MEDIDAS SOBRE DISTRIBUCIONES ABSOLUTAMENTE CONTINUAS. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

01. Medidas sobre distribuciones absolutamente continuas

01.1. La función de densidad:

Para cualquier variable aleatoria, X, su función de distribución viene definida por

$$F(x) = p\left[X \leq x\right]$$

que, si es absolutamente continua, se puede expresar por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt$$

donde es $f(x)$ la función de densidad, que obviamente ha de cumplir la condición de probabilidad igual a 1 para el espacio muestral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).dt = 1 \qquad (1.2)$$

La función de densidad permite definir el tipo de distribución en estudio, así, por ejemplo, la distribución normal queda definida por una función de densidad dada por:

$$f(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}$$

01.2. Momentos:

Para estudiar las características de una distribución de la variable aleatoria es necesario estudiar *los momentos* de la distribución.

Los *momentos iniciales* están definidos por

$$M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x).dx \text{ (momento inicial de orden } k, k=0,1,\ldots)$$

El momento inicial de orden cero es la unidad, por (1.2), pues

$$M_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 f(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1$$

Al momento inicial de orden 1 se le denomina *Esperanza Matemática* o bien *Media* de la distribución:

$$E[x] \equiv M \equiv M_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^1 f(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x).dx$$

Se llama *desviación respecto de la media* a la variable $X - M$.

A partir de la *Media* o *Esperanza Matemática* se definen los llamados m*omentos centrales* de la distribución:

$$\alpha_k = E\left[(x-M)^k\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-M)^k f(x).dx$$ (momento central de orden k, $k=0,1,\ldots$)

El momento central de orden cero coincide, obviamente, con la unidad, al igual que el momento inicial de orden cero:

$$\alpha_0 = E\left[(x-M)^0\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-M)^0 f(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1$$

El momento central de orden 1 es nulo:

$$\alpha_1 = E\left[(x-M)^1\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-M)^1 f(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x.dx - \int_{-\infty}^{+\infty} Mf(x).dx = M - M\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx =$$

$$= M - M = 0$$

El momento central de orden 2 se denomina Varianza:

$$\sigma^2 = \alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-M)^2 f(x).dx$$

La raíz cuadrada de la varianza es lo que denominamos d*esviación típica* o *desviación standard:* $\sigma = \sqrt{\alpha_2}$

- Relaciones entre los momentos centrales y los momentos iniciales:

El momento central de orden 2 (la varianza) se relaciona con los momentos iniciales de orden 1 (media) y de orden 2, mediante la relación:

$$\alpha_2 = \sigma^2 = M_2 - M^2$$

puesto que:

$$\sigma^2 = \alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-M)^2 f(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2M.x + M^2) f(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x).dx -$$

$$-2M\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx + M^2 = M_2 - 2M^2 + M^2 = M_2 - M^2$$

El momento central de orden 3 viene relacionado con los momentos iniciales por la expresión:

$$\alpha_3 = M_3 - 3M.M_2 + 2M^3$$

puesto que:

$$\alpha_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-M)^3 . f(x).dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^3 - 3x^2 M + 3xM^2 - M^3).f(x).dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x).dx -$$

$$-3M \int_{-\infty}^{\infty} x^2 . f(x).dx + 3M^2 \int_{-\infty}^{\infty} xf(x).dx - M^3 \int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = M_3 - 3MM_2 + 3M^3 - M^3 =$$

$$= M_3 - 3M.M_2 + 2M^3$$

Y el momento central de orden 4:

$$\alpha_4 = M_4 - 4M.M_3 + 6M^2 M_2 - 3M^4$$

ya que se tiene:

$$\alpha_4 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-M)^4 . f(x).dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^4 - 4x^3 M + 6x^2 M^2 - 4M^3 x + M^4).f(x).dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 . f(x).dx - 4M \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x).dx + 6M^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x).dx - 4M^3 \int_{-\infty}^{\infty} xf(x).dx + M^4 \int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx =$$

$$= M_4 - 4M.M_3 + 6M^2 M_2 - 4M^4 + M^4 = M_4 - 4M.M_3 + 6M^2 M_2 - 3M^4$$

En general, el momento central de orden k es el desarrollo:

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-M)^k f(x).dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-M)^{k-r} x^r f(x).dx = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-M)^{k-r} \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x).dx =$$

$$= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} (-1)^{k-r} M^{k-r} M_r$$

01.3. La moda y la mediana:

La moda se define como el valor máximo de la distribución, si existe, y se obtiene, en las distribuciones absolutamente continuas como el máximo (o máximos) de la función de densidad $f(x)$, imponiendo las condiciones de máximo para una función real de variable real:

$$x_0 \ \mathrm{mod}\, a \leftrightarrow f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0$$

La mediana se define como el valor x_m de la variable que cubre el mismo número de valores antes y después que él, cuando estos están ordenados. En el caso de distribuciones absolutamente continuas se cumplirá:

$$x_m \ mediana \leftrightarrow \int_{-\infty}^{x_m} f(x).dx = 1/2$$

Simetría: La gráfica de la función de densidad presentará simetría respecto al valor x_0, si presenta simetría bilateral con respecto a la recta $x=x_0$:

$$f(x) \ simetr \ respecto \ a \ x_0 \leftrightarrow f(x_0 - x) = f(x_0 + x)$$

Si la gráfica es simétrica con respecto a $x=h$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = \int_{-\infty}^{h} f(x).dx + \int_{h}^{\infty} f(x).dx = 1 \to 2\int_{-\infty}^{h} f(x).dx = 1 \to \int_{-\infty}^{h} f(x).dx = 1/2$$

por lo que h sería la mediana de la distribución.

01.4. El cálculo de los momentos. La función característica:

Para calcular los momentos, tanto iniciales como centrales, es necesario resolver integrales de gran dificultad en muchos casos, como es el de la distribución normal, donde la función de densidad, como vemos, viene dada por una exponencial. Para solventar el problema de estos cálculos, Alexander M. Lyapunov (1857-1918) introdujo en 1904 un método que llamó *de las funciones características*, y que consiste en definir una cierta función a partir de la cual se extraen de forma sencilla los correspondientes momentos. Esta cierta función, fácil de integrar, permitiría obtener todos los momentos (media, desviación standard, etc) de forma inmediata.

Es la llamada *función característica de la distribución*:

$$\varphi(t) = E\left[e^{itx}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}.f(x).dx$$

Si calculamos sus derivadas para t=0, tenemos:

$$\varphi'(t) = i\int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{itx}.f(x).dx \to \varphi'(0) = i\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx = i.M_1 \to M_1 = -i.\varphi'(0)$$

$$\varphi''(t) = i^2\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.e^{itx}.f(x).dx \to \varphi''(0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x).dx = -M_2 \to M_2 = -\varphi''(0)$$

en general, se tiene la fórmula siguiente para los momentos iniciales de la distribución:

$$M_k = (-i)^k.\varphi^{k)}(0)$$

cuya aplicabilidad depende, en consecuencia, de que las derivadas de la función característica se obtengan de forma sencilla.

Así, podemos obtener la media y la varianza de forma inmediata:

$$\begin{aligned} &M = M_1 = (-i)^1.\varphi^{1)}(0) = -i\varphi'(0) \\ &\sigma^2 = \alpha_2 = M_2 - M^2 = (-i)^2\varphi''(0) - (-i\varphi'(0))^2 = -\varphi''(0) + \varphi'(0)^2 \end{aligned} \qquad (1.4)$$

Y el momento central de tercer orden sería:

$$\begin{aligned} &\alpha_3 = M_3 - 3M.M_2 + 2M^3 = (-i)^3\varphi'''(0) - 3i\varphi'(0)\varphi''(0) + 2i\varphi'(0)^3 = \\ &= i\varphi'''(0) - 3i\varphi'(0)\varphi''(0) + 2i\varphi'(0)^3 \end{aligned}$$

