$\vec{z}_0,\vec{z}_1,...,\vec{z}_n,\vec{u} \text{ lin. depend} \Rightarrow \exists \varphi_i \in k, i = 0,1,...,n / \varphi_0\vec{z}_0 + \varphi_1\vec{z}_1 + ... + \varphi_n\vec{z}_n = \vec{u} \in [\vec{u}]$$

y como $\vec{z}_i \in [\vec{x}_i],\ i = 0,1,...,n \to \varphi_i.\vec{z}_i \in [\vec{x}_i],\ i = 0,1,...,n$, queda probado el enunciado del teorema, esto es, que existen representantes vectoriales de los $n+1$ puntos del $(n+2)$-vertice cuya suma pertenece al punto $[\vec{u}]$.

Tal suma queda determinada salvo una constante de proporcionalidad a izquierda, pues si $\vec{u} \in [\vec{u}]$ también $m.\vec{u} \in [\vec{u}],\ m \in k - \{0\}$

El punto $[\vec{u}]$ se llama *punto unidad* del $(n+2)$-vértice n dimensional.

Definición 20:

El conjunto de los vectores obtenidos en el teorema 26, $\{\vec{z}_0, \vec{z}_1, ..., \vec{z}_n\}$ se denomina *base normalizada respecto al punto* $[\vec{u}]$.

El punto $[\vec{u}]$ se llama *punto unidad* del $(n+2)$-vértice n dimensional.

Teorema 27:

Sea el espacio proyectivo P sobre el espacio vectorial V_{n+1} a izquierda y el $(n+2)$-vertice n dimensional $R_v = \{[\vec{x}_0],[\vec{x}_1],...,[\vec{x}_n];[\vec{y}]\}$.
Consideremos el espacio vectorial M_{n+1} cuyos vectores son las matrices de una sola fila y $n+1$ columnas sobre el cuerpo k a izquierda, y consideremos el espacio proyectivo P_M sobre M_{n+1}:

$$M_{n+1} = \{(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n), ..., (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n), ...\}, \qquad P_M = \{[(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)], ..., [(\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n)], ...\}$$

Entonces, el $(n+2)$-vértice R_v define una biyección entre el espacio proyectivo P y el espacio proyectivo P_M de modo que a cada punto de P le corresponde un único punto de P_M y viceversa, y queda definida por la condición

$$f : P \to P_M$$
$$\forall [\vec{x}] \in P,\ f([\vec{x}]) = [(x_0, x_1, ..., x_n)] \in P_M,\ \ siendo\ \ [\vec{x}] = [x_0.\vec{z}_0 + x_1.\vec{z}_1 + ... + x_n.\vec{z}_n]$$

Demostración:

Cada punto proyectivo, $[(\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n)]$ del espacio P_M tiene por representantes a las matrices proporcionales $a.(\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n),\ a \in k - \{0\}$.
Para probar que la relación f indicada en el enunciado es una biyección hemos de probar que es aplicación, que es sobreyectiva, y que es inyectiva.

- f es aplicación. Para ello basta probar que ningún punto proyectivo de P tiene más de una imagen en P_M, es decir, que si

$$f([\vec{x}]) = [(x_0, x_1, ..., x_n)] \in P_M, \ siendo \ \vec{x} = x_0.\vec{z}_0 + x_1.\vec{z}_1 + ... + x_n.\vec{z}_n \in [\vec{x}]$$

también se obtendrá la misma imagen para otro representante $\vec{x}'$ del mismo punto proyectivo original:

$$f([\vec{x}]) = [(x_0, x_1, ..., x_n)] \in P_M, \ siendo \ \vec{x}' = a\vec{x} = a(x_0.\vec{z}_0 + x_1.\vec{z}_1 + ... + x_n.\vec{z}_n) \in [\vec{x}]$$

pues la matriz que define la expresión del vector $\vec{x}'$ es $a.(x_0, x_1, ..., x_n)$, que es también representante del mismo punto imagen:

$$a.(x_0, x_1, ..., x_n) \in [(x_0, x_1, ..., x_n)]$$

- es sobreyectiva. Se trata ahora de probar que para cualquier punto proyectivo del espacio P_M existe un punto proyectivo del espacio P del cual es imagen por f, lo cual es trivial:
$$\forall[(x_0, x_1, ..., x_n)] \in P_M, \ \exists\vec{x} = x_0\vec{z}_0 + x_1\vec{z}_1 + ... + x_n\vec{z}_n \Rightarrow f([\vec{x}]) = [(x_0, x_1, ..., x_n)]$$
- es inyectiva. Veamos que si dos puntos proyectivos de P tienen la misma imagen en P_M entonces ambos puntos de P coinciden:
$$[(u_0, ..., u_n)] = [(v_0, ..., v_n)] \rightarrow [\vec{u}] = [\vec{v}]$$

$$[(u_0, ..., u_n)] = [(v_0, ..., v_n)] \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} \forall(x_0, ..., x_n) \in [(u_0, ..., u_n)] \rightarrow (x_0, ..., x_n) \in [(v_0, ..., v_n)] \\ \forall(y_0, ..., y_n) \in [(v_0, ..., v_n)] \rightarrow (y_0, ..., y_n) \in [(u_0, ..., u_n)] \end{cases} \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} \forall\vec{x} = x_0\vec{z}_0 + ... + x_n\vec{z}_n \in [\vec{u}] \rightarrow \vec{x} \in [\vec{v}] \\ \forall\vec{y} = y_0\vec{z}_0 + ... + y_n\vec{z}_n \in [\vec{v}] \rightarrow \vec{y} \in [\vec{u}] \end{cases} \rightarrow [\vec{u}] = [\vec{v}]$$

Teorema 28:

Para todo automorfismo interior φ en el cuerpo k se verifica que:

1) $\forall[(x_0, ..., x_n)] \in P_M, \ \varphi[(x_0, ..., x_n)] \in P_M$

2) $\forall[(x_0, ..., x_n)] \in P_M, \ \varphi[(x_0, ..., x_n)] = [\varphi(x_0, ..., x_n)]$

Demostración:

1) $\forall[(x_0, ..., x_n)] \in P_M \Leftrightarrow a.(x_0, ..., x_n) \in [(x_0, ..., x_n)], a \neq 0, (x_0, ..., x_n) \in M_{n+1}$
$$\forall(h_0, ..., h_n) \in \varphi[(x_0, ..., x_n)], (h_0, ..., h_n) = \varphi(a(x_0, ..., x_n)) = \varphi(ax_0, ..., ax_n) =$$
$$= (\varphi(ax_0), ..., \varphi(ax_n)) \in M_{n+1} \Rightarrow [(\varphi(ax_0), ..., \varphi(ax_n))] = \varphi[(x_0, ..., x_n)] \in P_M$$

2) $\forall(h_0, ..., h_n) \in \varphi[(x_0, ..., x_n)], \ (h_0, ..., h_n) = \varphi(a(x_0, ..., x_n)), a \neq 0 \Rightarrow (h_0, ..., h_n) =$
$$= \varphi(a(x_0, ..., x_n)) = \varphi(ax_0, ..., ax_n) = (\varphi(ax_0), ..., \varphi(ax_n)) =$$
$$= (\varphi(a).\varphi(x_0), ..., \varphi(a).\varphi(x_n)) = \varphi(a).(\varphi(x_0), ..., \varphi(x_n)) =$$
$$= \varphi(a).\varphi(x_0, ..., x_n) \in [\varphi(x_0, ..., x_n)]$$

por lo que se verifica la inclusión $\varphi[(x_0, ..., x_n)] \subseteq [\varphi(x_0, ..., x_n)]$

