DISECCIÓN DE UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO PARA OBTENER UN CUADRADO

POR ELÍAS LOYOLA CAMPOS

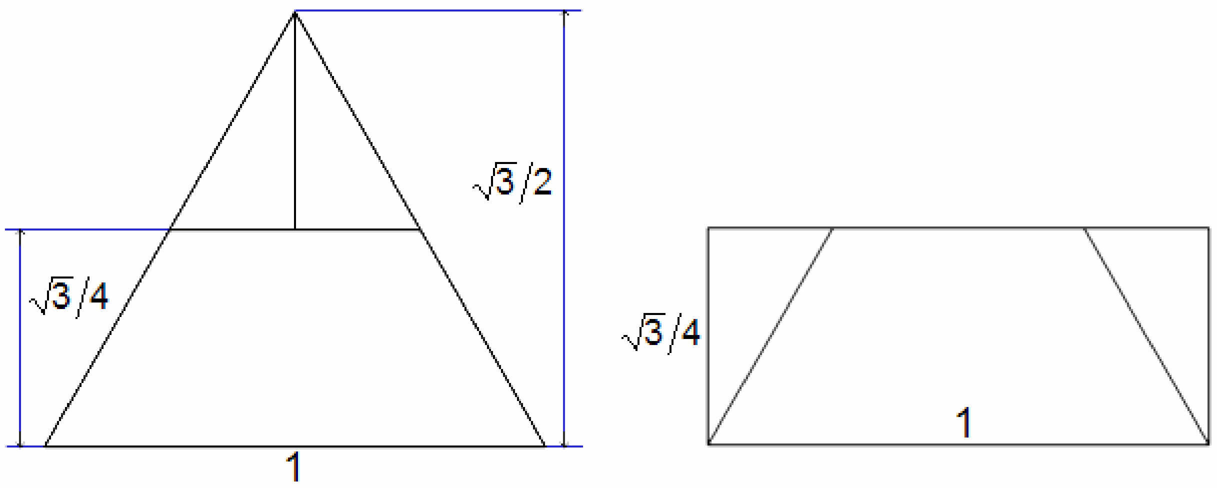
El título de este texto debería ser "Vicisitudes de un profesor de matemáticas", particularmente cuando aceptamos dar respuesta a una pregunta que nos hace un alumno o un colega. En este caso el título que lleva es la pregunta que me hicieron.

Desde hace muchos siglos, unos de los rompecabezas más conocidos eran los de armar algunas figuras geométricas con una cantidad determinada de piezas. Recuerdo que mi mamá tenía unas láminas metálicas con las que se podían formar tanto una T como un rectángulo, las cuales habían sido un regalo que recibió desde pequeña. Existe suficiente literatura, a diferentes niveles, tanto de recreaciones matemáticas como de investigaciones de altos vuelos sobre la disección de figuras y es que tienen aplicaciones variadas, principalmente en el diseño industrial.

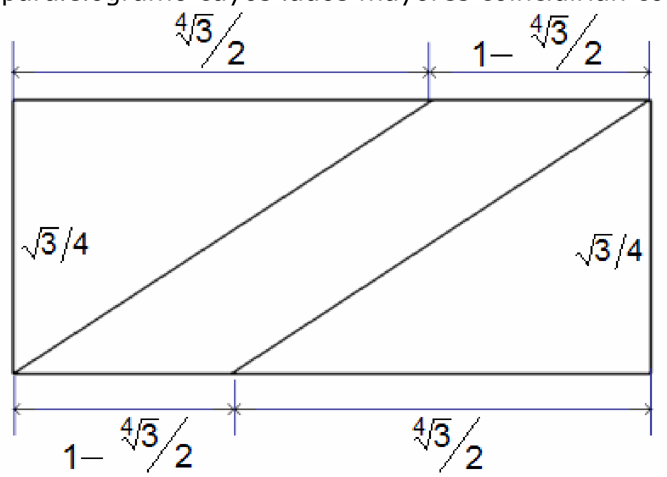
En esta ocasión, quiero presentar la que da título a este texto con el fin de mostrar el procedimiento que seguí para resolver este problema que me fue planteado por mi colega Julio César Oliva, profesor de matemáticas en Rioja, Argentina.