Y el momento central de cuarto orden:

$$\begin{aligned} &\alpha_4 = M_4 - 4M.M_3 + 6M^2M_2 - 3M^4 = (-i)^4\varphi^{4)}(0) - 4(-i)\varphi'(0)(-i)^3\varphi^{3)}(0) + \\ &+ 6(-i)^2\varphi'(0)^2(-i)^2\varphi''(0) - 3(-i)^4\varphi'(0)^4 = \varphi^{4)}(0) - 4\varphi'(0)\varphi^{3)}(0) + 6\varphi'(0)^2\varphi''(0) - \\ &- 3\varphi'(0)^4 \end{aligned}$$

En general, el momento central de orden k viene expresado por

$$\alpha_k = \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} (-1)^{k-r} (-i)^{k-r} \varphi'(0)^{k-r} (-i)^r \varphi^{r)}(0) = \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} (-1)^{k-r} (-i)^k \varphi'(0)^{k-r} \varphi^{r)}(0)$$

01.5. La simetría y la curtosis de una distribución:

Simetría:

Para medir la simetría de la gráfica de una distribución se utiliza el llamado coeficiente de simetría de Fisher, que es el cociente de dividir el momento central de tercer orden por el cubo de la desviación típica:

$$\gamma = \frac{\alpha_3}{\sigma^3}$$

Si $\gamma = 0$: la gráfica es simétrica.
Si $\gamma > 0$: la gráfica tiene asimetría a la derecha.
Si $\gamma < 0$: la gráfica tiene asimetría a la izquierda.

Curtosis:

Cuando se pretende medir el grado de aplanamiento o de apuntamiento de la gráfica se utiliza el coeficiente de curtosis o de Pearson, que consiste en dividir el momento central de cuarto orden por la cuarta potencia de la desviación típica y restar 3 al resultado:

$$g_2 = \frac{\alpha_4}{\sigma^4} - 3$$

Si $g_2 = 0$: la gráfica se dice mesocurtica.
Si $g_2 > 0$: la gráfica es leptocurtica.
Si $g_2 < 0$: la gráfica platicurtica.

02. La distribución normal

02.1. Funciones básicas:

La distribución normal está definida por la expresión de la función de densidad.

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}$$

Función de distribución:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t).dt=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-b}{a}\right)^2}.dt$$

Función característica:

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(x).dx=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}.dx$$

02.2. Determinación de la función característica:

02.2.1. La función:

Hacemos el cambio de variables $\frac{x-b}{a}=z\rightarrow x=az+b\rightarrow dx=adz$

$$\varphi(t)=E\left[e^{itx}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}.f(x).dx=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}.dx=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}.dx=$$

$$=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(az+b)-\frac{z^2}{2}}.a.dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itb}.e^{-\frac{1}{2}(z^2-2itaz)}.dz=\frac{e^{itb}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2-2itaz)}dz=$$

$$=\frac{e^{itb}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2-2itaz+(ita)^2)+\frac{1}{2}(ita)^2}dz=\frac{e^{itb+\frac{1}{2}i^2a^2t^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-ita)^2}dz=\frac{e^{itb+\frac{1}{2}i^2a^2t^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}du=$$

$=\frac{e^{itb+\frac{1}{2}i^2a^2t^2}}{\sqrt{2\pi}}.\sqrt{2\pi}=e^{itb+\frac{1}{2}i^2a^2t^2}=e^{itb-\frac{1}{2}a^2t^2}$, donde hemos sustituido $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}.du=\sqrt{2\pi}$ (la demostración la exponemos en el apéndice)

02.2.2. Derivadas primeras:

Llamemos para simplificar $\beta(t)=ibt-\frac{1}{2}a^2t^2$. Se trata de determinar las primeras derivadas de la función $\varphi(t)=e^{\beta(t)}$:

$$\varphi'(t)=\beta'(t)\varphi(t)$$
$$\varphi''(t)=\varphi'(t).\beta'(t)+\varphi(t).\beta''(t)=\varphi(t)\beta'(t)^2+\varphi(t)\beta''(t)=\left[\beta'(t)^2+\beta''(t)\right]\varphi(t)$$
$$\varphi'''(t)=\varphi'(t).\left[\beta'(t)^2+\beta''(t)\right]+\varphi(t)\left[2\beta'(t)\beta''(t)+\beta'''(t)\right]=\varphi(t).\left[\beta'(t)^3+\beta''(t)\beta'(t)\right]+$$
$$+\varphi(t)\left[2\beta'(t)\beta''(t)+\beta'''(t)\right]=\varphi(t).\left[\beta'(t)^3+3\beta''(t)\beta'(t)+\beta'''(t)\right]$$
$$\varphi^{iv)}(t)=\left[\beta'(t)^4+6\beta''(t)\beta'(t)^2+4\beta'''(t)\beta'(t)+3\beta''(t)^2+\beta^{iv)}(t)\right]\varphi(t)$$

siendo:

$\beta(t)=ibt-\frac{1}{2}a^2t^2$, $\beta'(t)=ib-a^2t$, $\beta''(t)=-a^2$, $\beta^{k)}(t)=0, \forall k\geq 3$

se tiene, para $t=0$:

$$\varphi(0)=1,$$
$$\varphi'(0)=\beta'(0).\varphi(0)=ib,$$
$$\varphi''(0)=\left[\beta'(0)^2+\beta''(0)\right]\varphi(0)=-b^2-a^2,$$
$$\varphi'''(0)=\left[\beta'(0)^3+3\beta''(0)\beta'(0)+\beta'''(0)\right]\varphi(0)=-ib^3-3ia^2b$$

$$\varphi^{iv)}(0)=\left[(ib)^4+6(-a^2)(ib)^2+4.0.(ib)+3(-a^2)^2+0\right]\varphi(0)=b^4+6a^2b^2+3a^4$$

02.2.3. La media y los momentos centrales de la distribución:

$$M=-i\varphi'(0)=-i(ib)=b$$
$$\sigma^2=-\varphi''(0)+\varphi'(0)^2=-(-b^2-a^2)+(ib)^2=b^2+a^2-b^2=a^2$$

el momento central de tercer orden:

$$\alpha_3=i\varphi'''(0)-3i\varphi'(0)\varphi''(0)+2i\varphi'(0)^3=i.(-ib^3-3ia^2b)-3i(ib).(-b^2-a^2)+2i(ib)^3=$$
$$=b^3+3a^2b-3b^3-3a^2b+2b^3=0$$

Y el momento central de cuarto orden:

$$\alpha_4=\varphi^{4)}(0)-4\varphi'(0)\varphi^{3)}(0)+6\varphi'(0)^2\varphi''(0)-3\varphi'(0)^4=$$
$$=b^4+6a^2b^2+3a^4-4(ib).(-ib^3-3ia^2b)+6(ib)^2(-a^2-b^2)-3(ib)^4=$$
$$=b^4+6a^2b^2+3a^4-4b^4-12a^2b^2+6a^2b^2+6b^4-3b^4=3a^4$$

02.3. La media y la desviación standard de la distribución normal:

De ser $E[x]=M_1$, se tiene: $E[x]=-i.\varphi'(0)=-i.ib=b$

De ser, por (1.4), $\sigma^2=-\varphi''(0)+\varphi'(0)^2$: $\sigma^2=a^2-b^2+b^2=a^2$, de donde queda:

$$D_s[x]=\sqrt{a^2}=a$$

$$\boxed{\begin{array}{c}E[x]=b\\ D_s[x]=a\end{array}}$$

Esto quiere decir que si se conoce la media y la desviación típica de la distribución, ya se puede construir la función de densidad y, por consiguiente, queda definida la distribución.

Si la media es b y la desviación standard es a, diremos que se trata de la distribución normal $N(b,a)$.

Así, cuando hablamos de la distribución $N(0,1)$, entenderemos que se trata de una distribución normal de media 0 y desviación standard 1.

2.4. La moda de la distribución normal:

El cálculo de la moda es, simplemente, un problema de máximos y mínimos. Se trata, por consiguiente, de igualar a cero la derivada primera de la función de densidad y, a continuación comprobar, para cada uno de los valores que anula a la primera derivada, que la segunda derivada es negativa.

$$f'(x)=0\to\left(\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}\right)'=0\to-\frac{x-b}{a^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}=0\to x=b$$

Veamos que $f''(b)<0$:

$$f''(x)=\frac{-b}{a^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}+\frac{(x-b)^2}{a^5\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}\to f''(b)=-\frac{b}{a^5\sqrt{2\pi}}<0$$

Por tanto:

Moda: $M_0=b$

Se trata, pues, de una distribución unimodal.