$$\forall(h_0, ..., h_n) \in [\varphi(x_0, ..., x_n)], \ (h_0, ..., h_n) = a.\varphi(x_0, ..., x_n), a \neq 0 \Rightarrow (h_0, ..., h_n) =$$
$$= a.(\varphi(x_0), ..., \varphi(x_n)) = (a\varphi(x_0), ..., a\varphi(x_n)) =$$
$$= (\varphi\varphi^{-1}(a).\varphi(x_0), ..., \varphi\varphi^{-1}(a).\varphi(x_0)) = \varphi(\varphi^{-1}(a)x_0, ..., \varphi^{-1}(a)x_n) =$$
$$= \varphi(\varphi^{-1}(a)(x_0, ..., x_n)) \in \varphi[(x_0, ..., x_n]$$

y también se verifica la inclusión $[\varphi(x_0, ..., x_n)] \subseteq \varphi[(x_0, ..., x_n)]$

en definitiva, de la doble inclusión:

$$[\varphi(x_0, ..., x_n)] = \varphi[(x_0, ..., x_n)]$$

Por el teorema 27 sabemos que el *(n+2)*-vértice R_v define una biyección entre el espacio proyectivo P y el espacio proyectivo P_M de modo que a cada punto de P le corresponde un único punto de P_M y viceversa, y queda definida por

$$f : P \to P_M$$
$$\forall[\vec{x}] \in P,\ f([\vec{x}]) = [(x_0, x_1, ..., x_n)] \in P_M,\ siendo\ [\vec{x}] = [x_0.\vec{z}_0 + x_1.\vec{z}_1 + ... + x_n.\vec{z}_n]$$

Veamos a continuación el teorema que nos va a permitir establecer el concepto de coordenadas proyectivas.

Teorema 29:

El *(n+2)*-vértice R_v n dimensional $R_v = \{[\vec{v}_0], ..., [\vec{v}_n]; [\vec{u}]\}$ hace corresponder a cada punto proyectivo $[\vec{x}] \in P$ el conjunto $\varphi(f[\vec{x}])$, siendo $f([\vec{x}]) = [(x_0, ..., x_n)] \in P_M$ donde $\vec{x} = x_0\vec{v}_0 + ... + x_n\vec{v}_n$, estando la base $\{\vec{v}_0, ..., \vec{v}_n\}$ normalizada respecto de $\vec{u} \in [\vec{u}]$ y siendo φ un automorfismo interior de k, que recorre el conjunto φ_k de todos los automorfismos interiores de k para los diferentes representantes vectoriales de $[\vec{u}]$.

Demostración:

Sea $(x_0, ..., x_n)$ la matriz de las coordenadas de $\vec{x}$ en la base $\{\vec{v}_0, ..., \vec{v}_n\}$ normalizada respecto de $\vec{u} \in [\vec{u}]$, o sea $\vec{u} = \vec{v}_0 + ... + \vec{v}_n$.

$$f : P \to P_M,\quad \forall[\vec{x}] \in P,\ f([\vec{x}]) = [(x_0, ..., x_n)]$$

Sea $(y_0, ..., y_n)$ la matriz de las coordenadas de $\vec{x}$ en la base $\{\vec{w}_0, ..., \vec{w}_n\}$ normalizada respecto de $\vec{u}' \in [\vec{u}]$, o sea $\vec{u}' = \vec{w}_0 + ... + \vec{w}_n$.

$$g : P \to P_M,\quad \forall[\vec{x}] \in P,\ g([\vec{x}]) = [(y_0, ..., y_n)]$$

Expresión de $\vec{x}$ en ambas bases: $\vec{x} = x_0\vec{v}_0 + ... + x_n\vec{v}_n$, $\quad \vec{x} = y_0\vec{w}_0 + ... + y_n\vec{w}_n$

Como $\vec{u}$ y $\vec{u}'$ son representantes del mismo punto proyectivo $[\vec{u}]$ se tiene que existe la relación $\vec{u}' = a.\vec{u},\ a \neq 0$, por lo cual $\vec{w}_0 + ... + \vec{w}_n = a\vec{v}_0 + ... + a\vec{v}_n \to$

