FÓRMULA PARA LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES (REALES) NO HOMOGÉNEAS DE ORDEN $n \geq 2$.

Autor: Carlos Barrios
Licenciado en Educación Mención Física y Matemáticas
Egresado de la Universidad de Los Andes. Venezuela
E-mail: cjb_121@hotmail.com

Una rama de especial importancia dentro del campo de las matemáticas, es la que se refiere a las ecuaciones diferenciales. Éstas tienen la particularidad de que tienen aplicaciones inmediatas en lo que se refiere a la solución de algunos problemas del mundo real y logran explicar con precisión muchos procesos de la naturaleza.

En la enseñanza de materias que tienen que ver con carreras como por ejemplo ciencias, ingeniería, economía, las ecuaciones diferenciales son de carácter obligatorio. Ellas además, nos permiten un mejor entendimiento de los fenómenos físicos que de alguna manera el ser humano, desde tiempos remotos, tiene la intención de entender

Este artículo tiene la intención de, principalmente, ilustrar para luego sugerir, la aplicación de una fórmula alternativa para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes (reales) constantes no homogéneas, cuyo orden sea mayor o igual a 2, vistas desde la perspectiva del método de variación de parámetro, que nos lleva a largos sistemas de ecuaciones, en la medida en que el orden aumenta, convirtiéndose la resolución de dichos sistemas en un proceso tedioso. Además, se presentará un apéndice donde se exponen algunas de las ideas matemáticas "secundarias" que nos servirán para sustentar y argumentar las ideas matemáticas "principales" que se expondrán a continuación.

Para ser más específicos, el caso particular en el que se va a aplicar el método alternativo antes mencionado es cuando la ecuación de índices, de la ecuación diferencial (homogénea) dada, tiene todas sus raíces reales y distintas. El método consiste en una fórmula, que se consiguió valiéndose de dos herramientas tecnológicas; la calculadora de Texas Instruments (TI-92) y el software para matemáticas Maple V (versión 5)[1]. El uso de dichas herramientas tecnológicas más la aplicación de las propiedades de los determinantes, permite ver que el método alternativo resume en gran medida la resolución de tales sistemas de ecuaciones y a la vez, resuelve el problema del cálculo del Wronskiano. El tipo de ecuación diferencial a estudiar es de la forma:

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = R(x) \qquad (1)$$

cuya solución general viene dada por $y = y_c + y_p$, donde y_c es la solución complementaria, y y_p es la solución particular. $R(x)$ es una función de variable real cualquiera, n es el orden de la ecuación diferencial, $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son constantes reales cualesquiera y cuando $R(x) = 0$, se dice que esta ecuación es homogénea y se expresa:

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0 \qquad (2)$$

El método de variación de parámetro nos dice que si

$$y_c = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$$

es la solución general de (2), donde los λ son todos raíces reales distintas, entonces (1) debe tener una solución particular de la forma:

$$y_p = U_1(x) e^{\lambda_1 x} + U_2(x) e^{\lambda_2 x} + \ldots + U_n(x) e^{\lambda_n x} \qquad (3)$$

[1] Maple™ (Producto de Maplesoft) es un programa orientado a la resolución de problemas matemáticos, capaz de realizar cálculos simbólicos, algebraicos y de álgebra computacional. Fue desarrollado originalmente en 1981 por el Grupo de Cálculo Simbólico en la Universidad de Waterloo en Waterloo, Ontario, Canadá.

donde $U_1(x), U_2(x), \ldots, U_n(x)$ son funciones reales de x que se pueden hallar con la ayuda de (1) y (2), tomando en cuenta ciertas condiciones que se imponen sobre algunas relaciones entre las derivadas de dichas funciones. De manera general, el número de condiciones que se imponen es igual al orden de la ecuación diferencial dada menos la unidad, es decir $n-1$ condiciones.

Derivemos la ecuación (3), y se obtiene

$$y_p' = U'_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 U_1(x)e^{\lambda_1 x} + U'_2(x)e^{\lambda_2 x} + \lambda_2 U_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + U'_n(x)e^{\lambda_n x} + \lambda_n U_n(x)e^{\lambda_n x} \tag{4}$$

y es justo aquí en donde se impone la primera condición

$$U'_1(x)e^{\lambda_1 x} + U'_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + U'_n(x)e^{\lambda_n x} = 0 \tag{C.1}$$

de manera que la ecuación (4) queda expresada en

$$y_p' = \lambda_1 U_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 U_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + \lambda_n U_n(x)e^{\lambda_n x} \tag{5}$$

Nuevamente, derivando (5), obtenemos la expresión

$$y_p'' = \lambda_1 U'_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 U_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 U'_2(x)e^{\lambda_2 x} + \lambda_2^2 U_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + \lambda_n U'_n(x)e^{\lambda_n x} + \lambda_n^n U_n(x)e^{\lambda_n x} \tag{6}$$

entonces surge la segunda condición

$$\lambda_1 U'_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 U'_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + \lambda_n U'_n(x)e^{\lambda_n x} = 0 \tag{C.2}$$

y así la segunda derivada, la ecuación (6) se expresa

$$y_p'' = \lambda_1^2 U_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 U_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + \lambda_n^n U_n(x)e^{\lambda_n x} \tag{7}$$