02.5. La mediana. Simetría de la gráfica:

Veamos si la gráfica de la distribución normal es simétrica respecto a algún punto x=h:

Tendrá que verificarse que $f(h-x)=f(h+x)$, es decir:

$$\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h-x-b}{a}\right)^2}=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h+x-b}{a}\right)^2}\to e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h-x-b}{a}\right)^2}=e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h+x-b}{a}\right)^2}\to e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h-x-b}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{h+x-b}{a}\right)^2}=1$$

o sea: $-\frac{1}{2}\left(\frac{h-x-b}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{h+x-b}{a}\right)^2=0\to\frac{1}{2a^2}\left[(h+x-b)^2-(h-x-b)^2\right]=0\to(h+x-b)^2-(h-x-b)^2=0$

por tanto: $(h+x-b+h-x-b).(h+x-b-h+x+b)=0\to(2h-2b).2x=0\to h=b$

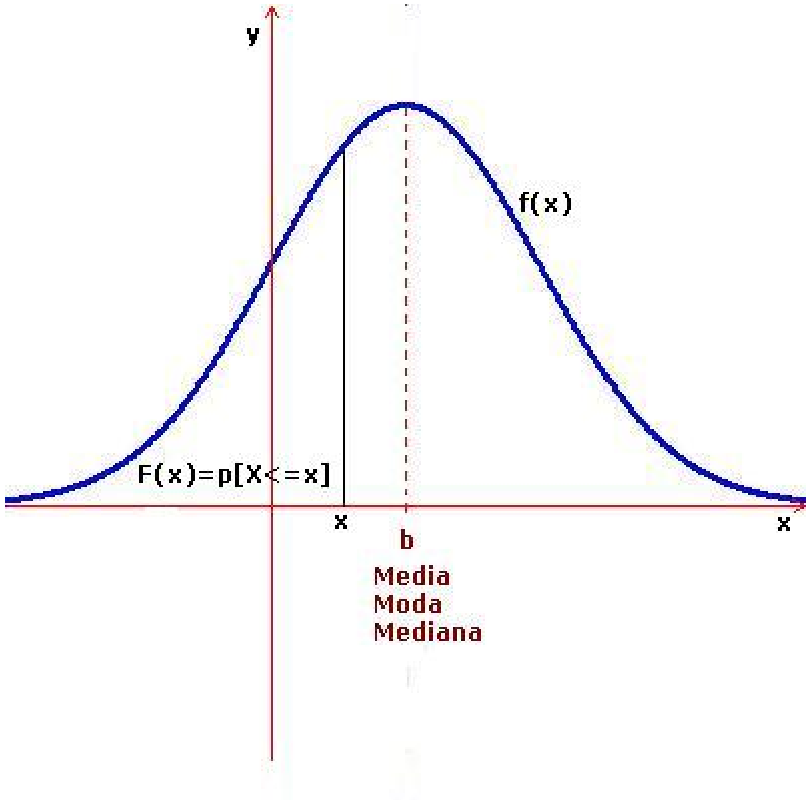
En consecuencia, la gráfica es simétrica respecto al valor h=b, esto es, respecto de la media, por lo cual

