EL TEOREMA EGREGIUM DE GAUSS

Introducción

Johann Carl Friedrich Gauss (30 de abril de 1777 – 23 de febrero de 1855), en sus *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* de 1828, expone el teorema conocido como egregio, *Egregium,* que ha tenido notables consecuencias en el desarrollo de la posterior geometría diferencial.

El teorema, en resumen, viene a probar que si dos superficies son superponibles la una sobre la otra (isométricas), tienen la misma curvatura total en dos puntos correspondientes. Esto es, que si al punto P de una de las superficies le corresponde el punto P' de la otra, entonces la curvatura gaussiana (total) en P es la misma que en P'.

Dicho de otro modo, el teorema viene a indicar que en las flexiones de una superficie que no supongan dilatación, ni contracción o rasgadura, se conservará la curvatura total, producto de las curvaturas principales en el punto de referencia.

Puesto que en estas flexiones se conservan las distancias, se conservarán también los coeficientes, g_{ij}, de la primera forma fundamental (tensor métrico), por lo que se conservará también cualquier ente que dependa de ellos. Si logramos probar que la curvatura total, K, depende exclusivamente de los coeficientes g_{ij} indicados y de sus derivadas, quedará, pues, probado que dicha curvatura se mantiene invariante en las flexiones.

La forma en la que exponemos aquí el teorema consiste simplemente en probar que la curvatura total de Gauss depende solamente de los coeficientes de la primera forma fundamental de la teoría de superficies, g_{ij}, y de sus derivadas, esto es, del tensor métrico y de sus derivadas.

Para ello, obtendremos la ecuaciones de Codazzi-Mainardi y Gauss Codazzi, como paso previo.

La curvatura total o de Gauss

Para una superficie cualquiera diferenciable, $S: R^2 \to R^3$, expresada por

$$\vec{r} = \left(x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2)\right)$$

se tiene que $d\vec{r} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}.du_1 + \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}.du_2 = \vec{r}_1.du_1 + \vec{r}_2.du_2$. Si llamamos $\vec{N}$ al vector unitario normal a los vectores tangentes, $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, esto es:

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2\right|}$$

se definen entonces las dos formas fundamentales del siguiente modo:

1ª forma fundamental:

$$I = ds^2 = d\vec{r}.d\vec{r} = \vec{r}_1.\vec{r}_1.du_1^2 + \vec{r}_2.\vec{r}_2.du_2^2 + 2\vec{r}_1.\vec{r}_2.du_1du_2$$

llamando $g_{ij} = \vec{r}_i.\vec{r}_j$, $i, j = 1,2$, se tiene:

$$I = g_{11}.du_1^2 + g_{22}.du_2^2 + 2g_{12}.du_1du_2$$

2ª forma fundamental:

$$II = d\vec{r}.d\vec{N} = \vec{r}_1.\vec{N}_1.du_1^2 + \vec{r}_2.\vec{N}_2.du_2^2 + 2\vec{r}_1.\vec{N}_2.du_1du_2$$

llamando $l_{ij} = \vec{r}_i.\vec{N}_j = -\vec{N}.\vec{r}_{ij}$, $i, j = 1,2$, se tiene:

$$II = l_{11}.du_1^2 + l_{22}.du_2^2 + 2l_{12}.du_1du_2$$

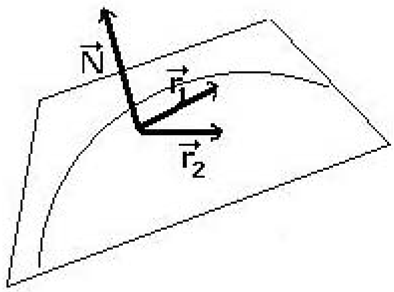
La **curvatura total o de Gauss** en el punto P viene dada por

$$K = k_1.k_2 = \frac{l_{11}l_{22} - l_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{l}{g}$$

donde son k_1 y k_2 las curvaturas principales de la superficie en dicho punto P.