Partí del triángulo equilátero, consideré que el lado tenía una unidad de medida. Así, mediante el célebre teorema de Pitágoras, se obtiene una altura con medida $\sqrt{3}/2$. En primer lugar discurrí que sería conveniente cortarlo para formar un rectángulo y, posteriormente abocarme a cortar éste para construir el cuadrado. Entre menos piezas se obtengan, más elegante es la solución. Aunque hay una manera elemental de formar el rectángulo con el corte del triángulo equilátero en dos piezas idénticas, dadas las dimensiones del rectángulo así obtenido, no sería tan fácil la lograr posteriormente el cuadrado. Por ello, decidí descomponer al triángulo en tres piezas.

(**NOTA:** Me referiré a las medidas exclusivamente con su magnitud, sin anotar sus unidades, pero cuando me refiera a las medidas de longitud estaré suponiendo que son unidades lineales y cuando lo haga con las de área, se tratará de unidades cuadradas.)

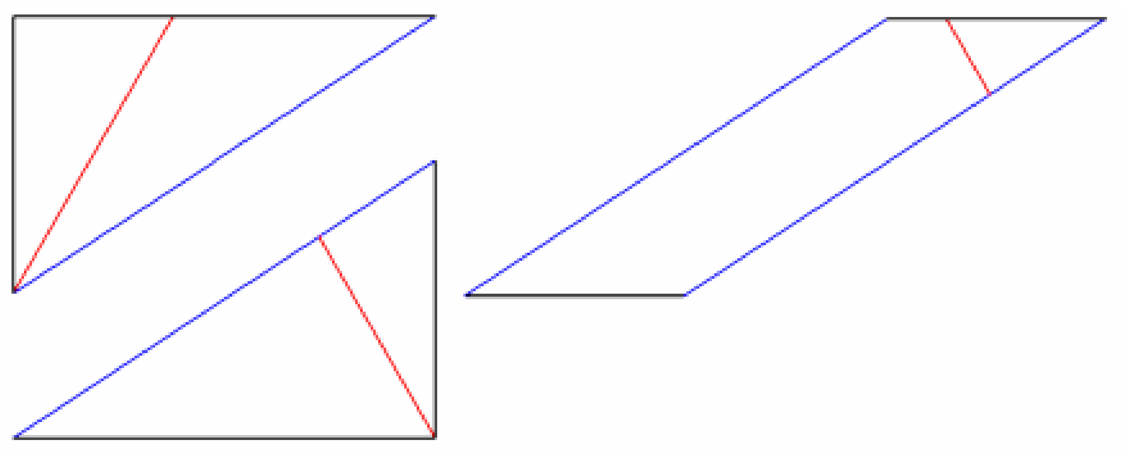


Ahora sólo me restaría cortar al rectángulo, de área $\sqrt{3}/4$ para formar con las piezas un cuadrado de área igual, pero el lado de éste cuadrado debe medir $\sqrt[4]{3}/2$. Dicha medida, que es menor a la unidad, la ubiqué sobre los lados mayores del rectángulo y tracé dos triángulos rectángulos, con sus ángulos rectos en las esquinas opuestas, quedando tres piezas: dos triángulos rectángulos idénticos, con catetos de medidas $\sqrt[4]{3}/2$ y $\sqrt{3}/4$ y un paralelogramo cuyos lados mayores coincidirían con las hipotenusas de los triángulos mencionados.