$$\int_{-\infty}^{b}f(x).dx=1/2$$

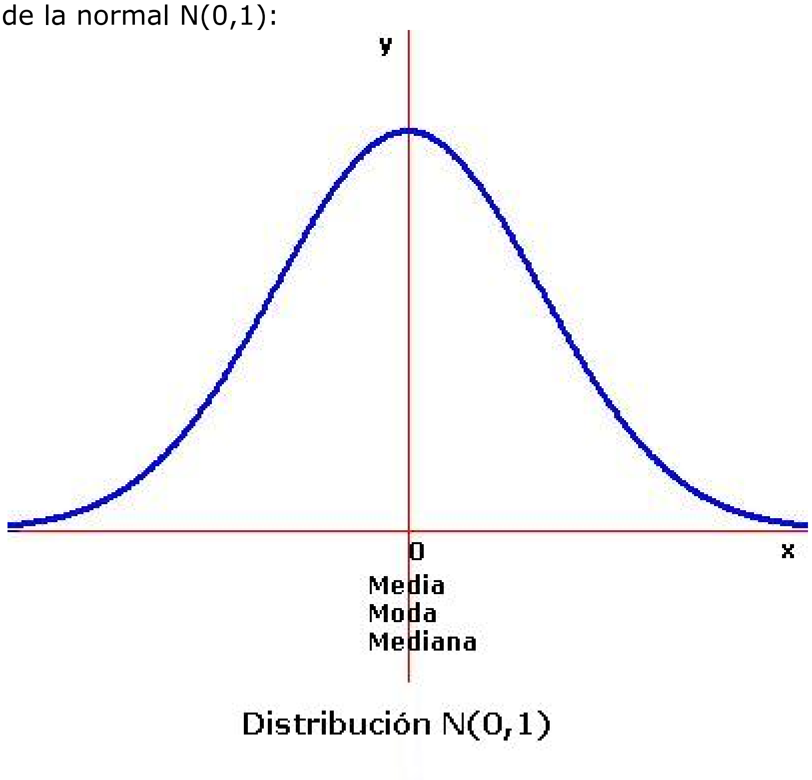
y la mediana coincide con b.

Mediana: $h=b$

02.6. Gráfica de la distribución normal:



Gráfica de la normal N(0,1):



02.7. Coeficientes de simetría y curtosis en la distribución normal:

Coeficiente de simetría de Fisher: $\gamma = \frac{\alpha_3}{\sigma^3} = \frac{0}{a^3} = 0$

Coeficiente de curtosis de Pearson: $g_2 = \dfrac{\alpha_4}{\sigma^4} - 3 = \dfrac{3a^4}{a^4} - 3 = 0$

La gráfica es, pues, simétrica y mesocurtica.

03. La distribución normal de media cero y desviación standard uno (N(0,1)):

La distribución normal de media cero y desviación standard 1 resulta de gran importancia porque el cálculo de valores en cualquier otra distribución normal *N(b,a)* es posible reducirlo a un cálculo en la distribución *N(0,1)*.

03.1. Parámetros de N(0,1):

- Función de densidad: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- Función de distribución: $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}.dt$
- Función característica: $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$
- Media=0, Moda=0, Mediana=0, desviación típica=1

Veamos que cualquier otra distribución normal queda tipificada por N(0,1) mediante el siguiente teorema.

03.2. Tipificación:

Teorema: Sea X la variable aleatoria de la distribución *N(b,a)*, $X \in N(b,a)$, es decir, la distribución de media a y desviación típica b. Si Z es la variable aleatoria de la distribución *N(0,1)*, $Z \in N(0,1)$, entonces $X = a.Z + b$.
Demostración:

Si es $X \in N(b,a)$, veamos que $X' = \dfrac{X-b}{a} \in N(0,1)$:

$$X' \le x \to \frac{X-b}{a} \le x \to X \le ax+b$$

Por consiguiente, es $p[X' \le x] = p[X \le ax+b] = F(ax+b) = \int_{-\infty}^{ax+b} f(x).dx =$

$= \dfrac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{ax+b} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-b}{a}\right)^2}.dt = \dfrac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} a.e^{-\frac{1}{2}u^2}.du = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2}.dt$, que corresponde a la distribución normal *N(0,1)*.

