

Acerca de la matemática de la ecuación de Dirac

Una introducción breve

0. Introducción. En busca de una ecuación de movimiento:

La descripción de la evolución temporal de los sistemas físicos en el espacio-tiempo exige una formulación matemática que relacione la derivada temporal de las variables que caracterizan su estado con aquellas magnitudes físicas que pueden provocar sus cambios. Tal formulación matemática es lo que se denomina *ecuación de movimiento* del sistema.

Así, en las diferentes desarrollos de la mecánica podemos encontrar ejemplos de formulación de la ecuación de movimiento de una partícula.

- **En la mecánica clásica no relativista (Galileo-Newton):**

$$m \frac{d^2 x^k}{dt^2} = F^k, \quad k = 1, 2, 3$$

- **En la mecánica clásica relativista (Einstein):**

$$m \frac{\partial^2 x^k}{\partial \tau^2} + m \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial \tau} \frac{\partial x^j}{\partial \tau} = F^k$$

En un espacio-tiempo plano $\Gamma_{ij}^k = 0$, y si la velocidad de la partícula es muy pequeña en comparación con la velocidad de la luz, $v \ll c$, entonces en tal caso la ecuación de movimiento del caso relativista se reduce a la ecuación clásica no relativista de Galileo-Newton.

- **En la mecánica cuántica no relativista (Schrödinger):**

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left(\frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla})^2 + U(\vec{r}, t) \right) \Psi(\vec{r}, t)$$

Partiendo de la expresión clásica de la energía en la formulación newtoniana de la mecánica:

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + V(\vec{r}, t)$$

Se deduce de inmediato la ecuación de movimiento de una partícula sin más que usar los operadores de onda de la energía y el momento lineal:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + V(\vec{r}, t) \rightarrow \hat{E} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + V(\vec{r}, t) \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left(\frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla})^2 + V(\vec{r}, t) \right) \Psi(\vec{r}, t)$$

- **En la mecánica cuántica relativista (Dirac):**

Hemos de partir ahora de la expresión de la energía en la mecánica clásica relativista:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

Al sustituir los operadores de onda correspondientes a la energía y el momento se habría de obtener una ecuación lineal como la ecuación de movimiento de la partícula, sin embargo, ocurre que al sustituir ambos operadores, aparece la expresión cuadrática siguiente, con la raíz cuadrada de una suma de cuadrados:

$$\hat{E} = \sqrt{m_0^2 c^4 + \hat{p}^2 c^2} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left(\sqrt{(m_0 c^2)^2 + (-i\hbar \vec{\nabla})^2 c^2} \right) \Psi(\vec{r}, t)$$

que obviamente no es una ecuación lineal.

El primer matemático en intentar obtener a partir de la expresión anterior una ecuación lineal como ecuación de movimiento de la partícula, fue Paul A.M. Dirac (1902-1984), logrando explicitarla en 1928, con unas consecuencias inesperadas para el desarrollo de la física posterior.

En las notas que siguen tratamos de exponer un proceso elemental de obtención de la ecuación de Dirac

1. Obtención de la ecuación de Dirac:

Energía relativista en términos del momento de una partícula libre de masa m y cantidad de movimiento $\vec{p}$:

De ser

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$E = mc^2$$

$$\text{con } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad \vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$$

se tiene:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

multiplicando por la velocidad de la luz, c , y elevando al cuadrado:

$$\begin{aligned}
(\vec{p}c)^2 &= \vec{p}^2 c^2 = \frac{m_0^2 \vec{v}^2 c^2}{1 - \left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2} = \frac{m_0^2 \frac{\vec{v}^2}{c^2} c^4}{1 - \left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2} = \frac{m_0^2 c^4 \left[\frac{\vec{v}^2}{c^2} - 1\right]}{1 - \left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2} + \frac{m_0^2 c^4}{1 - \left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2} = \\
&= -m_0^2 c^4 + m^2 c^4 = -m_0^2 c^4 + (mc^2)^2 = -m_0^2 c^4 + E^2 \rightarrow E^2 = m_0^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2
\end{aligned}$$

Resulta, por tanto:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$$

Como puede observarse, la relación entre la energía E y el momento $\vec{p}$ es cuadrática. La energía se expresa como la raíz cuadrada de una suma de dos cuadrados. Dirac se preguntó si no existiría alguna manera de obtener una relación lineal entre la energía y el momento $\vec{p}$. Es decir, si no existiría alguna expresión del tipo

$$E = \alpha \vec{p} + \beta$$

El proceso lo inicia tratando de escribir la raíz cuadrada de la suma de los dos cuadrados como una expresión lineal, usando los adecuados parámetros.