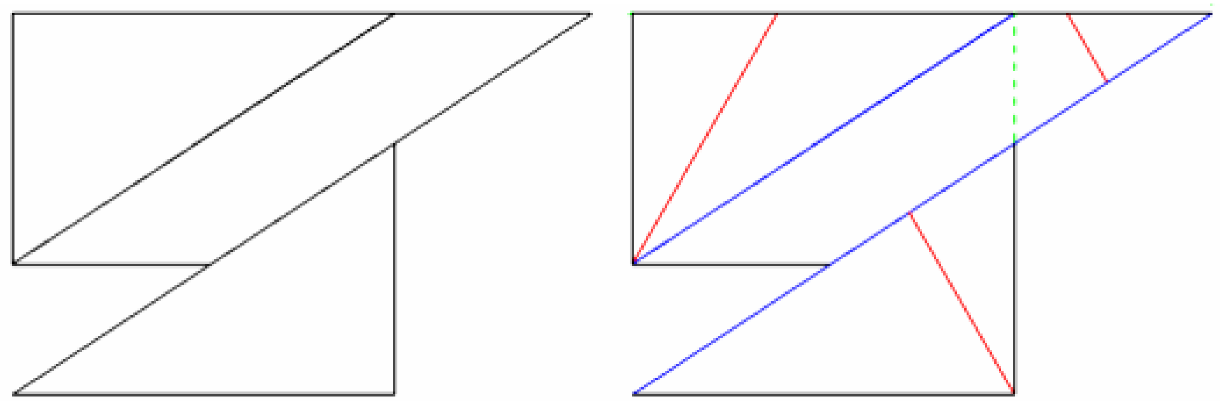


Ahora bien, no debemos perder de vista las tres piezas en las que partimos el triángulo. El resultado de los primeros cortes (en color rojo) sobre estas tres piezas (con los segundos cortes marcados en color azul) me indicaban que ya llevaba seis piezas en esta etapa. Lo que me parecían un número aún manejable de piezas...

En la siguiente ilustración, he colocado en su posición exacta a los dos triángulos rectángulos como las esquinas opuestas del cuadrado y el claro que está entre ellas coincide con el ancho que tiene el paralelogramo.



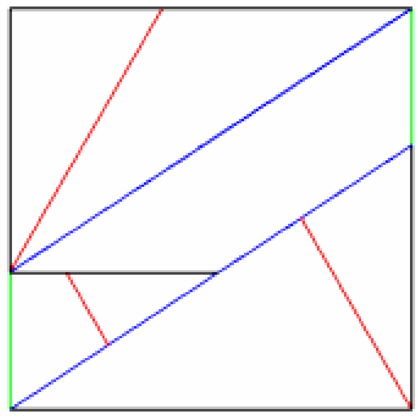
Esto es fácil de entender si pensamos el acomodo siguiente como un deslizamiento del triángulo inferior en el rectángulo. Además, ¡sólo nos restaría hacer un corte más (señalado con línea punteada en color verde) para obtener el cuadrado! Bueno, por algo al número siete lo tildan de "mágico"...



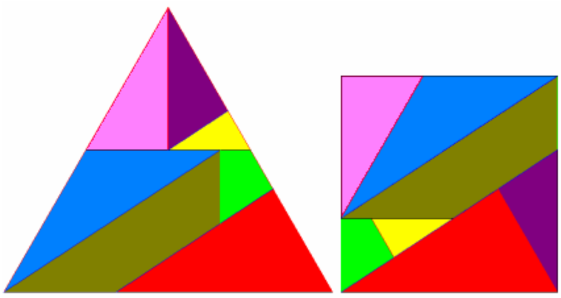
De esta manera, al hacer el último corte y colocar esa pieza en el lugar adecuado, hemos resuelto el problema planteado por mi amigo Julio.