(para la demostración ver el artículo sobre la Indicatriz de Dupin en http://personales.ya.com/casanchi/mat/superficies03.pdf)

El triedro en cada punto de la superficie:



En cada punto de la superficie podemos considerar el triedro formado por los vectores linealmente independientes $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{N}\}$, en donde obviamente se cumple que:

$$\vec{r}_1.\vec{r}_2 \neq 0 \quad (en\ general)$$
$$\vec{r}_i.\vec{N} = 0, \qquad i = 1,2$$

Puesto que el triedro constituye una base del espacio tridimensional, todo vector $\vec{v}$ puede expresarse como combinación lineal de ellos:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{r}_1 + \alpha_2.\vec{r}_2 + \alpha_3.\vec{N}$$

en particular, las derivadas parciales de los mismos vectores de la base:

$$\vec{r}_{ij} = \alpha_{ij}^1\vec{r}_1 + \alpha_{ij}^2\vec{r}_2 + \alpha_{ij}^3.\vec{N}, \qquad \vec{N}_i = \beta_i^1\vec{r}_1 + \beta_i^2\vec{r}_2 + \beta_i^3.\vec{N}$$

Al analizar las propiedades de los coeficientes de estas últimas expresiones se obtienen de forma natural las llamadas Ecuaciones de Gauss para la expresión de las $\vec{r}_{ij}$, y Ecuaciones de Weingarten para la expresión de $\vec{N}_i$.

Las ecuaciones de Gauss para las derivadas parciales de los vectores básicos tangentes:

Sabemos, por definición de símbolos de Christoffel de 2ª especie (ver "Cálculo diferencial absoluto en espacios euclidianos", paginas 8 y 9, en esta misma web), que las derivadas parciales de los vectores de una base $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{N}\}$ pueden expresarse en función de estos mismos vectores mediante los símbolos de Christoffel:

$$\vec{r}_{ij} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial u_j} = \Gamma_{ij}^1\vec{r}_1 + \Gamma_{ij}^2\vec{r}_2 + \Gamma_{ij}^3\vec{N}$$

y como sabemos que en dicha base es $\vec{r}_j.\vec{N} = 0$, $j = 1,2$ y también $\vec{r}_{ij}.\vec{N} = l_{ij}$

(l_{ij}: coeficientes de la 2ª forma fundamental)

se tiene, en definitiva:

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^1\vec{r}_1 + \Gamma_{ij}^2\vec{r}_2 + l_{ij}\vec{N}, \quad i,j = 1,2$$

(Ecuaciones de Gauss)

De forma desarrollada:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{11} &= \Gamma_{11}^{1}\vec{r}_1 + \Gamma_{11}^{2}\vec{r}_2 + l_{11}\vec{N} \\
\vec{r}_{12} &= \Gamma_{12}^{1}\vec{r}_1 + \Gamma_{12}^{2}\vec{r}_2 + l_{12}\vec{N} \\
\vec{r}_{21} &= \Gamma_{21}^{1}\vec{r}_1 + \Gamma_{21}^{2}\vec{r}_2 + l_{21}\vec{N} \\
\vec{r}_{22} &= \Gamma_{22}^{1}\vec{r}_1 + \Gamma_{22}^{2}\vec{r}_2 + l_{22}\vec{N}
\end{aligned}$$

(Ecuaciones de Gauss)

Las ecuaciones de Wingarten para las derivadas parciales del vector unitario normal:

Puesto que $\vec{N}$ es unitario (módulo constante e igual a la unidad), se tiene:

$$\left|\vec{N}\right| = 1 \to \vec{N}.\vec{N} = 1 \to \frac{\partial}{\partial u_i}(\vec{N}.\vec{N}) = 0 \to 2.\vec{N}.\frac{\partial \vec{N}}{\partial u_i} = 2.\vec{N}.\vec{N}_i = 0 \to \vec{N}, \vec{N}_i \ \textit{perpendiculares} \to$$

$\to \vec{N}_i$ *coplanario con* $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \to \exists l_i^k \in R / \vec{N}_i = -l_i^k.\vec{r}_k, i = 1,2$. En definitiva, se tiene que

$$\begin{aligned}
\overline{N}_1 &= -l_1^1\vec{r}_1 - l_1^2\vec{r}_2 \\
\overline{N}_2 &= -l_2^1\vec{r}_1 - l_2^2\vec{r}_2
\end{aligned}$$

Podemos obtener la expresión de las coordenadas, $-l_i^k$, en función de los coeficientes, g_{mn}, l_{ps}, de ambas formas fundamentales, mediante el siguiente

Teorema: Se verifican las expresiones

$$\begin{aligned}
\vec{N}_1 &= \frac{l_{11}g_{22} - l_{12}g_{21}}{g}\vec{r}_1 + \frac{l_{12}g_{11} - l_{11}g_{12}}{g}\vec{r}_2 \\
\vec{N}_2 &= \frac{l_{21}g_{22} - l_{22}g_{21}}{g}\vec{r}_1 + \frac{l_{22}g_{11} - l_{21}g_{12}}{g}\vec{r}
\end{aligned} \qquad \text{(Ecuaciones de Weingarten)}$$

Demostración:

Basta multiplicar la relación $\vec{N}_i = -l_i^k.\vec{r}_k$ por $\vec{r}_1$ *y por* $\vec{r}_2$:

$$\begin{matrix}
\vec{N}_i.\vec{r}_1 = -l_i^1\vec{r}_1.\vec{r}_1 - l_i^2\vec{r}_2.\vec{r}_1 = l_{i1} \\
\vec{N}_i.\vec{r}_2 = -l_i^1\vec{r}_1.\vec{r}_2 - l_i^2\vec{r}_2.\vec{r}_2 = l_{i2}
\end{matrix} \to \begin{matrix}
-l_i^1 g_{11} - l_i^2 g_{21} = l_{i1} \\
-l_i^1 g_{12} - l_i^2 g_{22} = l_{i2}
\end{matrix} \to \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_i^1 \\ l_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_{i1} \\ -l_{i2} \end{pmatrix}$$

Resolviendo mediante la Regla de Cramer:

$$-l_i^1 = \frac{\begin{vmatrix} l_{i1} & g_{21} \\ l_{i2} & g_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}} = \frac{l_{i1}g_{22} - l_{i2}g_{21}}{g}, \quad i = 1,2$$

$$-l_i^2 = \frac{\begin{vmatrix} g_{11} & l_{i1} \\ g_{12} & l_{i2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}} = \frac{l_{i2}g_{11} - l_{i1}g_{12}}{g}, \quad i = 1,2 \qquad (*)$$

Por tanto, se verifican la ecuaciones

$$\vec{N}_1 = \frac{l_{11}g_{22} - l_{12}g_{21}}{g}\vec{r}_1 + \frac{l_{12}g_{11} - l_{11}g_{12}}{g}\vec{r}_2$$
$$\vec{N}_2 = \frac{l_{21}g_{22} - l_{22}g_{21}}{g}\vec{r}_1 + \frac{l_{22}g_{11} - l_{21}g_{12}}{g}\vec{r}$$

Las ecuaciones de Weingarten, por tanto, nos dan las derivadas parciales del vector normal en cada punto como combinación lineal de los vectores tangentes, $\vec{r}_1, \vec{r}_2$, con las coordenadas en función de los coeficientes de las dos formas fundamentales.

La igualdad de las derivadas segundas de los vectores tangentes

Hemos visto en los dos apartados anteriores que las Ecuaciones de Gauss nos dan las derivadas parciales de los vectores tangentes como combinación lineal de los vectores de la base del espacio tridimensional constituida por triedro móvil $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{N}\}$, y las Ecuaciones de Weingarten nos dan las derivadas parciales del vector normal también como combinación lineal de dichos vectores. Los coeficientes, en el primer caso quedan expresados en función de los símbolos de Christoffel de 2ª especie y coeficientes de la segunda forma fundamental, y en el caso de las ecuaciones de Weingarten, en función de los coeficientes de ambas formas fundamentales.

Si consideramos la igualdad de las derivadas segundas, $\vec{r}_{ijk}$ y $\vec{r}_{ikj}$, podemos obtener, al identificar coeficientes, dos conjuntos de ecuaciones que llamaremos Ecuaciones de Gauss-Codazzi y Ecuaciones de Codazzi-Mainardi, que nos permitirán ya evidenciar la afirmación del Teorema Egregio.

Partimos de la expresión $\vec{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^{m}\vec{r}_m + l_{ij}\vec{N}, \quad i,j = 1,2$. Así, derivando la expresión de $\vec{r}_{ij}$ con respecto a u_k, se tiene:

$$\vec{r}_{ijk} = \frac{\partial \vec{r}_{ij}}{\partial u_k} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{m}}{\partial u_k}\vec{r}_m + \Gamma_{ij}^{m}\frac{\partial \vec{r}_m}{\partial u_k} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}.\vec{N} + l_{ij}\frac{\partial \vec{N}}{\partial u_k} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{m}}{\partial u_k}\vec{r}_m + \Gamma_{ij}^{m}.\vec{r}_{mk} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}.\vec{N} + l_{ij}.\vec{N}_k =$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{ij}^{m}}{\partial u_k}\vec{r}_m + \Gamma_{ij}^{m}\left(\Gamma_{mk}^{n}\vec{r}_n + l_{mk}.\vec{N}\right) + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}.\vec{N} + l_{ij}.\left(-l_k^n.\vec{r}_n\right) =$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{ij}^{n}}{\partial u_k}\vec{r}_n + \Gamma_{ij}^{m}\left(\Gamma_{mk}^{n}\vec{r}_n + l_{mk}.\vec{N}\right) + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}.\vec{N} + l_{ij}.\left(-l_k^n.\vec{r}_n\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^{n}}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^{m}.\Gamma_{mk}^{n} - l_{ij}l_k^n\right).\vec{r}_n + \left(\Gamma_{ij}^{m}l_{mk} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}\right).\vec{N}$$

