El espacio dual de un espacio vectorial
Las variedades ortogonales

1. Espacio dual

Dado un espacio vectorial, $(V,+,.k)$, sobre un cuerpo de escalares k, sabemos que el conjunto de todos los homomorfismos o aplicaciones lineales de V en otro espacio vectorial cualquiera V', $Hom(V,V')$, tiene estructura de espacio vectorial sobre k[1].

El cuerpo k de definición del espacio puede considerarse también un espacio vectorial unidimensional, ya que es grupo conmutativo para la suma, y el producto por un escalar (por elementos del mismo k) verifica las condiciones de asociatividad y distributividad mixtas que se exigen a la estructura de espacio vectorial.

Podemos, en definitiva, considerar el conjunto de los homomorfismos del espacio V en el espacio k, $Hom(V,k)$, que también es, obviamente, espacio vectorial sobre el cuerpo k. Tal espacio vectorial, $V^*=Hom(V,k)$, se denomina *espacio dual* del espacio vectorial V.

Proposición 1:
Para determinar una base del espacio dual de V, consideremos una base $B=\{e_i\}$ de V. El subconjunto $B^* \subset V^*$ definido por $B^*=\{e_j^* / e_j^*(e_i)=\delta_{ij}\}$ es un conjunto de vectores del espacio dual V^* linealmente independientes, y será una base si V es de dimensión finita.
Veamos la demostración:
- B^* es un conjunto de vectores del espacio dual linealmente independientes:
Sea 0^* el homomorfismo nulo, o sea, tal que $0^*(x)=0$, cualquiera que sea x.

$$\sum_j a_j^*.e_j^* = 0^* \rightarrow \left(\sum_j a_j^*.e_j^*\right)(e_i) = 0^*(e_i) \rightarrow \sum_j a_j^*.e_j^*(e_i) = 0^*(e_i) \rightarrow a_j^* = 0,\ j=1,...$$

- B^* es un conjunto de vectores del espacio dual que es sistema de generadores:
$\forall x^* \in V^*$, llamemos $a_i^* = x^*(e_i)$

$$\forall x \in V,\ e_i^*(x) = e_i^*\left(\sum_{j=1}^n a_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n a_j e_i^*(e_j) = a_i$$

$$x^*(x) = x^*\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i x^*(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i.a_i^* = \sum_{i=1}^n a_i^* e^*(x) \rightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i^* e^*\right)(x) \rightarrow x^* = \sum_{i=1}^n a_i^* e^*$$

Teniendo en cuenta el teorema fundamental de existencia de homomorfismos[2], existe siempre una aplicación lineal inyectiva (monomorfismo) del espacio vectorial V en su espacio dual V^*. Tal aplicación lineal sería biyectiva (y por tanto isomorfismo) si el espacio V tuviera dimensión finita. Esto, traducido al concepto de dimensión, se expresaría afirmando que, en general es

$$\dim V \leq \dim V^*$$

y en el caso finitodimensional, $\dim V = n$, se verifica la igualdad

$$\dim V = \dim V^*$$

Es decir, todo espacio vectorial de dimensión finita es isomorfo a su espacio dual.

Definición 1:
Si es V de dimensión finita, y es $B = \{e_i\}_n$ base de V, entonces se define como base dual de B a la base $B^* = \{e_j^* / e_j^*(e_i) = \delta_{ij}\}$.

2. Variedades ortogonales

Definición 2:
Se define la relación de ortogonalidad entre los vectores del espacio V y los vectores de su espacio dual del modo siguiente:

$$x^* \in V^* \text{ es ortogonal a } x \in V \leftrightarrow x^*(x) = 0$$

Proposición 2:
Si es $M \subset V$ una parte cualquiera de V, el conjunto $o(M)$ de los vectores de su espacio dual V^* que son ortogonales a los vectores de M son una variedad lineal, que podemos llamar variedad ortogonal a M.
Demostración:
- Veamos que $\forall x_1^*, x_2^* \in o(M), \forall a, b \in k, ax_1^* + bx_2^* \in o(M)$
como $\forall x_1^*, x_2^* \in V^*, ax_1^* + bx_2^* \in V^*, \forall a, b \in k$, se tiene, al ser aplicación lineal, que:

$$\forall x \in V, (ax_1^* + bx_2^*)(x) = ax_1^*(x) + bx_2^*(x), \forall a, b \in k$$

por tanto:

$$\forall x_1^*, x_2^* \in o(M) \subseteq V^*, x_1^*(x) = 0, x_2^*(x) = 0 \to ax_1^*(x) = 0, bx_2^*(x) = 0, \forall a, b \in k, \forall x \in M \to$$
$$\to ax_1^*(x) + bx_2^*(x) = 0, \forall a, b \in k \to (ax_1^* + bx_2^*)(x) = 0 \to ax_1^* + bx_2^* \in o(M)$$