(Hemos hecho el cambio $u = \frac{t-b}{a}$)

En definitiva, si $X' = \frac{X-b}{a} \to X' = Z \to X = aZ + b,\ Z \in N(0,1)$

Puesto que $X \in N(b,a)$ equivale a que $Z = \frac{X-b}{a} \in N(0,1)$, siempre es posible calcular un valor de la función de distribución de la variable aleatoria X en función del valor correspondiente de la variable aleatoria Z. O sea,

$p[X \leq x]$ es equivalente a $p\left[Z \leq \frac{x-b}{a}\right]$ (3.2)

esto quiere decir que cualquier probabilidad de la distribución *N(b,a)* puede expresarse en función de la probabilidad de la distribución *N(0,1).*

03.3. Ejemplo de cálculo con datos tabulados:

Si disponemos de un conjunto de datos tabulados para la distribución *N(0,1),* ello será suficiente para determinar probabilidades en otra distribución *N(b,a)* cualquiera, utilizando la equivalencia (3.2).

En el apéndice, apartado b), hemos insertado una tabla en donde se pueden determinar probabilidades de la normal *N(0,1)*. Vamos a utilizarla en el siguiente ejemplo para determinar probabilidades no solo en la normal *N(0,1)*, sino en cualquier otra distribución normal *N(b,a).*

Ejemplo:

a) Dada la variable aleatoria $Z \in N(0,1)$, calcular, usando la tabla del apéndice:

1) $p[Z \leq 2{,}27]$ 3) $p[1{,}25 < Z \leq 2{,}07]$ 5) $p[-1{,}09 < Z \leq 2{,}27]$
2) $p[Z > 0{,}58]$ 4) $p[Z \leq -0{,}48]$ 6) $p[-1{,}013 < Z \leq -0{,}344]$

b) Dada la variable aleatoria $X \in N(43,8)$, calcular, usando la tabla:
1) $p[X \leq 27]$ 2) $p[15 < X \leq 37]$ 3) $p[35 < X \leq 47]$ 4) $p[X > 50]$

Cálculos, tomando datos de la tabulación del apéndice:

a.1) $p[Z \leq 2{,}27] = 0{,}9884$
a.2) $p[Z > 0{,}58] = 1 - p[Z \leq 0{,}58] = 1 - 0{,}7190 = 0{,}2810$
a.3) $p[1{,}25 < Z \leq 2{,}07] = p[Z \leq 2{,}07] - p[Z \leq 1{,}25] = 0{,}9808 - 0{,}8941 = 0{,}0867$
a.4) $p[Z \leq -0{,}48] = p[Z > 0{,}48] = 1 - p[Z \leq 0{,}48] = 1 - 0{,}6844 = 0{,}3156$
a.5) $p[-1{,}09 < Z \leq 2{,}27] = p[Z \leq 2{,}27] - p[Z \leq -1{,}09] = p[Z \leq 2{,}27] - p[Z > 1{,}09] =$
$= p[Z \leq 2{,}27] - 1 + p[Z \leq 1{,}09] = 0{,}9884 - 1 + 0{,}8621 = 0{,}8505$
a.6) $p[-1{,}013 < Z \leq -0{,}344] = p[Z \leq -0{,}344] - p[Z \leq -1{,}013] = p[Z > 0{,}344] -$
$- p[Z > 1{,}013] = 1 - p[Z \leq 0{,}344] - (1 - p[Z \leq 1{,}013]) = p[Z \leq 1{,}013] -$
$- p[Z \leq 0{,}344] = 0{,}8445 - 0{,}6346 = 0{,}2099$

b.1) $p[X \leq 27] = p\left[Z \leq \frac{27-43}{8}\right] = p\left[Z \leq -\frac{16}{8}\right] = p[Z \leq -2] = p[Z > 2] =$
$= 1 - p[Z \leq 2] = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

b.2) $p[15 < X \leq 37] = p[X \leq 37] - p[X \leq 15] = p\left[Z \leq \frac{37-43}{8}\right] - p\left[Z \leq \frac{15-43}{8}\right] =$
$= p\left[Z \leq -\frac{6}{8}\right] - p\left[Z \leq -\frac{28}{8}\right] = p[Z \leq -0{,}75] - p[Z \leq -3{,}5] = p[Z > 0{,}75] -$
$- p[Z > 3{,}5] = 1 - p[Z \leq 0{,}75] - (1 - p[Z \leq 3{,}5]) = p[Z \leq 3{,}5] - p[Z \leq 0{,}75] =$
$= 0{,}99977 - 0{,}7734 = 0{,}22637$