Y obtenemos en definitiva para la expresión de $\vec{r}_{ijk}$:

$$\vec{r}_{ijk} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^{n}}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^{m}.\Gamma_{mk}^{n} - l_{ij}l_k^n\right).\vec{r}_n + \left(\Gamma_{ij}^{m}l_{mk} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k}\right).\vec{N}$$

Por analogía, la expresión de $\vec{r}_{ikj}$ será:

$$\vec{r}_{ikj} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^{n}}{\partial u_j} + \Gamma_{ik}^{m}.\Gamma_{mj}^{n} - l_{ik}l_j^n\right).\vec{r}_n + \left(\Gamma_{ik}^{m}l_{mj} + \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}\right).\vec{N}$$

Igualando ambas expresiones:

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^{n}}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^{m}.\Gamma_{mk}^{n} - l_{ij}l_k^n - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{n}}{\partial u_j} - \Gamma_{ik}^{m}.\Gamma_{mj}^{n} + l_{ik}l_j^n\right).\vec{r}_n + \left(\Gamma_{ij}^{m}l_{mk} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \Gamma_{ik}^{m}l_{mj} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j}\right).\vec{N} = 0 \quad (**)$$

Las Ecuaciones de Codazzi-Mainardi

Se obtienen de igualar a cero el coeficiente del vector normal en (**):

$$\Gamma_{ij}^{m}l_{mk} - \Gamma_{ik}^{m}l_{mj} + \frac{\partial l_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial l_{ik}}{\partial u_j} = 0$$

Estas ecuaciones son idénticamente nulas si $j=k$.

Por otra parte, resulta la misma ecuación si *j=1, k=2,* que si *j=2, k=1*. Esto quiere decir que solamente hay dos ecuaciones:

$$\Gamma_{i2}^{m} l_{m1} - \Gamma_{i1}^{m} l_{m2} + \frac{\partial l_{i2}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{i1}}{\partial u_2} = 0$$

Para *i=1*: $$\Gamma_{12}^{m} l_{m1} - \Gamma_{11}^{m} l_{m2} + \frac{\partial l_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{11}}{\partial u_2} = 0$$

Para *i=2*: $$\Gamma_{22}^{m} l_{m1} - \Gamma_{21}^{m} l_{m2} + \frac{\partial l_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial l_{21}}{\partial u_2} = 0$$

(Ecuaciones de Codazzi-Mainardi)

Las ecuaciones de Gauss-Codazzi

Se obtienen al igualar a cero los coeficientes de los vectores básicos en (**):

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^{n}}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^{m}.\Gamma_{mk}^{n} - l_{ij} l_k^n - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{n}}{\partial u_j} - \Gamma_{ik}^{m}.\Gamma_{mj}^{n} + l_{ik} l_j^n = 0$$

Así, el coeficiente del vector $\vec{r}_1$:

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^{m}.\Gamma_{mk}^{1} - l_{ij} l_k^1 - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{1}}{\partial u_j} - \Gamma_{ik}^{m}.\Gamma_{mj}^{1} + l_{ik} l_j^1 = 0$$

o bien:

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{1}}{\partial u_j} + \Gamma_{ij}^{m}.\Gamma_{mk}^{1} - \Gamma_{ik}^{m}.\Gamma_{mj}^{1} = l_{ij} l_k^1 - l_{ik} l_j^1$$

Y el coeficiente del vector $\vec{r}_2$:

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^{2}}{\partial u_k} + \Gamma_{ij}^{m}.\Gamma_{mk}^{2} - l_{ij} l_k^2 - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{2}}{\partial u_j} - \Gamma_{ik}^{m}.\Gamma_{mj}^{2} + l_{ik} l_j^2 = 0$$

O bien:

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^{2}}{\partial u_k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{2}}{\partial u_j} + \Gamma_{ij}^{m}.\Gamma_{mk}^{2} - \Gamma_{ik}^{m}.\Gamma_{mj}^{2} = l_{ij} l_k^2 - l_{ik} l_j^2$$

Se tienen, en definitiva, las ecuaciones de Gauss-Codazzi:

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^{1}}{\partial u_k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{1}}{\partial u_j} + \Gamma_{ij}^{m}.\Gamma_{mk}^{1} - \Gamma_{ik}^{m}.\Gamma_{mj}^{1} = l_{ij} l_k^1 - l_{ik} l_j^1$$

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^{2}}{\partial u_k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{2}}{\partial u_j} + \Gamma_{ij}^{m}.\Gamma_{mk}^{2} - \Gamma_{ik}^{m}.\Gamma_{mj}^{2} = l_{ij} l_k^2 - l_{ik} l_j^2$$

El Teorema egregium

La curvatura total K depende exclusivamente de los coeficientes de la primera forma fundamental y de sus derivadas.