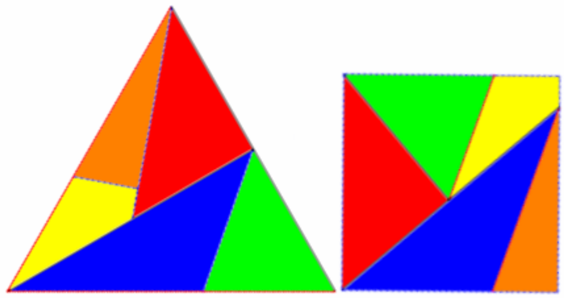
Desde luego, si coloreamos las piezas, podemos ver inmediatamente que se puede pasar del triángulo equilátero al cuadrado y viceversa con mucha facilidad.

Mi tarea estaba hecha y me sentí orgulloso de ella. Sin embargo, aún me quedé con la comezón en la cabeza, deseaba saber si sería posible hacer la disección en un número menor de piezas. Me parecía claro que debían ser cuatro el valor mínimo pues hay cuatro ángulos rectos en el cuadrado. Le envié mi trabajo a Julio, pero seguí pensando que siete piezas eran muchas... ¿Se podría hacer la disección con menos? Le pedí a Julio que, si él o alguien más lo lograba me envara la solución para que yo pudiera dormir tranquilo y no tuviera esta inquietud por más tiempo... Por lo pronto, y sin esfuerzo, logré una disección en seis piezas. ¡Esto sale inmediatamente! Vea que las piezas más largas (la de color azul y la de color ocre) se mantienen unidas en ambas figuras y el par puede considerarse como una sola pieza.



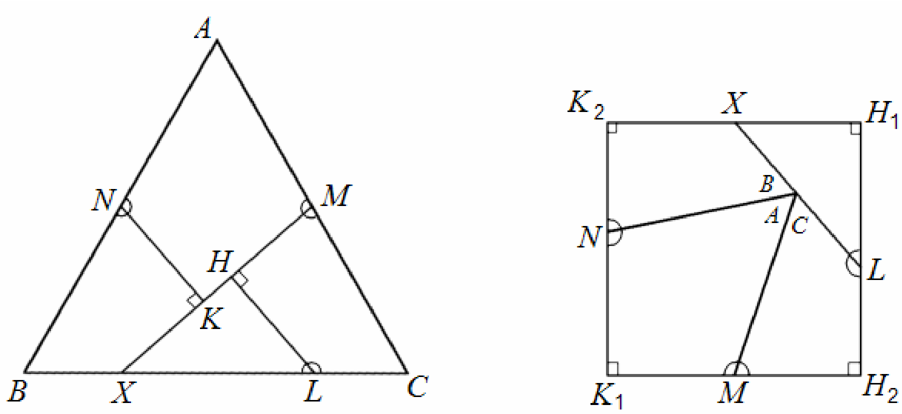
Después regresé a la disección elemental del triángulo equilátero en dos partes para formar un rectángulo. No me gustaba porque se hace una reflexión con una de las mitades del triángulo y yo quería sólo traslaciones y rotaciones, pues se me complica reconocer las piezas "en el espejo". Sin embargo, con ella obtuve cinco piezas. El asunto estaba mejorando...





Estaba pensando la posibilidad de que existiera una disección con cuatro piezas, pero en eso estaba cuando, desde Argentina, me respondió mi amigo Julio César con un correo cuyo asunto era Otra solución. "Para que ya puedas dormir tranquilo", escribió Julio, y envió un dibujo que le mandó desde España otro colega donde la disección se hace en cuatro piezas. Lamentablemente, el dibujo no traía ni una sola medida, pero se veía factible; aunque evidentemente quien hizo el dibujo dejó en sus trazos la evidencia de que no lo había copiado directamente de un prototipo, pues existía una diferencia de casi 8% en las correspondientes magnitudes lineales de las piezas entre uno y otro polígonos. No obstante, me afané y trabajé primero los ángulos para ver la factibilidad. Con ayuda del álgebra y algo de Geometría Analítica —además de muchos tropiezos con los errores que cometo, ya saben: copiar mal signos o exponentes de una expresión a otra— logré demostrar que efectivamente era una disección posible y observé que podría articularse. En ese momento, al concluir mi prueba, recordé haber visto algo similar en un libro clásico. Lo busqué y... ¡Sí, allí estaba! Se trata de un trabajo de construcción geométrica muy didáctico y que inicia el apartado con una afirmación notable que demostró Hilbert. En la octava reimpresión de la segunda edición del libro *Mathematical Models*, de H. M. Cundy y A. P. Rollett, impreso por Oxford University Press Press en 1976, encontré y les transcribo de la traducción libre que hice:

Disección General. Se sabe que si dos figuras rectilíneas son equivalentes, entonces cada una de las figuras puede disecarse en un número finito de piezas que pueden reacomodarse para formar con ellas a la otra figura. El procedimiento general es algo complicado, pero algunos casos particulares son atractivamente simples, uno de ellos se muestra en la figura siguiente.



Aquí se diseca a un triángulo equilátero en sólo cuatro piezas, las cuales pueden reacomodarse para formar con ellas el cuadrado equivalente.

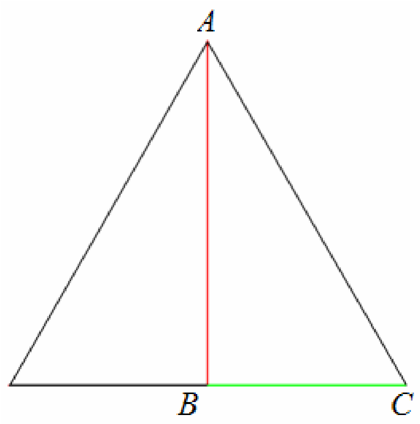
Primero encuentre el lado del cuadrado por la construcción usual de la media proporcional entre la mitad de la base y la altura del triángulo. Sean *M*, *N* los puntos medios de *AC* y *AB*. Corte por *MX*, con *X* sobre *BC*, y *MX* igual al lado del cuadrado equivalente. Con *XL* = ½*BC*, baje las perpendiculares *LH* y *NK* hacia *XM*, desde *L* y *N* respectivamente. Si las cuatro piezas resultantes tuviesen unas bisagras (o goznes) en *L*, *M* y *N* y se rotaran las piezas, podrían cerrar hasta formar el cuadrado K_1, K_2, H_1, H_2 como lo muestra el segundo diagrama. La demostración formal se le deja al lector., además de demostrar que *KX* = *HM*. Puede construirse un modelo con placas de metal; es necesario hacer un trabajo de precisión para colocar las bisagras.

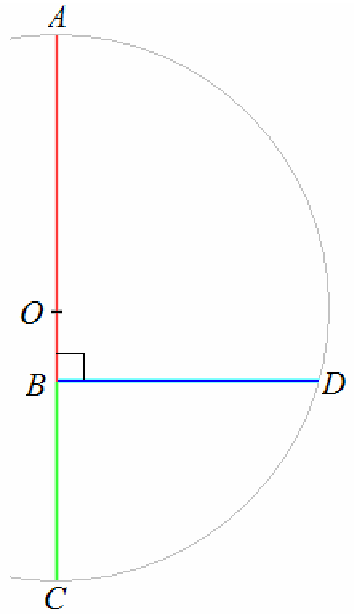
Otros ejemplos de disección de este tipo pueden encontrarse en *Mathemathical Recreations*, de MAURICE KRAITCHIK.

No lo mencionan, pero yo se los complemento, la editorial que publica este libro es Dover Publication Inc., de New York. Más adelante regresaré a dicha publicación pues vale la pena incluir algunas de las disecciones que allí vienen.

Seguramente el lector ya lo dedujo, pero no está de más precisarlo: los polígonos equivalentes son los que tienen la misma área. También, como un mero recordatorio, enseguida incluyo el método usual para encontrar la media proporcional de dos segmentos (también la conocemos como la *media geométrica*: $\sqrt{ab}$ es la media geométrica de *a* y *b*). Es importante para lo que vendrá posteriormente.