$\to \vec{w}_i = a.\vec{v}_i,\quad i = 0, ..., n$, por tanto:

$\vec{x} = x_0\vec{v}_0 + ... + x_n\vec{v}_n = y_0 a\vec{v}_0 + ... + y_n a\vec{v}_n \to y_i = x_i a^{-1},\quad i = 0, ..., n$, y se tiene:

$y_i = a^{-1}ax_ia^{-1} = a^{-1}(ax_ia^{-1}) = a^{-1}\varphi(x_i)$, siendo $\varphi(x_i) = a^{-1}x_ia$ el automorfismo interior en k inducido por *a*.

$$g : P \to P_M,\quad \forall[\vec{x}] \in P,\ g([\vec{x}]) = [(y_0, ..., y_n)] = [(a^{-1}\varphi(x_0), ..., a^{-1}\varphi(x_n))] =$$
$$= [a^{-1}(\varphi(x_0), ..., \varphi(x_n))] = [(\varphi(x_0), ..., \varphi(x_n))] = [\varphi(x_0, ..., x_n)] = \varphi[(x_0, ..., x_n)] =$$
$$= \varphi f([\vec{x}])$$

Para cualquier otro representante $\vec{u}'' \in [\vec{u}]$, se tendría $\vec{u}'' = b.\vec{u},\ b \neq 0$, y si llamamos δ al automorfismo inducido por *b*, $\delta(x_i) = b^{-1}x_0b$, se tiene:

$$h : P \to P_M,\quad \forall[\vec{x}] \in P,\ h([\vec{x}]) = [(z_0, ..., z_n)] = [(b^{-1}\delta(x_0), ..., b^{-1}\delta(x_n))] =$$
$$= [b^{-1}(\delta(x_0), ..., \delta(x_n))] = [(\delta(x_0), ..., \delta(x_n))] = [\delta(x_0, ..., x_n)] = \delta[(x_0, ..., x_n)] =$$
$$= \delta f([\vec{x}])$$

Es decir, para cada constante de proporcionalidad entre los representantes vectoriales del punto origen del n+2 vértice hay un automormismo interior distinto, lo que nos indica que se recorre el conjunto φ_k todos los automorfismos interiores de k para los diferentes representantes vectoriales.

Corolario:

1) Si el cuerpo k es conmutativo, el (n+2)-vértice R_v define una bisección única $f : P \to P_M$, denominándose al punto $f([\vec{x}]) = [(x_0,...,x_n)]$ *matriz de las coordenadas proyectivas* del punto $[\vec{x}]$ en el sistema referencial proyectivo R_v.
2) Si el cuerpo k no es conmutativo, el (n+2)-vértice R_v define para cada $[\vec{x}] \in P$ un punto imagen que queda determinado salvo un automorfismo interior de k, por lo que no define un sistema de referencia proyectivo. Para que lo sea, es necesario fijar también un único representante $\vec{u} \in [\vec{u}]$ del punto unidad, con lo que el par $(R_v, \vec{u})$ si sería un sistema de referencia proyectivo sobre un cuerpo no conmutativo.

Demostración:

Es obvio, del teorema 29.

7. Bibliografía:

HEYTING, Arend, Axiomatic Projective Geometry, 1980, Biblioteca Matemática, V. Wolters-Noordhoff Scientific Publications, Groningen.
BUSEMANN, Herbert-KELLY, Paul J., Projective Geometry and Projective Metrics, Dover Publications, 1968.
SANTALÓ, Luis. A., Geometría Proyectiva, Eudeba, 1977, Buenos Aires.
COXETER, H.S.M., Projective Geometry, 2ª edición, Springer Verlag, 2003.
BAER, Reinhold, Linear Algebra and Projective Geometry, 1965, Academic Pres, N. York.