Repitiendo este mismo proceso, llegaríamos a un punto en donde se obtendría la $n-1$ derivada

$$y_p^{(n-1)} = \lambda_1^{n-2}U'_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^{n-1}U_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^{n-2}U'_2(x)e^{\lambda_2 x} + \lambda_2^{n-1}U_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + \lambda_n^{n-2}U'_n(x)e^{\lambda_n x} + \lambda_n^{n-1}U_n(x)e^{\lambda_n x} \quad (8)$$

apareciendo finalmente, la $n-1$ condición

$$\lambda_1^{n-2}U'_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^{n-2}U'_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + \lambda_n^{n-2}U'_n(x)e^{\lambda_n x} = 0 \quad \text{(C.n-1)}$$

Luego, la $n-1$ derivada resulta de la forma

$$y_p^{(n-1)} = \lambda_1^{n-1}U_1(x) + \lambda_2^{n-1}U_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + \lambda_n^{n-1}U_n(x)e^{\lambda_n x} \quad (9)$$

De esta última ecuación se halla la n – ésima derivada

$$y_p^{(n)} = \lambda_1^{n-1}U'_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^{n}U_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^{n-1}U'_2(x)e^{\lambda_2 x} + \lambda_2^{n}U_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + \lambda_n^{n-1}U'_n(x)e^{\lambda_n x} + \lambda_n^{n}U_n(x)e^{\lambda_n x}$$

y sustituyendo todas las derivadas resultantes después de imponer las condiciones, en la ecuación (1), y teniendo en cuenta que todos los λ son raíces distintas de la ecuación de índices para la misma ecuación diferencial homogénea (2), resulta

$$\lambda_1^{n-1}U'_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^{n-1}U'_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + \lambda_n^{n-1}U'_n(x)e^{\lambda_n x} = R(x) \quad (10)$$

El sistema de ecuaciones resultante entre esta última ecuación (10) más las otras respectivas a las condiciones impuestas, para hallar a $U'_1(x)$, $U'_2(x)$, …, $U'_n(x)$, al utilizar el método de Cramer, originan determinantes de dimensión n bastante extensos, cuya resolución requiere de un trabajo laborioso si se realiza sin la ayuda de algún dispositivo tecnológico. Luego de resolver los determinantes para luego hallar las funciones $U_1(x), U_2(x), \ldots, U_n(x)$, la solución general de la ecuación (1), viene dada por la suma de la solución general más la solución particular, es decir

$$y = y_c + y_p$$

Estudiar casos más sencillos: cuando $n = 2$ y cuando $n = 3$.

En lo que se refiere a la fórmula, es conveniente analizar primeramente el tipo de ecuación diferencial que se está estudiando cuando es de segundo y tercer orden ($n = 2$ y $n = 3$), para que el lector se vaya familiarizando, y desarrollando la intuición que le permita comprender la naturaleza de dicha fórmula. A continuación, la ecuación diferencial cuando $n = 2$ es de la forma

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = R(x) \tag{11}$$

donde $R(x)$ es una función real cualquiera y a_1, a_2 son constantes reales cualesquiera. La ecuación homogénea asociada a (11) es

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0 \tag{12}$$

Es conveniente remarcar que, las raíces de la ecuación de índices son todas reales y distintas. Si se utiliza el método de variación de parámetro, la solución general de (11) es $y_c = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, por lo que la solución particular viene dada por

$$y_p = U_1(x) e^{\lambda_1 x} + U_2(x) e^{\lambda_2 x} \tag{13}$$

teniendo en cuenta que $U_1(x), U_2(x)$ son funciones reales. Si se deriva (13) se obtiene

$$y_p{}' = U'_1(x) e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 U_1(x) e^{\lambda_1 x} + U'_2(x) e^{\lambda_2 x} + \lambda_2 U_2(x) e^{\lambda_2 x} \tag{14}$$

Como se expuso antes, surge la primera condición:

$$U'_1(x) e^{\lambda_1 x} + U'_2(x) e^{\lambda_2 x} = 0 \tag{C.1}$$

entonces la primera derivada resulta

$$y_p{}' = \lambda_1 U_1(x) e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 U_2(x) e^{\lambda_2 x} \tag{15}$$

Si derivamos esta ecuación para obtener la segunda derivada se obtiene

$$y_p{}'' = \lambda_1 U'_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 U_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 U'_2(x)e^{\lambda_2 x} + \lambda_2^2 U_2(x)e^{\lambda_2 x} \qquad (16)$$

Si sustituimos (13), (15) y (16) en (11) obtendremos

$$\lambda_1 U'_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 U'_2(x)e^{\lambda_2 x} = R(x) \qquad (17)$$

Con las ecuaciones (C.1) y (17) generamos el sistema de ecuaciones que en su resolución podemos utilizar el método de Cramer

$$U'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{\lambda_2 x} \\ R(x) & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}} \quad (18) \quad U'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & R(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}} \quad (19)$$

Resolviendo los determinantes e integrando, obtenemos finalmente las soluciones

$$U_1(x) = \int \frac{R(x)e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} dx \quad y \quad U_2(x) = \int \frac{R(x)e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} dx$$

Luego, la solución general para la ecuación diferencial es $y = y_c + y_p$. Es importante señalar dos aspectos, por ejemplo, el determinante que aparece en el denominador en (3) y (4), se conoce como el "Wronskiano"[2], y que la resolución de estas últimas integrales, está supeditada a la integrabilidad de $R(x)e^{\lambda x}$, para las raíces λ distintas.

