ESTABILIDAD DE LYAPUNOV, UN ACERCAMIENTO DIDÁCTICO ELEMENTAL

Joaquín González Álvarez

El concepto de estabilidad de Lyapunov se utiliza en matemática en el contexto de los sistemas dinámicos, esto es en sistemas como los físicos que varían con el tiempo del tipo:

$$\dot{Z} = f(x, y)$$

La estabilidad resulta como un recurso muy valioso en casos en los cuales las ecuaciones diferenciales que los representan sean de muy difícil o imposible solución, pues conociendo las características de estabilidad de los puntos fijos esto es los puntos $P(x,y)$ para los cuales $\dot{Z} = 0$, podemos conocer características de las trayectorias fásicas (curvas dadas por sus coordenadas fásicas $\dot{v}, v$) que convergen o divergen de ese punto o rodean a éste, pudiendo sacar consecuencias muy valiosas como saber si esas trayectorias son o no cerradas o espiraloides, lo cual dirá si las soluciones serán o no periódicas, y así otras informaciones valiosas. Con un ejemplo daremos una idea de la utilidad del concepto de estabilidad de Lyapunov.

Por su sencillez tomaremos el movimiento dado por la siguiente ecuación:

$$\ddot{q} = -\omega^2 q$$

Haremos las siguientes sustituciones:

$$\dot{q} = p \qquad (2)$$

y por tanto:

$$\dot{p} = -\omega^2 q \qquad (1)$$

y tendremos conformado nuestro sistema dinámico.

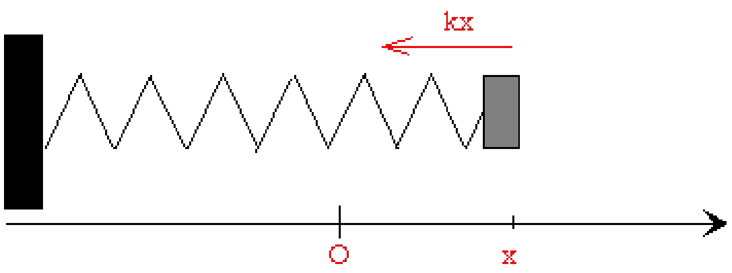
De ahora en adelante designaremos por f al segundo miembro de *(1)* y por g al de *(2)*.

El siguiente paso es mediante $f=0$ y $g=0$ hallar el o los puntos fijos que en el ejemplo vemos que es para $p=0$ y $q=0$, coincidiendo con el origen de coordenadas fásicas p-q.

A continuación se necesita determinar el Jacobiano del sistema evaluado para el punto fijo resultando la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $d = \omega^2$ y su traza *t=0* así como $t^2 - 4d < 0$ indican que la trayectoria fásica es una curva cerrada con centro en el punto fijo lo cual indica la periodicidad del movimiento como explicamos a continuación. Si partimos de un punto de la trayectoria de coordenadas fásicas por ejemplo *p=6 q=8* y nos movemos sobre la trayectoria volveremos una y otra vez a los mismos valores para p y q. esto es el movimiento repite periódicamente los valores. Además la raíz cuadrada del determinante d da por el método de la estabilidad de Lyapunov la frecuencia del movimiento que en el ejemplo es ω, de modo que hemos llegado a la conclusión de que el movimiento ejemplo es oscilatorio de frecuencia ω y utilizando inteligentemente el gráfico (retrato fásico), hallado valores de su elongación *q*, **sin haber resuelto la ecuación diferencial** $\dot{q} = -\omega^2$**.** El lector se habrá dado cuenta de que hemos tomado como ejemplo al oscilador armónico y que *q* es la elongación y *p* el momentum. Es claro que en la práctica la ecuación diferencial es muy fácil de resolver sin utilizar los recursos de la estabilidad de Lyapunov. Pero hemos



tomado un ejemplo sencillo por su valor didáctico para evidenciar la importancia y utilidad de la estabilidad de Lyapunov. Método que permite incluso el trazado de la trayectoria fásica ya que podemos encontrar su ecuación diferencial en función de p y q sin haber resuelto la originaria generalmente difícil o imposible. Para ello debemos fijarnos en que los primeros miembros de *1* y *2* son derivadas respecto al tiempo de p y q y al dividir miembro a miembro *(2)* entre *(1)* obtenemos $dq/dp = -p/\omega^2 q$ que nos da la pendiente en cada punto *(p, q)* y por tanto la $tg\alpha$ del ángulo de inclinación de la tangente a la trayectoria fásica en cada punto *(p,q),* de modo que si en cada punto fásico trazamos un pequeño segmento con inclinación α con trazar una curva tangente a esos segmentos obtendremos la trayectoria fásica que buscamos. En nuestro ejemplo si nos fijamos sólo en los cortes de la trayectoria con los ejes p (horizontal) q (vertical) notamos que en los dos verticales $p = 0, tg\alpha = 0$, segmentos paralelos a ejes p, y en los cortes horizontales $q=0$, segmentos paralelos a eje q. Al trazar una curva tangente a los segmentos vemos la trayectoria fásica de nuestro oscilador armónico como una curva cerrada con centro en *(0,0).*

De gran satisfacción le será al lector comprobar con lápiz y papel lo antes expuesto en el ejemplo didáctico del oscilador armónico.

Joaquín GONZÁLEZ ÁLVAREZ
j.gonzalez.a@hotmail.com