Así, suponiendo inicialmente y por simplicidad, que la partícula del estudio se desplaza en la dirección del eje x_1 de referencia, con velocidad $\vec{v} = (v_1, 0, 0)$, tendrá el momento lineal $\vec{p} = (p_1, 0, 0)$, por lo que la expresión de la energía sería:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (\vec{p}c)^2}$$

que podemos linealizar mediante la introducción de dos parámetros, α_0 y α_1 :

$$E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (\vec{p}c)^2} = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (p_1 c)^2} = \alpha_0 m_0 c^2 + \alpha_1 p_1 c$$

y los parámetros α_0 y α_1 introducidos podrían obtenerse de la igualdad

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + (\vec{p}c)^2 = (\alpha_0 m_0 c^2 + \alpha_1 p_1 c)^2 = \alpha_0^2 (m_0 c^2)^2 + \alpha_1^2 (p_1 c)^2 + 2\alpha_0 \alpha_1 m_0 c^2 p_1 c$$

Al identificar para obtener el valor de los parámetros vemos que éstos han de cumplir que

$$\alpha_0^2 = 1, \alpha_1^2 = 1, \alpha_0 \alpha_1 = 0$$

lo cual, obviamente, es imposible si hablamos de números reales o complejos y en general de estructuras algebraicas multiplicativamente conmutativas.

La idea que surge de esta dificultad es que, si tales parámetros α_0 y α_1 existieran, habrían de ser objetos de una estructura algebraica no conmutativa, pues entonces sería

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + (\vec{p}c)^2 = (\alpha_0 m_0 c^2 + \alpha_1 p_1 c)^2 = \alpha_0^2 (m_0 c^2)^2 + \alpha_1^2 (p_1 c)^2 + (\alpha_0 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_0) m_0 c^2 p_1 c$$

y podría ser posible que

$$\alpha_0^2 = 1, \alpha_1^2 = 1, \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_0 = 0 \quad [1]$$

Solo se conocía como estructura no conmutativa para el producto el anillo de las matrices cuadradas, por lo que Dirac pensó que los parámetros introducidos podrían ser matrices.

Trató entonces de encontrar matrices que verificaran la condición [1]. Comprobó que no existen matrices de orden 2 ni de orden 3 que verifiquen tal condición.

Pero al probar con matrices cuadradas de orden 4 encontró varias matrices elementales que verificaban por pares la condición [1]. Por ejemplo, las matrices

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pues como puede comprobarse, verifican

$$\alpha_0^2 = I, \alpha_1^2 = I, \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_0 = \Theta$$

(I : matriz identidad, Θ : matriz nula)

Es decir, definiendo el anticonmutador de dos matrices α_j y α_k como

$$[\alpha_j, \alpha_k] = \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j$$

se cumplirá:

$$[\alpha_j, \alpha_k] = 2\delta_{jk} I$$

(donde δ_{jk} es la delta de Kronecker de dos índices e I es la matriz identidad)

Se verifica, en definitiva, que

$$E.I = \alpha_0 m_0 c^2 + \alpha_1 p_1 c$$

Ecuación matricial, que usando las matrices elementales del ejemplo anteriormente indicado, es

$$E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = m_0 c^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + p_1 c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

o sea:

$$E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pc & 0 & 0 & m_0 c^2 \\ 0 & pc & m_0 c^2 & 0 \\ 0 & m_0 c^2 & -pc & 0 \\ m_0 c^2 & 0 & 0 & -pc \end{pmatrix}$$

2. Resolución e interpretación:

Para obtener los valores correspondientes de la energía de la partícula calculamos los autovalores de la matriz de Dirac, y para describir el estado de la partícula en cada uno de estos valores de energía determinaremos los correspondientes autovectores asociados.

- Autovalores:

$$E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pc & 0 & 0 & m_0 c^2 \\ 0 & pc & m_0 c^2 & 0 \\ 0 & m_0 c^2 & -pc & 0 \\ m_0 c^2 & 0 & 0 & -pc \end{pmatrix} \rightarrow E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} pc & 0 & 0 & m_0 c^2 \\ 0 & pc & m_0 c^2 & 0 \\ 0 & m_0 c^2 & -pc & 0 \\ m_0 c^2 & 0 & 0 & -pc \end{pmatrix} = 0$$

o sea:

$$\begin{vmatrix} pc-E & 0 & 0 & m_0 c^2 \\ 0 & pc-E & m_0 c^2 & 0 \\ 0 & m_0 c^2 & -pc-E & 0 \\ m_0 c^2 & 0 & 0 & -pc-E \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (pc-E) \begin{vmatrix} pc-E & m_0 c^2 & 0 \\ m_0 c^2 & -pc-E & 0 \\ 0 & 0 & -pc-E \end{vmatrix} -$$