Cuando $n = 3$, se procede de manera análoga, como se mencionó anteriormente. Tal analogía fue un factor clave que permitió de alguna u otra forma intuir sobre la naturaleza de la fórmula que propone este trabajo. A continuación, cuando $n = 3$, la ecuación a estudiar es

$$y'''(x) + a_1 y''(x) + a_2 y'(x) + a_3 y(x) = R(x) \qquad (20)$$

[2] Józef Maria Hoene - Wroński nació en Polonia, el 23 de agosto de 1776 y murió el 9 de agosto de 1853. Destacó como matemático y conocido también por ser filósofo mesianista, resaltando de igual manera como físico, inventor, jurista y economista.

y utilizando el método de variación de parámetro, la solución particular viene dada por $y_c = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + C_3e^{\lambda_3 x}$, así también la solución particular

$$y_p = U_1(x)e^{\lambda_1 x} + U_2(x)e^{\lambda_2 x} + U_3(x)e^{\lambda_3 x}$$

Procediendo de manera similar al caso anterior, obtenemos las siguientes tres ecuaciones.

Las dos condiciones y la resultante de sustituir las derivadas en (1):

$$U'_1(x)e^{\lambda_1 x} + U'_2(x)e^{\lambda_2 x} + U'_3(x)e^{\lambda_3 x} = 0 \qquad \text{(C.1)}$$

$$\lambda_1 U'_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 U'_2(x)e^{\lambda_2 x} + \lambda_3 U'_3(x)e^{\lambda_3 x} = 0 \qquad \text{(C.2)}$$

$$\lambda_1^2 U'_1(x)e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 U'_2(x)e^{\lambda_2 x} + \lambda_3^2 U'_3(x)e^{\lambda_3 x} = R(x) \qquad (21)$$

y para hallar a $U'_1(x)$, $U'_2(x)$ y $U'_3(x)$, mediante el método de Cramer

$$U'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{\lambda_2 x} & e^{\lambda_3 x} \\ 0 & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_3 e^{\lambda_3 x} \\ R(x) & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3 x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & e^{\lambda_3 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_3 e^{\lambda_3 x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3 x} \end{vmatrix}} \qquad U'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & e^{\lambda_3 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & 0 & \lambda_3 e^{\lambda_3 x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & R(x) & \lambda_3^2 e^{\lambda_3 x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & e^{\lambda_3 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_3 e^{\lambda_3 x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3 x} \end{vmatrix}}$$

$$U'_3(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & 0 \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & R(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & e^{\lambda_3 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_3 e^{\lambda_3 x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3 x} \end{vmatrix}}$$

Ahora bien, para encontrar luego a $U_1(x)$, $U_2(x)$ y $U_3(x)$, sus soluciones vienen dadas por las integrales

$$U_1(x) = \int \frac{R(x)e^{-\lambda_1 x}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}dx \qquad U_2(x) = \int \frac{R(x)e^{-\lambda_2 x}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}dx$$

$$U_3(x) = \int \frac{R(x)e^{-\lambda_3 x}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} dx$$

Halladas entonces las integrales y la solución general, podemos entonces ya conocer la solución a la ecuación diferencial dada, que se expresa como $y = y_c + y_p$. Como se mencionó antes, dichas soluciones dependen de la integrabilidad de $R(x)e^{\lambda x}$, para las raíces λ distintas.

La Fórmula.

Si observamos las integrales resultantes al final del punto anterior, notamos en sus denominadores, el producto de diferencias de lambdas, o las raíces de la ecuación homogénea. Por el hecho de que todas las raíces son distintas, nunca tales denominadores son cero. Notamos también que, por ejemplo para hallar $U_1(x)$, en el denominador aparece el producto de las diferencias de las raíces, pero siempre estando involucrada λ_1 en ambos factores del producto. Tal análisis también aplica para $U_2(x)$ y $U_3(x)$.

Para cuando el orden es igual a cuatro y cinco, usando la calculadora y el software mencionados previamente, se pudo observar el comportamiento de las formas que se obtuvieron para las $U'_j(x)$ como cocientes de determinantes y utilizando las posibilidades de cálculo de estos recursos tecnológicos, se pudo verificar el patrón que inicialmente se suponía, que a su vez permitió la simplificación de algunas operaciones matemáticas. Para las $U'_j(x)$, la fórmula obtenida tiene la forma de

$$U'_j(x) = \frac{R(x)e^{-\lambda_j x}}{\prod_{i=1}^{n}(\lambda_j - \lambda_i)} dx, i \neq j, j = 1, 2, \dots, n$$

y por lo tanto, para las $U_j(x)$

$$U_j(x) = \frac{\int R(x)e^{-\lambda_j x}}{\prod_{i=1}^{n}(\lambda_j - \lambda_i)} dx, i \neq j, j = 1, 2, \dots, n$$

Conviene recordar que, la ecuación diferencial es lineal, de orden n, con coeficientes reales no homogénea, es decir de la forma

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = R(x)$$

en donde la ecuación homogénea asociada viene dada por

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0$$

la cual tiene n raíces distintas, de manera que la solución general de la ecuación diferencial homogénea es

$$y_c = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$$

de donde la solución particular

$$y_p = U_1(x) e^{\lambda_1 x} + U_2(x) e^{\lambda_2 x} + \ldots + U_n(x) e^{\lambda_n x}$$

Por lo tanto, la solución general viene dada por $y = y_c + y_p$. A continuación en la siguiente sección, se resolverán ejercicios mediante el método tradicional y mediante el uso de la fórmula, para hacer las comparaciones respectivas, resaltar las ventajas de dicha fórmula, y para hacer ver al lector su fácil aplicación.