Proposición 3:
Sean A y B partes de V. Se verifica:

$$A \subseteq B \to o(B) \subseteq o(A)$$

Demostración:

$$\forall x \in A \to x \in B \to \forall z^* \in o(B), z^*(x) = 0 \to z^* \in o(A) \to o(B) \subseteq o(A)$$

Proposición 4:
Para dos partes cualesquiera, A y B, de un espacio vectorial V, se cumple que

$$o(A \cup B) = o(A) \cap o(B)$$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B \to o(A \cup B) \subseteq o(A) \\ B \subseteq A \cup B \to o(A \cup B) \subseteq o(B) \end{array}\right\} \to\to o(A \cup B) \subseteq o(A) \cap o(B)$$

$$(\forall x^* \in o(A) \cap o(B) \to x^* \in o(A) \wedge x^* \in o(B)) \wedge (\forall x \in A \cup B, x \in A \vee x \in B) \to x^*(x) =$$
$$= 0 \to x^* \in o(A \cup B) \to o(A) \cap o(B) \subseteq o(A \cup B)$$

De las dos inclusiones, se tiene que $o(A \cup B) = o(A) \cap o(B)$.

Proposición 5:
Para dos partes cualesquiera, A y B, de un espacio vectorial V, se cumple que

$$o(A) \bigcup o(B) \subseteq o(A \bigcap B)$$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} A \bigcap B \subseteq A \rightarrow o(A) \subseteq o(A \bigcap B) \\ A \bigcap B \subseteq B \rightarrow o(B) \subseteq o(A \bigcap B) \end{array}\right\} \rightarrow o(A) \bigcup o(B) \subseteq o(A \bigcap B)$$

Proposición 6:
Sea L variedad lineal del espacio vectorial V y sea S un sistema de generadores de la variedad L. Se verifica que L y S tienen la misma variedad ortogonal.

$$S \text{ sist generador de } L \rightarrow o(L) = o(S)$$

Demostración:

$$S \text{ sist generador de } L \rightarrow S \subseteq L \rightarrow o(L) \subseteq o(S)$$

$$\forall x^* \in o(S), \forall x \in L, x^*(x) = x^*\left(\sum a_j e_j\right) = \sum a_j x^*(e_j) = 0 \rightarrow x^* \in o(L) \rightarrow o(S) \subseteq o(L)$$

Por la antisimetría de la inclusión:

$$\left.\begin{array}{l} o(L) \subseteq o(S) \\ o(S) \subseteq o(L) \end{array}\right\} \rightarrow o(S) = o(L)$$

Bibliografía

ABELLANAS, P., "Elementos de Matemática", Edit. Romo, Madrid, 1973
BIRKHOFF, G.-MCLANE, S.; "Álgebra Moderna", Editorial Vicens-Vives, Madrid, 1974
QUEYSANNE, M.; "Álgebra Básica", Editorial Vicens-Vives, Madrid, 1990
ABELLANAS, P., "Geometría Básica", Edit. Romo, Madrid, 1969
HOFFMAN, K., "Álgebra Lineal",Prentice Hall Interamericana, 1973.
CASTELLET, M.-LLERENA, I.; "Álgebra Lineal y Geometría", Ed. Reverté, Barcelona, 1996

Notas en el texto:
[1]:Ver su estructura de espacio vectorial en "*Acerca de los homomorfismos*", pags 4 y 5, en http://casanchi.com/mat/homomorfismos01.htm
[2]: Ver el teorema fundamental de existencia de homomorfismos en "*Acerca de homomorfismos*", pag 14, en http://casanchi.com/mat/homomorfismos01.htm