$$-m_0 c^2 \begin{vmatrix} 0 & pc-E & m_0 c^2 \\ 0 & m_0 c^2 & -pc-E \\ m_0 c^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(pc-E)(pc+E) \begin{vmatrix} pc-E & m_0 c^2 \\ m_0 c^2 & -pc-E \end{vmatrix} - m_0^2 c^4 \begin{vmatrix} pc-E & m_0 c^2 \\ m_0 c^2 & -pc-E \end{vmatrix} =$$

$$= -(pc-E)(pc+E) - m_0^2 c^4 \begin{vmatrix} pc-E & m_0 c^2 \\ m_0 c^2 & -pc-E \end{vmatrix} = [-(p^2 c^2 - E^2 + m_0^2 c^4)][-(p^2 c^2 - E^2 + m_0^2 c^4)] = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow p^2 c^2 - E^2 + m_0^2 c^4 = 0 \rightarrow E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \rightarrow \begin{cases} E_1 = +\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \\ E_2 = -\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \end{cases}$$

Encontramos dos estados de energía:

$$E_1 = +\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} > 0$$

$$E_2 = -\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} < 0$$

- Autovectores asociados a cada estado de energía:

- Autovectores asociados al autovalor $E_1 = +\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} > 0$:

$$\begin{pmatrix} pc - E_1 & 0 & 0 & m_0 c^2 \\ 0 & pc - E_1 & m_0 c^2 & 0 \\ 0 & m_0 c^2 & -pc - E_1 & 0 \\ m_0 c^2 & 0 & 0 & -pc - E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

Ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} (pc - E_1)x_1 + m_0 c^2 x_4 &= 0 \\ (pc - E_1)x_2 + m_0 c^2 x_3 &= 0 \\ m_0 c^2 x_2 - (pc + E_1)x_3 &= 0 \\ m_0 c^2 x_1 - (pc + E_1)x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} (pc - E_1)x_1 + m_0 c^2 x_4 &= 0 \\ m_0 c^2 x_2 - (pc + E_1)x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} x_4 &= -\frac{pc - E_1}{m_0 c^2} x_1 \\ x_3 &= \frac{m_0 c^2}{pc + E_1} x_2 \end{aligned}$$

haciendo $x_1 = \alpha, x_2 = \beta$:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \frac{m_0 c^2}{pc + E_1} \beta \\ -\frac{pc - E_1}{m_0 c^2} \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{pc - E_1}{m_0 c^2} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{m_0 c^2}{pc + E_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Base de autovectores:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{pc - E_1}{m_0 c^2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{m_0 c^2}{pc + E_1} \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \equiv \left\{ \frac{1}{m_0 c^2} \begin{bmatrix} m_0 c^2 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 - pc \end{bmatrix}, \frac{1}{pc + E_1} \begin{bmatrix} 0 \\ pc + E_1 \\ m_0 c^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

o sea:

$$\left\{ \frac{1}{m_0 c^2} \begin{bmatrix} m_0 c^2 \\ 0 \\ 0 \\ -pc + \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \end{bmatrix}, \frac{1}{pc + \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}} \begin{bmatrix} 0 \\ pc + \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \\ m_0 c^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

- Autovectores asociados al autovalor $E_2 = -\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} < 0$:

$$\begin{pmatrix} pc - E_2 & 0 & 0 & m_0 c^2 \\ 0 & pc - E_2 & m_0 c^2 & 0 \\ 0 & m_0 c^2 & -pc - E_2 & 0 \\ m_0 c^2 & 0 & 0 & -pc - E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

Planteando las mismas ecuaciones y eliminando, como en el caso anterior las ecuaciones equivalentes, se tiene la base de autovectores:

$$\left\{ \frac{1}{m_0 c^2} \begin{bmatrix} m_0 c^2 \\ 0 \\ 0 \\ -pc - \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \end{bmatrix}, \frac{1}{pc - \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}} \begin{bmatrix} 0 \\ pc - \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \\ m_0 c^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

La interpretación de Dirac:

- Con respecto a los autovalores:

La ecuación matricial construida muestra que para toda partícula de masa m y energía E_1 existe siempre otra partícula de la misma masa y energía E_2 opuesta (para toda partícula existe una antipartícula)

- Con respecto a los autovectores:

Tanto la partícula de energía E_1 como la antipartícula de energía E_2 opuesta vienen descritas por dos autovectores que cumplen las reglas del spin. Se trata de los estados de spin de la partícula y la antipartícula.