b.3) $p[35 < X \leq 47] = p[X \leq 47] - p[X \leq 35] = p\left[Z \leq \frac{47-43}{8}\right] - p\left[Z \leq \frac{35-43}{8}\right] =$
$= p\left[Z \leq \frac{4}{8}\right] - p\left[Z \leq -\frac{8}{8}\right] = p[Z \leq 0{,}5] - p[Z \leq -1] = p[Z \leq 0{,}5] - p[Z > 1] =$
$= p[Z \leq 0{,}5] - (1 - p[Z \leq 1]) = p[Z \leq 0{,}5] + p[Z \leq 1] - 1 = 0{,}6915 + 0{,}8413 - 1 =$
$= 0{,}5328$

b.4) $p[X > 50] = 1 - p[X \leq 50] = 1 - p\left[Z \leq \frac{50-43}{8}\right] = p[Z \leq 0{,}875] = 0{,}8562$

4. Bibliografía

Cramer, H.; "Métodos matemáticos de la Estadística". Ediciones Aguilar.
Frechet, M.; "Recherches theoriques modernes sur la theorie des probabilities", Gauthier-Villars, 10ª edic. 1950
Gmurman, V.E. ; "Teoría de las probabilidades y estadística matemática", Editorial Mir, Moscú,1983
Gndenko, B. ; "Teoría de probabilidades ». Editorial Mir
Schweizer, B;Sklar, A.; "Probabilistic metric spaces", North Holland, N.York, 1983
Quesada P,V.; García Perez, A.; "Lecciones de Cálculo de probabilidades", Diaz de Santos, Madrid, 1988.
Martín Pliego, F.; Ruiz-Maya Pérez, L.; "Fundamentos de Probabilidad", Thomson-Paraninfo, 1998.
S. Chinea, C., "Aleatoriedad y álgebras de sucesos", (http://casanchi.com/mat/aleatoria01.pdf)
S. Chinea, C., "De las álgebras de sucesos a los espacios probabilísticos", (http://casanchi.com/mat/sucesospro01.pdf)
S. Chinea, C., "Variables aleatorias. Una incursión en los espacios probabilizables", (http://casanchi.com/mat/valeatoria01.pdf)
S. Chinea, C., "Distribución de variables aleatorias. La función de distribución", (http://casanchi.com/mat/fdistribucion01.pdf)

Carlos S. CHINEA
casanchi@teleline.es

APENDICE:

a) Demostración de que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}.du = \sqrt{2\pi}$:

Consideremos la integral doble:

$$\iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}dx.dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}.e^{-y^2}\right]dx.dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

Resolvámosla en coordenadas polares:

$$\iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}dx.dy = \iint_{R^2} e^{-\rho^2}.\rho.d\rho.d\theta = \int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho.d\rho\int_0^{2\pi} d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} -2\rho.e^{-\rho^2}.d\rho\int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\Big|_0^{\infty}.\theta\Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{2}\left(e^{-\infty}-e^0\right).2\pi = -\frac{1}{2}(0-1).2\pi = \pi$$

En definitiva, es $\iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}dx.dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

En nuestro caso: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}.du = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2} d\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2}.dw = \sqrt{2}.\sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi}$

b) Tabulación para la normal standard N(0,1):

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	**0,0**
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	**0,1**
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	**0,2**
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	**0,3**
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	**0,4**
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	**0,5**
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	**0,6**
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	**0,7**
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	**0,8**
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	**0,9**
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	**1,0**
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	**1,1**
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	**1,2**
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	**1,3**
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	**1,4**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	**1,5**
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	**1,6**
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	**1,7**
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	**1,8**
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	**1,9**
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	**2,0**
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	**2,1**
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	**2,2**
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	**2,3**
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	**2,4**
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	**2,5**
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	**2,6**
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	**2,7**
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	**2,8**
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	**2,9**
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900	**3,0**
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929	**3,1**
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	**3,2**
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965	**3,3**
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	**3,4**
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983	**3,5**
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	**3,6**
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	**3,7**
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	**3,8**
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	**3,9**