Hallar las $U_1(x)$, $U_2(x)$ y $U_3(x)$ para la ecuación diferencial $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 2\cos x$, $(n = 3)$.

Solución: las raíces de la ecuación de índices son todas reales y distintas; $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$. Entonces se tiene que la solución complementaria viene dada por $y_c = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x}$, lo que a su vez nos indica la solución particular $y_p = U_1(x) e^{x} + U_2(x) e^{-2x} + U_3(x) e^{3x}$. Derivando para obtener las condiciones respectivas, y siguiendo los mismos pasos como se explicó previamente se obtienen

$$U'_1(x) e^{x} + U'_2(x) e^{-2x} + U'_3(x) e^{3x} = 0 \qquad \text{(C.1)}$$

$$U'_1(x) e^{x} - 2U'_2(x) e^{-2x} + 3U'_3(x) e^{3x} = 0 \qquad \text{(C.2)}$$

$$U'_1(x)e^{x} + 4U'_2(x)e^{-2x} + 9U'_3(x)e^{\lambda_3 x} = 2\cos x \tag{22}$$

Tal sistema de ecuaciones, utilizando el método de Cramer, nos permite obtener los siguientes cocientes de determinantes

$$U'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} & e^{3x} \\ 0 & -2e^{-2x} & 3e^{3x} \\ 2\cos x & 4e^{-2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-2x} & e^{3x} \\ e^{x} & -2e^{-2x} & 3e^{3x} \\ e^{x} & 4e^{-2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{-\,e^{-x}\cos x}{3} \qquad U'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{x} & 0 & e^{3x} \\ e^{x} & 0 & 3e^{3x} \\ e^{x} & 2\cos x & 9e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-2x} & e^{3x} \\ e^{x} & -2e^{-2x} & 3e^{3x} \\ e^{x} & 4e^{-2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{2e^{2x}\cos x}{15}$$

$$y \quad U'_3(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-2x} & 0 \\ e^{x} & -2e^{-2x} & 0 \\ e^{x} & 4e^{-2x} & 2\cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-2x} & e^{3x} \\ e^{x} & -2e^{-2x} & 3e^{3x} \\ e^{x} & 4e^{-2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{e^{-3x}\cos x}{5}$$

De donde se pueden hallar a $U_1(x)$, $U_2(x)$ y $U_3(x)$ mediante las integrales

$$U_1(x) = \frac{-\int e^{-x}\cos x\ dx}{3}, \quad U_2(x) = \frac{2\int e^{2x}\cos x\ dx}{15}$$

$$y \quad U_3(x) = \frac{\int e^{-3x}\cos x\ dx}{5}$$

Resultando finalmente

$$U_1(x) = \frac{-e^{-x}(\operatorname{sen} x - \cos x)}{6}, \quad U_2(x) = \frac{2e^{2x}(\operatorname{sen} x + 2\cos x)}{75}$$

$$y \quad U_3(x) = \frac{e^{-3x}(\operatorname{sen} x - 3\cos x)}{50}$$

resulta importante visualizar para el lector que

$$\int e^{-x}\cos x\ dx = \frac{e^{-x}(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2}$$

$$\int e^{2x}\cos x\ dx = \frac{e^{2x}(\operatorname{sen} x + 2\cos x)}{5}$$

$$y \int e^{-3x} \cos x \; dx = \frac{e^{-3x}(\operatorname{sen} x - 3\cos x)}{10}$$

Algunos procedimientos se han omitido[3]. El lector puede hacerse más o menos una idea del trabajo que estos procedimientos requieren y lo extensos que éstos resultan. Veamos entonces como se aplicaría a este problema la fórmula que este trabajo de grado propone. Para tal aplicación, sólo basta conocer las raíces de la ecuación de índices, que en este caso son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2,\ y\ \lambda_3 = 3$.
Aplicando la fórmula se obtiene

$$U_1(x) = \frac{\int e^{-x}(2\cos x)\; dx}{(1-(-2))(1-3)} = \frac{2\int e^{-x}\cos x\; dx}{(3)(-2)} = \frac{-e^{-x}(\operatorname{sen} x - \cos x)}{6}$$

$$U_2(x) = \frac{\int e^{2x}(2\cos x)\; dx}{(-2-1)(-2-3)} = \frac{2\int e^{2x}\cos x\; dx}{(-3)(-5)} = \frac{2e^{2x}(\operatorname{sen} x + 2\cos x)}{75}$$

y finalmente,

$$U_3(x) = \frac{\int e^{-3x}(2\cos x)\; dx}{(3-1)(3-(-2))} = \frac{2\int e^{-3x}\cos x\; dx}{(2)(5)} = \frac{e^{-3x}(\operatorname{sen} x - 3\cos x)}{50}$$

Podemos notar que los resultados coinciden con los del método aplicado anteriormente. La aplicación de dicha fórmula permita llegar a los resultados de manera mucho más simplificada, ahorrándose una gran cantidad de cálculos y procedimientos, lo cual evidentemente resulta en múltiples ventajas, sobre todo para el estudiante. Veamos el ejemplo de cuando $n = 4$.

Hallar las $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ y $U_4(x)$ para la ecuación diferencial $y^{(4)} - 5y'' + 4y = -5e^{-4x}$.

Solución: las raíces de la ecuación de índices son todas reales y distintas; $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2\ y\ \lambda_4 = -2$. Luego la solución complementaria se expresa por $y_c =$

[3] Los procedimientos omitidos tienen que ver propiamente con la derivación (que ya se han expuesto en secciones anteriores), los que tienen que ver con la resolución de los determinantes, y los que tienen que ver con el proceso de integración.

