LA DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL EN COORDENADAS RECTÁNGULARES, ESFÉRICAS Y CILÍNDRICAS:

Del teorema de la divergencia, se tiene:

$$\int_V div(\vec{f}).d\tau = \int_S \vec{f}.d\vec{S}$$

y podemos escribir en forma diferencial para coordenadas generales q_1, q_2, q_3:

$$div(\vec{f}).d\tau = \frac{\partial}{\partial q_1}(\vec{f}_1.d\vec{S}_1).dq_1 + \frac{\partial}{\partial q_2}(\vec{f}_2.d\vec{S}_2).dq_2 + \frac{\partial}{\partial q_3}(\vec{f}_3.d\vec{S}_3).dq_3$$

Expresión en coordenadas rectangulares o cartesianas:

En estas coordenadas es: $dS_{q_1} = dy.dz$, $dS_{q_2} = dx.dz$, $dS_{q_3} = dxdy$
Y también es el elemento diferencial de volumen $d\tau = dx.dy.dz$

Por tanto:

$$div(\vec{f}).d\tau = \frac{\partial}{\partial x}(f_1.dy.dz).dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_2.dxdz).dy + \frac{\partial}{\partial z}(f_3.dxdy).dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow div(\vec{f}) = \frac{1}{dx.dy.dz}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}.dy.dz.dx + \frac{1}{dx.dy.dz}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}.dy.dz.dx + \frac{1}{dx.dy.dz}\frac{\partial f_3}{\partial x_3}.dy.dz.dx =$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

$$div(\vec{f}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

Expresión en coordenadas esféricas:

En estas coordenadas es:

$$dS_{q_1} = \rho^2.sen\theta.d\theta.d\phi, \quad dS_{q_2} = \rho.sen\theta.d\rho.d\phi, \quad dS_{q_3} = \rho.d\rho.d\theta$$

Y también es $d\tau = \rho^2.sen\theta.d\rho.d\theta.d\phi$

Por tanto:

$$div(\vec{f}).d\tau = \frac{\partial}{\partial\rho}(f_1.dS_\rho).d\rho + \frac{\partial}{\partial\theta}(f_2.dS_\theta).d\theta + \frac{\partial}{\partial\phi}(f_3.dS_\phi).d\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow div(\vec{f}) = \frac{1}{\rho^2.sen\theta.d\rho.d\theta d\phi}\frac{\partial(f_1.\rho^2.sen\theta.d\theta.d\phi)}{\partial\rho}.d\rho +$$

$$+\frac{1}{\rho^2.sen\theta.d\rho.d\theta.d\phi}\frac{\partial(f_2.\rho.sen\theta.d\rho.d\phi)}{\partial\theta}.d\theta +$$

$$+\frac{1}{\rho^2.sen\theta.d\rho.d\theta.d\phi}\frac{\partial(f_3.\rho.d\rho.d\theta)}{\partial\phi}.d\phi$$

O sea:

$$div(\vec{f}) = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(f_1.\rho^2)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho.sen\theta.}\frac{\partial(f_2.sen\theta.)}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho.sen\theta}\frac{\partial(f_3)}{\partial\phi}$$

Expresión en coordenadas cilíndricas:

En estas coordenadas es:

$dS_{q_1} = \rho.d\phi.dh \quad dS_{q_2} = d\rho.dh \quad dS_{q_3} = \rho.d\rho.d\phi$

Y también es $d\tau = \rho.d\rho.d\phi.dh$

Por tanto:

$$div(\vec{f}).d\tau = \frac{\partial}{\partial\rho}(f_1.dS_\rho).d\rho + \frac{\partial}{\partial\phi}(f_2.dS_\phi).d\phi + \frac{\partial}{\partial h}(f_3.dS_h).dh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow div(\vec{f}) = \frac{1}{\rho.d\rho.d\phi.dh}\frac{\partial(f_1\rho.d\phi.dh)}{\partial\rho}.d\rho +$$

$$+\frac{1}{\rho.d\rho.d\phi.dh}\frac{\partial(f_2.d\rho.dh)}{\partial\phi}.d\phi +$$

$$+\frac{1}{\rho..d\rho..d\phi.dh}\frac{\partial(f_3.\rho.d\rho.d\phi)}{\partial h}.dh$$

Finalmente:

$$div(\vec{f}) = \frac{1}{\rho.}\frac{\partial(f_1\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(f_2)}{\partial\phi} + \frac{\partial(f_3)}{\partial h}$$

En resumen:

En cartesianas: $$\vec{\nabla}.\vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

En esféricas: $$\vec{\nabla}.\vec{f} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(f_1.\rho^2)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho.sen\theta.}\frac{\partial(f_2.sen\theta.)}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho.sen\theta}\frac{\partial(f_3)}{\partial\phi}$$

En cilíndricas: $$\vec{\nabla}.\vec{f} = \frac{1}{\rho.}\frac{\partial(f_1\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(f_2)}{\partial\phi} + \frac{\partial(f_3)}{\partial h}$$