SOBRE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL DE PROBABILIDAD

Utilización de la Matemática y el Derive5 en la obtención de los valores de la Distribución Normal de Probabilidad.

Antonio Mazón Ávila
Adolfo Damián Moreno González

Introducción

En este trabajo se profundiza en las integrales dobles a partir del estudio de las integrales dobles impropias de primera especie, además se proporciona un procedimiento matemático y el asistente Derive 5 en la obtención de valores de la distribución Normal de Probabilidad.

Desarrollo

Integrales dobles impropias de primera especie

Definición. Sea $S \subset R^2$, S no acotado y f(x, y) continua en S, a la integral $\iint_S f(x,y)dxdy$, se le denomina integral impropia de primera especie y se puede calcular a través de la expresión $\iint_S f(x,y)dxdy = \lim_{N \to S} \iint_N f(x,y)dxdy$, donde N es una región finita, situada totalmente en S. Si el segundo miembro tiene límite y este no depende de la elección que se haga de N, $\iint_S f(x,y)dxdy$ converge, en caso contrario es divergente.

Definición. Una función real integrable es de densidad probabilística si

- $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in R$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Definición. Una variable aleatoria X que sigue una distribución normal tiene una función de densidad probabilística dada por

f(x) = $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$, $\forall\, x \in$ R , $\mu \;\; y \;\; \sigma$ parámetros de esta distribución.

El valor de la ordenada de esta curva de probabilidad varía al variar los parámetros $\mu \;\; y \;\; \sigma$, aquí siempre se cumplirá que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

También es preciso señalar que la distribución normal constituye una variable continua. Para calcular la probabilidad de que la variable X este entre a y b lo hacemos a través de las expresiones siguientes:

p(a< x <b) = p(a$\leq x$ <b)= p(a< x$\leq b$)= p(a$\leq x \leq b$) = $\int_a^b f(x)dx$ =F (b)-F(a) (i)

Lo anterior es posible si F^1(x) = f(x) y f(x) es continua en $[a,b]$, además a F(x) se le denomina función de distribución.

Para el caso en que a $= -\infty$, b = t, tendremos que

p(x$\leq t$) = p ($-\infty <$ x < t) = $\int_{-\infty}^{t} f(x)dx = F(t)$, donde *F(t)* representa la función de distribución acumulada de probabilidad. Para el caso de la distribución normal el cálculo sería p(a < x < b) = $\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ d x y

$$F(t) = p(x\leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx \qquad (1)$$

Estas integrales resultan difíciles de calcular, y por otra parte habíamos planteado que para cada par de valores de $\sigma \;\; y \;\; \mu$ Obteníamos una distribución diferente, por tanto la función que se integra también lo es. Si realizamos un cambio de variable obtendríamos la misma función a integrar, lo cual facilita el cálculo.

$\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ d x = $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma dz$, realizando la sustitución $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

d x = σdz , para x = -∞ $\rightarrow$ z = -∞ y para x = t $\rightarrow$ z = $\frac{t-\mu}{\sigma}$, como para x = t se obtiene z = $\frac{t-\mu}{\sigma}$ podemos escribir $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Z} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$, pues en una integral definida se cumple $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(z)dz$ … (2)

Utilizando (1) podemos escribir

$$F(z) = p(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Z} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \qquad -\infty < z < \infty$$

Para z = 0

$$F(0) = p(Z \le 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \qquad (3)$$

Resolvamos la integral $\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \text{, por (2), } \quad I = \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$I^2 = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}(X^2+Y^2)} dxdy$, transformando esta integral doble a coordenadas polares tendremos la región N = $\{(\rho, \theta) \in \Re^2 : 0 \le \rho < +\infty,\ \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}\}$.

$I^2 = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_{0}^{\infty} \rho e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{2}$ utilizando el Derive 5, luego I = $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, sustituyendo este resultado en (3), F(0) = p(Z≤ 0) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = 0{,}5$.

En esta distribución se cumple una propiedad importante p(z <-a) = p (z > a), por la simetría del gráfico, hallemos

$$F(-a) = p(Z < -a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$F(-a) = 1 - F(a)$$

Para z = 1

$$F(1) = p(Z \le 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 0.5 + 0.3413447460 = 0{,}8413447460.$$

Para z = 0.2

$$F(0.2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0.2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.5792597094$$

Para z = 2.3

$$F(2.3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{2.3} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.9892758900$$

Para z = -1

F(-1) = p(Z≤ -1) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-1} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$ = 0.1586552539, ¿Cómo hallar p(Z > 1)?

p(Z> 1) = p(1< Z < + ∞) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{1} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt=1-$0.8413447460=

=0.1586552540 (utilizando (i) y Derive 5).

p(1< Z < 3) = F(3)-F(1) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{3} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{1} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$ = 0.1573053559 .

Conclusiones

1. El trabajo con las integrales dobles impropias de primera especie contribuye a la asimilación del concepto de función de densidad y probabilidad conjunta

2. El cálculo de los valores correspondientes a la Distribución Normal de Probabilidad, utilizando la Matemática y el Derive 5, puede ser útil para los profesores que imparten Estadística y Probabilidades, así como para los alumnos que reciben este contenido, pues le permite conocer el procedimiento para obtener los elementos de dicha distribución.

3. El planteamiento y el cálculo de las probabilidades a partir de las integrales contribuye en gran medida a la asimilación de la Distribución Normal de Probabilidades.

Bibliografía

V. A Kudriávtsev, B. P. Demidóvich . Breve curso de matemáticas superiores.
M. Krasnov y otros .Curso de matemáticas superiores tomo II.
Tom M. Apostol; Calculus, volumen II.
Luis M Hernández y otros. Probabilidades.
Joaquín López Barriuso. Matemáticas. BUP3
Probabilidad y Estadística para ingenieros Primera y segunda parte

MSc. Antonio Mazón Ávila
an@mat.upr.edu.cu
Adolfo Damián Moreno González