$C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$, sugiriéndose entonces la solución particular $y_p = U_1(x)e^x + U_2(x)e^{-x} + U_3(x)e^{2x} + U_4(x)e^{-2x}$.

Derivando y siguiendo los procedimientos de manera análoga al ejemplo anterior, obtenemos

$$U'_1(x)e^x + U'_2(x)e^{-x} + U'_3(x)e^{2x} + U'_4(x)e^{-2x} = 0 \qquad \text{(C.1)}$$
$$U'_1(x)e^x - U'_2(x)e^{-x} + 2U'_3(x)e^{2x} - 2U'_4(x)e^{-2x} = 0 \qquad \text{(C.2)}$$
$$U'_1(x)e^x + U'_2(x)e^{-x} + 4U'_3(x)e^{2x} + 4U'_4(x)e^{-2x} = 0 \qquad \text{(C.3)}$$
$$U'_1(x)e^x - U'_2(x)e^{-x} + 8U'_3(x)e^{2x} - 8U'_4(x)e^{-2x} = -5e^{-4x} \qquad \text{(23)}$$

El sistema de ecuaciones obtenido permite, de nuevo usando el método de Cramer, construir los siguientes cocientes de determinantes para las derivadas $U'_1(x)$, $U'_2(x)$, $U'_3(x)$ y $U'_4(x)$.

$$U'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} & e^{2x} & e^{-2x} \\ 0 & -e^{-x} & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ 0 & e^{-x} & 4e^{2x} & 4e^{-2x} \\ -5e^{-4x} & -e^{-x} & 8e^{2x} & -8e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} & e^{-2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} & 4e^{-2x} \\ e^x & -e^{-x} & 8e^{2x} & -8e^{-2x} \end{vmatrix}}$$

$$U'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{2x} & e^{-2x} \\ e^x & 0 & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ e^x & 0 & 4e^{2x} & 4e^{-2x} \\ e^x & -5e^{-4x} & 8e^{2x} & -8e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} & e^{-2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} & 4e^{-2x} \\ e^x & -e^{-x} & 8e^{2x} & -8e^{-2x} \end{vmatrix}}$$

$$U'_3(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & 0 & e^{-2x} \\ e^x & -e^{-x} & 0 & -2e^{-2x} \\ e^x & e^{-x} & 0 & 4e^{-2x} \\ e^x & -e^{-x} & -5e^{-4x} & -8e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} & e^{-2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} & 4e^{-2x} \\ e^x & -e^{-x} & 8e^{2x} & -8e^{-2x} \end{vmatrix}}$$

$$U'_4(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} & 0 \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} & 0 \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} & 0 \\ e^x & -e^{-x} & 8e^{2x} & -5^{-4x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} & e^{-2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} & 4e^{-2x} \\ e^x & -e^{-x} & 8e^{2x} & -8e^{-2x} \end{vmatrix}}$$

El lector puede hacerse una idea al ver estos cuatro cocientes de determinantes, sobre el engorroso trabajo que requieren sus soluciones.

Resolviéndose estos cocientes de determinantes se obtienen

$$U'_1(x) = \frac{5\,e^{-5x}}{6}, U'_2(x) = \frac{-5e^{-3x}}{6}, U'_3(x) = \frac{-5e^{-6x}}{12} \; y \; U'_4(x) = \frac{5e^{-2x}}{12}$$

de donde se deduce, mediante integración

$$U_1(x) = \frac{-\,e^{-5x}}{6}, U_2(x) = \frac{5e^{-3x}}{18}, U_3(x) = \frac{5e^{-6x}}{72} \; y \; U_4(x) = \frac{-5e^{-2x}}{24}$$

y para ayudar a visualizar este hecho al lector

$$\int e^{-5x}\,dx = \frac{-e^{-5x}}{5}, \qquad \int e^{-3x}\,dx = \frac{-e^{-3x}}{3}, \qquad \int e^{-6x}\,dx = \frac{-e^{-6x}}{6}$$

$$y \int e^{-2x}\,dx = \frac{-e^{-2x}}{2}$$

Ahora, se procede a resolver el ejercicio mediante la aplicación de la fórmula. Para hallar directamente a $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ y $U_4(x)$ se tiene

$$U_1(x) = \frac{\int e^{-x}(-5e^{-4x})\;dx}{(1-(-1))(1-2)(1-(-2))} = \frac{5\int e^{-5x}\;dx}{6} = \frac{-e^{-5x}}{6}$$

$$U_2(x) = \frac{\int e^{x}(-5e^{-4x})\;dx}{(-1-1)(-1-2)(-1-(-2))} = \frac{-5\int e^{-3x}\;dx}{6} = \frac{5e^{-3x}}{18}$$

$$U_3(x) = \frac{\int e^{-2x}(-5e^{-4x})\ dx}{(2-1)(2-(-1)(2-(-2))} = \frac{-5\int e^{-6x}\ dx}{12} = \frac{5e^{-6x}}{72}$$

$$U_4(x) = \frac{\int e^{2x}(-5e^{-4x})\ dx}{(-2-1)(-2-(-1))(-2-2)} = \frac{5\int e^{-2x}\ dx}{12} = \frac{-5e^{-2x}}{24}$$

Nuevamente se aprecia una notable simplificación en cuanto a los cálculos, mediante la aplicación de la fórmula propuesta. Vemos que los resultados obtenidos coinciden con los del método tradicional. Evidentemente, la fórmula simplifica muchos procedimientos matemáticos, facilitando de manera muy notable, el proceso de resolución del tipo de ecuación diferencial en el que está delimitado este trabajo.