Demostración:

Si hacemos en las ecuaciones de Gauss-Codazzi *i=2, j=1, k=2*, se tiene:

$$\frac{\partial\Gamma_{21}^{1}}{\partial u_2}-\frac{\partial\Gamma_{22}^{1}}{\partial u_1}+\Gamma_{21}^{m}.\Gamma_{m2}^{1}-\Gamma_{22}^{m}.\Gamma_{m1}^{1}=l_{21}l_2^1-l_{22}l_1^1$$

$$\frac{\partial\Gamma_{21}^{2}}{\partial u_2}-\frac{\partial\Gamma_{22}^{2}}{\partial u_1}+\Gamma_{21}^{m}.\Gamma_{m2}^{2}-\Gamma_{22}^{m}.\Gamma_{m1}^{2}=l_{21}l_2^2-l_{22}l_1^2$$

Sustituyendo los coeficientes l_2^1, l_1^1 en la primera, y l_2^2, l_1^2 en la segunda, por las expresiones que figuran en las ecuaciones de Weingarten (*), se tiene que

$$\frac{\partial\Gamma_{21}^{1}}{\partial u_2}-\frac{\partial\Gamma_{22}^{1}}{\partial u_1}+\Gamma_{21}^{m}.\Gamma_{m2}^{1}-\Gamma_{22}^{m}.\Gamma_{m1}^{1}=l_{21}\frac{l_{21}g_{22}-l_{22}g_{21}}{g}-l_{22}\frac{l_{11}g_{22}-l_{12}g_{21}}{g}=-g_{22}\frac{l_{11}l_{22}-l_{12}^2}{g}=-g_{22}\frac{l}{g}$$

$$\frac{\partial\Gamma_{21}^{2}}{\partial u_2}-\frac{\partial\Gamma_{22}^{2}}{\partial u_1}+\Gamma_{21}^{m}.\Gamma_{m2}^{2}-\Gamma_{22}^{m}.\Gamma_{m1}^{2}=l_{21}\frac{l_{22}g_{11}-l_{21}g_{12}}{g}-l_{22}\frac{l_{12}g_{11}-l_{11}g_{12}}{g}=g_{11}\frac{l_{11}l_{22}-l_{12}^2}{g}=g_{11}\frac{l}{g}$$

Es decir, se cumple que

$$\frac{\partial\Gamma_{21}^{1}}{\partial u_2}-\frac{\partial\Gamma_{22}^{1}}{\partial u_1}+\Gamma_{21}^{m}.\Gamma_{m2}^{1}-\Gamma_{22}^{m}.\Gamma_{m1}^{1}=-g_{22}\frac{l}{g}$$

$$\frac{\partial\Gamma_{21}^{2}}{\partial u_2}-\frac{\partial\Gamma_{22}^{2}}{\partial u_1}+\Gamma_{21}^{m}.\Gamma_{m2}^{2}-\Gamma_{22}^{m}.\Gamma_{m1}^{2}=g_{11}\frac{l}{g}$$

y puesto que la curvatura total es $K=\frac{l}{g}$, podemos expresar, desde cualquiera de las dos ecuaciones:

$$K=-\frac{1}{g_{22}}\left[\frac{\partial\Gamma_{21}^{1}}{\partial u_2}-\frac{\partial\Gamma_{22}^{1}}{\partial u_1}+\Gamma_{21}^{m}.\Gamma_{m2}^{1}-\Gamma_{22}^{m}.\Gamma_{m1}^{1}\right]$$
$$K=\frac{1}{g_{11}}\left[\frac{\partial\Gamma_{21}^{2}}{\partial u_2}-\frac{\partial\Gamma_{22}^{2}}{\partial u_1}+\Gamma_{21}^{m}.\Gamma_{m2}^{2}-\Gamma_{22}^{m}.\Gamma_{m1}^{2}\right]$$

Esto nos dice que la curvatura total depende de la métrica g (coeficientes de la primera forma fundamental) y de los símbolos de Christoffel de 2ª especie, los cuales dependen también de la métrica g y de sus derivadas.