3. Expresión con los operadores cuánticos de energía y momento sobre la función de onda:

Si escribimos la ecuación obtenida por Dirac introduciendo estas matrices elementales en términos de los operadores cuánticos de onda:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}$$

se tendrá:

$$\begin{aligned} E.I &= \alpha_0 m_0 c^2 + \alpha_1 p_1 c \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \alpha_0 m_0 c^2 \Psi(\vec{r}, t) - \alpha_1 i\hbar c \frac{\partial}{\partial x_1} \Psi(\vec{r}, t) \rightarrow \\ &\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left(\alpha_0 m_0 c^2 - \alpha_1 i\hbar c \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

donde $\alpha_0 m_0 c^2 - \alpha_1 i\hbar c \frac{\partial}{\partial x}$ es el *hamiltoniano de Dirac* en una dimensión.

El carácter matricial de la ecuación nos indica que la función de onda no tiene carácter escalar sino que es un objeto de cuatro componentes que varía en las traslaciones y también en las rotaciones de la partícula. Es lo que se denomina *espinor*:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\vec{r}, t) \\ \Psi_2(\vec{r}, t) \\ \Psi_3(\vec{r}, t) \\ \Psi_4(\vec{r}, t) \end{pmatrix}$$

4. Generalización:

En el caso general de que la partícula en estudio se desplaza en una dirección cualquiera, no necesariamente en la dirección de uno de los ejes del sistema de referencia, la energía relativista se escribiría en la forma

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (\vec{p}c)^2} = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (p_1 c)^2 + (p_2 c)^2 + (p_3 c)^2} = \\ &= \alpha_0 m_0 c^2 + \alpha_1 p_1 c + \alpha_2 p_2 c + \alpha_3 p_3 c \end{aligned}$$

y como ha de cumplirse que

$$(m_0 c^2)^2 + (p_1 c)^2 + (p_2 c)^2 + (p_3 c)^2 = (\alpha_0 m_0 c^2 + \alpha_1 p_1 c + \alpha_2 p_2 c + \alpha_3 p_3 c)^2$$

tendrá que verificarse que

$$\begin{aligned} \alpha_0^2 &= \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 1 \\ \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_0 &= 0, \quad \alpha_0 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_0 = 0, \quad \alpha_0 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_0 = 0, \\ \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 &= 0, \quad \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

que podemos expresar de una forma más compacta usando el anticonmutador:

$$[\alpha_j, \alpha_k] = 2\delta_{jk} I, \quad j, k = 0, 1, 2, 3$$

Dirac encontró varios ejemplos de matrices elementales que verifican esta condición. Uno de estos ejemplos es el siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \alpha_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En definitiva, la ecuación general de Dirac es:

$$E = \alpha_0 m_0 c^2 + \alpha_1 p_1 c + \alpha_2 p_2 c + \alpha_3 p_3 c = \alpha_0 m_0 c^2 + c \sum_{k=1}^3 \alpha_k p_k$$

O bien, en la notación de operadores sobre la función de onda:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left(\alpha_0 m_0 c^2 - i\hbar c \sum_{k=1}^3 \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \Psi(\vec{r}, t)$$

que en forma más compacta es:

$$\left[i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \sum_{k=1}^3 \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) - \alpha_0 m_0 c^2 \right] \Psi(\vec{r}, t) = 0$$

o también:

$$\left[i \frac{\hbar \alpha_0^{-1}}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \sum_{k=1}^3 \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) - m_0 \right] \Psi(\vec{r}, t) = 0$$

y si llamamos

$$\partial = \frac{\hbar \alpha_0^{-1}}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \sum_{k=1}^3 \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$$

obtenemos la forma popularizada de la ecuación:

$$(i\partial - m_0) \Psi(\vec{r}, t) = 0$$

Bibliografía:

- Bransden, B.H.; Joachain, C.J.; *Quantum Mechanics*, Prentice Hall; 2000
 Dirac, P. A. M.; *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press; 1958
 Griffiths, David J.; *Introduction to Quantum Mechanics*, Benjamin Cummings; 2004
 Halliday, David; *Fundamentals of Physics*, Wiley; 2007
 Landau & Lifshitz; *Mecánica*, Ed. Reverté, Barcelona; 1966.
 Landau & Lifshitz; *Teoría clásica de los campos*, Ed. Reverté, Barcelona; 1966
 Lawden, F.; *The Mathematical Principles of Quantum Mechanics*, Dover; 2005
 Liboff, Richard; *Introductory Quantum Mechanics*, Addison Wesley; 2002
 Penrose, Roger; *El camino a la realidad*, Mondadori; 2006
 Schrödinger, Erwin; «An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules». *Phys. Rev*; 1926
 Serway, R.A.; Moses, C.J.; Moyer, C.A.; *Modern Physics*, Brooks Cole; 2004
 Shankar, R.; *Principles of Quantum Mechanics*, Plenum; 1994
 Teschl, Gerald; *Mathematical Methods in Quantum Mechanics; With Applications to Schrödinger Operators*, American Mathematic Society; 2009