Esta fórmula, no solamente presenta numerosas ventajas si se compara con el método de variación de parámetros, sino también con los métodos de coeficientes indeterminados y transformadas de Laplace, también estudiados en lo que se refiere a la resolución de ecuaciones diferenciales. Debido a lo práctico que resulta su aplicación, tanto el alumno como el profesor deben precisar en experimentar con ella en el ámbito de la enseñanza – aprendizaje.

APENDICE

En esta sección, trataremos algunos conceptos relacionados con el contenido principal de este trabajo de grado, que aun suponiendo que el lector los conoce, sin embargo podemos hacer un repaso de ellos. El primero es estudiar la regla de Cramer.

Regla de Cramer

Si A es una matriz invertible de orden n x n, la solución al sistema

$$AX = B$$

de n ecuaciones en las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ viene dada por

$$x_1 = \frac{Det\ A_1}{Det\ A}, x_2 = \frac{Det\ A_2}{Det\ A}, \dots, x_n = \frac{Det\ A_n}{Det\ A}$$

donde, para cada k, A_k es la matriz obtenida de A al reemplazar la columna k por B.

Ejemplo: hallar x_1, en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3$$
$$x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 7$$
$$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$$

Solución**:** se procede a calcular las matrices de A y A_1, siendo esta última matriz la que resulta de sustituir en la primera columna de A, la columna de las constantes. Se tiene entonces:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 8 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 202, \qquad A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 7 & 5 & 8 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 176$$

Así, obtenemos finalmente

$$x_1 = \frac{Det\ A_1}{Det\ A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 7 & 5 & 8 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 8 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{176}{202} = \frac{88}{101}$$

Wronskiano

Antes de llegar a una generalización de este concepto, se procederá de definirlo en un caso más sencillo.

Definición 1: Sean dos funciones diferenciables y_1 y y_2. La función definida

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}$$

es el Wronskiano de y_1 y y_2.

Ejemplo: dado que $y_1(x) = e^{2x}$ y $y_2(x) = e^{-3x}$ son las soluciones de $y'' + y' - 6y = 0$ en el intervalo $(-\infty,\ \infty)$, determinar una solución general de esta ecuación diferencial.

Solución: Solamente debemos demostrar que $W[y_1, y_2] \neq 0$ para algún x en $(-\infty,\ \infty)$. Al utilizar la definición del Wronskiano:

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-3x} \\ 2e^{2x} & -3\,e^{-3x} \end{vmatrix} = -5e^{-x} \neq 0$$

Así, $\{e^{2x}, e^{-3x}\}$ forma un conjunto fundamental de soluciones, y una solución general para la ecuación diferencial planteada es

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_1 e^{-3x}$$

Una vez visto este ejemplo particular y sencillo de cuando la ecuación diferencial es de segundo orden, se puede proceder a definir el Wronskiano de manera general

Definición 2: Sean $f_1, f_2, \dots, f_n, n$ funciones diferenciables $(n-1)$ veces. La función

$$W[f_1, f_2, \dots, f_n](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-2)}(x) & \cdots & f_n^{(n-3)}(x) \end{vmatrix}$$

es el Wronskiano de $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Aplicaciones

Unas de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales más comunes que se enseñan en los cursos de cálculo, son las que tienen que ver con los sistemas de masa – resorte y los circuitos LRC. Consideraremos exponer en esta sección, un breve resumen teórico sobre estos dos sistemas, a su vez resaltando conexiones y asociaciones para que el lector no tenga dificultades en notar la relación análoga que existe entre ambos sistemas.

Sistema masa – resorte:

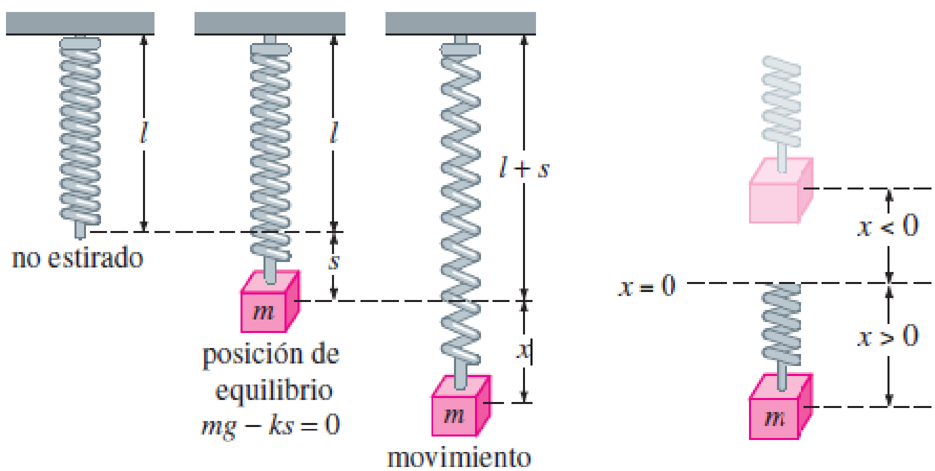
Para comprender este sistema, resulta fundamental conocer dos conceptos: la ley de Hooke y la segunda ley de Newton. Comenzaremos por explicar el primero de éstos. Para entender la ley de Hooke, podemos visualizar a una masa m_1 unida a un resorte colgado de un soporte rígido. Supongamos que sustituimos a la masa dada por otra digamos menor; sea ésta m_2. Se notará que en ambos casos ocurrirá un alargamiento del resorte respecto a su estado inicial, pero éste será menor en el segundo caso, pudiendo ya notarse la relación entre la proporcionalidad entre la masa y el alargamiento.

El resorte ejerce una fuerza F, opuesta a la dirección de alargamiento, la cual busca restituir al resorte a su estado en cual no está interactuando con ninguna masa colgante. La Ley De Hooke puede expresarse en la igualdad $F = kx$, siendo k la constante de elasticidad del resorte.

Es justo en este contexto en donde podemos aplicar la segunda ley de Newton. La masa colgando del resorte, estira a éste una longitud s, en la que su peso $P = mg$ (donde g es la aceleración producida por la fuerza de gravedad), está equilibrado por la fuerza restauradora ks. Se dice entonces que el sistema está en estado de "equilibrio" y se expresa mediante la igualdad $mg = ks$. Si la masa se desplaza una distancia x respecto a la posición de equilibrio, la fuerza restauradora del resorte es $k(x + s)$. Suponiendo que no existen fuerzas externas que perturben el sistema y que la masa puede moverse libremente, entonces podemos igualar la Segunda Ley De Newton con la fuerza neta, siendo esta última fuerza la resultante de la fuerza de restitución y el peso:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x + s) + mg = -kx - ks + mg = -kx$$

El signo negativo del segundo miembro, es debido a que la fuerza restauradora va en sentido opuesto a la fuerza que produce el alargamiento, sugiriéndose así



adoptar la convención de que cuando los desplazamientos son medidos debajo de la posición de equilibrio, se tomarán como positivos.

El caso especial que se ajusta a las delimitaciones del trabajo y por consiguiente a los ejemplos aquí presentados, es en el cual el movimiento de la masa es forzado con amortiguamiento. Se toma en cuenta la presencia de una fuerza externa $f(t)$ que actúa sobre la masa que oscila en un resorte.

Se puede visualizar a f como una fuerza externa impulsora, que causa un movimiento oscilatorio vertical del soporte del resorte. El papel que juega ahora $f(t)$ en la formulación de la segunda ley se expresa mediante la ecuación diferencial de movimiento forzado:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \beta\frac{dy}{dt} + f(t) \qquad (1)$$

Dividiendo esta ecuación por m se obtiene

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda\frac{dy}{dt} + w^2y = F(t) \qquad (2)$$

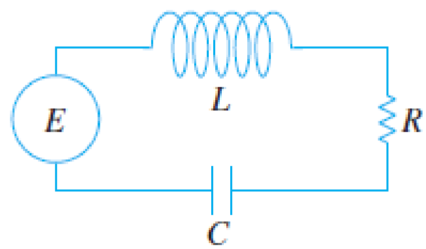
donde $2\lambda = \beta/m$, $w^2 = k/m$, $F(t) = f(t)/m$. El símbolo β es una constante de amortiguamiento positiva, el signo negativo que tiene éste en (2), se debe a que la fuerza amortiguadora actúa en dirección opuesta a la del movimiento. El símbolo 2λ en (2), se utiliza por comodidad algebraica al utilizar la ecuación resolvente de segundo grado, que el lector puede fácilmente verificar.

Circuitos LRC

Antes de resaltar las analogías entre el sistema masa – resorte y los circuitos LRC, es preciso hacer una breve definición de la ley de Ohm, y de lo que es un circuito LRC. La ley de Ohm expone que la diferencia de potencial V entre los extremos de un conductor eléctrico, es proporcional a la intensidad I que fluye a través de tal conductor. El factor de la resistencia eléctrica R, juega un papel fundamental en esta ley, ya que representa la proporcionalidad entre V e I, es decir

$$V = RI$$

Un circuito LRC es un circuito donde cuyos elementos, conectados en serie, son un resistor de valor R, un capacitor de valor C, un inductor de valor L, y una fuente de poder de valor E.



En un circuito eléctrico en serie LRC, si $I(t)$ representa la corriente que fluye en él, las caídas de voltaje se representan en las siguientes igualdades:

Para el resistor: RI

Para el capacitor: $\frac{1}{C}Q$

Para el inductor: $L\frac{dI}{dt}$

Según la segunda ley de Kirchhoff, la suma de las caídas de tensión del resistor, el capacitor y el inductor, es igual al voltaje $E(t)$. Aplicado al circuito en cuestión, esto se expresa en la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t) \qquad (1)$$

Pero $I = dQ/dt$ relaciona la corriente $i(t)$ con la carga del capacitor $q(t)$. Luego, la ecuación uno, en vista de esta relación puede expresarse

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t) \qquad (2)$$

Por otra parte, si derivamos la ecuación (1), respecto a t:

$$L\frac{d^2I}{dt} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = L\frac{d^2I}{dt} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE(t)}{dt}$$

entonces

$$L\frac{d^2I}{dt}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dE(t)}{dt} \qquad (3)$$

Si por ejemplo tenemos una fuente de corriente con $E(0)=0$ y $E(t)=A\sin wt$, entonces la ecuación diferencial planteada en (3) se convierte en

$$L\frac{d^2I}{dt}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=Aw\cos wt \qquad (4)$$

A continuación se mostrará una ecuación diferencial de segundo orden, se resolverá con la fórmula que se plantea en este trabajo de grado, y se interpretará su significado, tanto en los sistemas masa – resorte como en los circuitos LRC.

Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{1}{5}\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+1.2y=5\cos 4t \qquad y(0)=\frac{1}{2}, y'(0)=0$$

En el sistema masa resorte: Notamos que el problema es una representación de un sistema vibratorio, formado por una masa de $\frac{1}{5}$ kilogramos, unida a un resorte con $k=1.2\ N/m$.

La masa parte del reposo a $\frac{1}{2}$ metros debajo de su posición de equilibrio, y la constante de amortiguación está presente, siendo esta igual a 2, y está impulsado por una fuerza periódica $T=\frac{\pi}{2s}$, que se inicia cuando $t=0$. También, aún en presencia del amortiguamiento, el sistema permanecerá en movimiento, a menos que la función forzada $F(t)=5\cos 4t$ cese su influencia (o se "desactivara"), y las respectivas amplitudes fuesen disminuyendo en la medida en que t crece.

En el sistema circuito eléctrico en serie LRC: supongamos que nos interesa representar la ecuación diferencial en la forma siguiente

$$\frac{1}{5}\frac{d^2q}{dt^2}+2\frac{dq}{dt}+1.2q=5\cos 4t \qquad q(0)=\frac{1}{2}, q'(0)=0$$

Entonces, podemos decir que éste es un circuito en serie LRC, que tiene una fuente de voltaje $E(t) = 5\cos 4t$, un resistor de 2 ohms, un inductor de 0,2 henrios y un capacitor de 5/6 de faradays. La carga inicial cuando $t = 0$ es igual a 0,5 faradays, y la corriente es igual a 0, ya que $\frac{dq}{dt} = I$. La ecuación diferencial está planteada de tal manera que nos permita conocer la carga del capacitor.

Solución: Multiplicamos la ecuación homogénea correspondiente por 5, para obtener

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 10\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

de donde se deduce que sus raíces son $\lambda_1 = -5 + \sqrt{19}$ y $\lambda_2 = -(5 + \sqrt{19})$. Por lo tanto, la solución general es de la forma

$$y_c = C_1 e^{(-5+\sqrt{19})t} + C_2 e^{-(5+\sqrt{19})t}$$

Suponiendo que $C_1 = U_1(t)$ y $C_2 = U_2(t)$, donde U_1 y U_2 son funciones, y usando la fórmula se obtiene

$$\begin{aligned} U_1(t) &= \frac{\int F(t)e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}dt = \frac{\int 5\cos 4t\, e^{(5-\sqrt{19})t}}{2\sqrt{19}}dt \\ &= \frac{\sqrt{19}e^{(5-\sqrt{19})t}\left(\left(5-\sqrt{19}\right)\cos 4t + 4\,\mathrm{sen}\,4t\right)}{76(6-\sqrt{19})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(t) &= \frac{\int F(t)e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}dt = \frac{\int 5\cos 4t\, e^{(5+\sqrt{19})t}}{-2\sqrt{19}}dt \\ &= \frac{-\sqrt{19}e^{(5+\sqrt{19})t}\left(\left(5+\sqrt{19}\right)\cos 4t + 4\,\mathrm{sen}\,4t\right)}{76(6+\sqrt{19})} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales, la solución de la ecuación diferencial viene dada por $y = y_c + y_p$, es decir:

$$y(t) = e^{-(5-\sqrt{19})t}\left(\frac{11}{34} + \frac{15\sqrt{19}}{646}\right) + e^{-(5+\sqrt{19})t}\left(\frac{11}{34} - \frac{15\sqrt{19}}{646}\right) + \frac{10}{17}\operatorname{sen} 4t - \frac{5}{34}\cos 4t$$

Con la ayuda del software Maple 18, se presenta una visualización de las gráficas de la solución de dicha ecuación diferencial homogénea (Fig. 1), y la solución de dicha ecuación (Fig. 2):

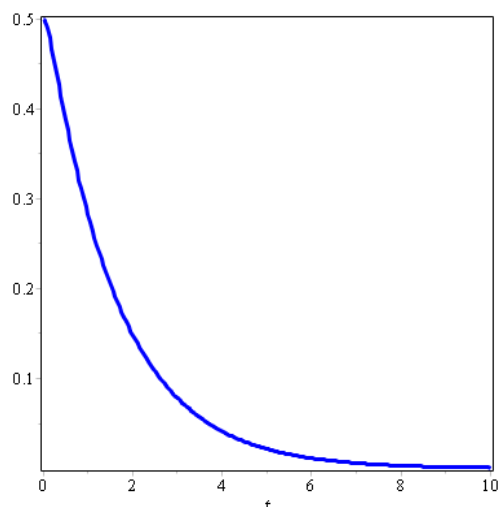


Fig. 1.

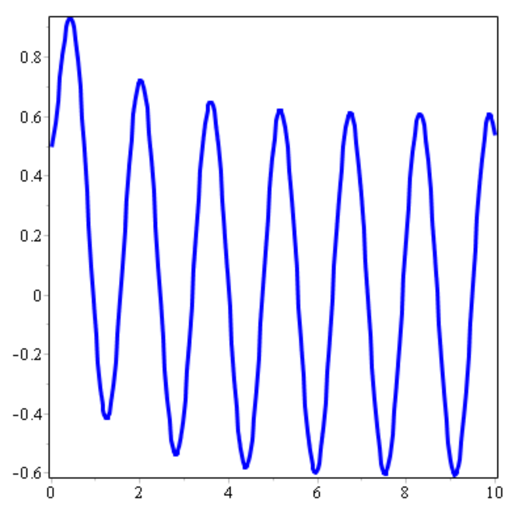


Fig. 2.