El método se realiza mediante la construcción de una semicircunferencia con un diámetro igual a la suma de los segmentos a los que se obtendrá la media. En la figura, este caso son la altura *AB* (color rojo) y la mitad de la base *BC* (color verde). Sobre el diámetro, en la unión de los segmentos se levanta la perpendicular que habrá de cortar en un punto (*D*) a la semicircunferencia, y la magnitud del segmento *BD* (color azul) construido será precisamente la media proporcional de los segmentos *AB* y *BC*, y también será la medida del lado del cuadrado de área equivalente.





Para quienes deseen hacer la construcción articulada que Cundy y Rollett proponen, les diré que deben tener muy buenas habilidades para el bricolaje. Sin embargo, les procuraré hacer menos pesada su labor proporcionándoles las medidas de las piezas.

No llamé con las mismas letras que Cundy y Rollett a los vértices de las piezas (obviamente, pues en ese momento ni recordaba que ya lo había visto). Consideré al lado del cuadrado como una unidad. En el punto *T* del cuadrado coinciden los vértices del triángulo equilátero cuyo lado mide $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$. Con ello, obtuve los siguientes valores que están truncados a la octava cifra decimal, pero el lector, a partir de las expresiones con radicales, podrá hacerlo con la precisión que necesite (¿de verdad necesitará más?).

$$AH = HG = CD = DE = \frac{1}{2} = 0.50000000$$

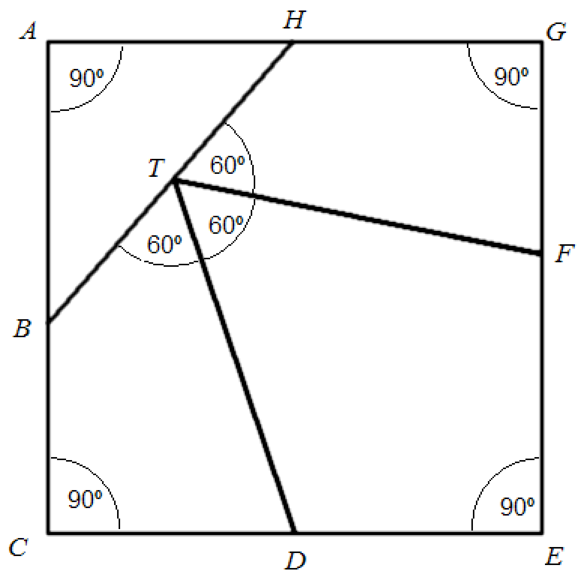
$$BH = TD = TF = DF = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = 0.\ 75983568$$

$$AB = EF = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}} = 0.\ 57214532$$

$$BC = FG = 1 - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}} = 0.\ 42785467$$

$$BT = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}} - \sqrt[4]{3}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}} = 0.\ 38676793$$

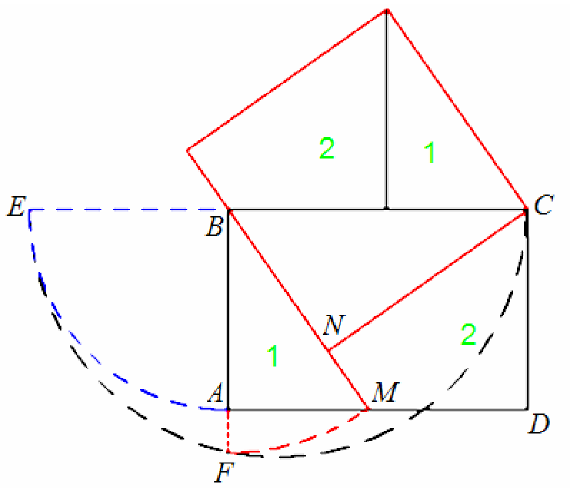
$$HT = \sqrt[4]{3}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} = 0.37306774$$

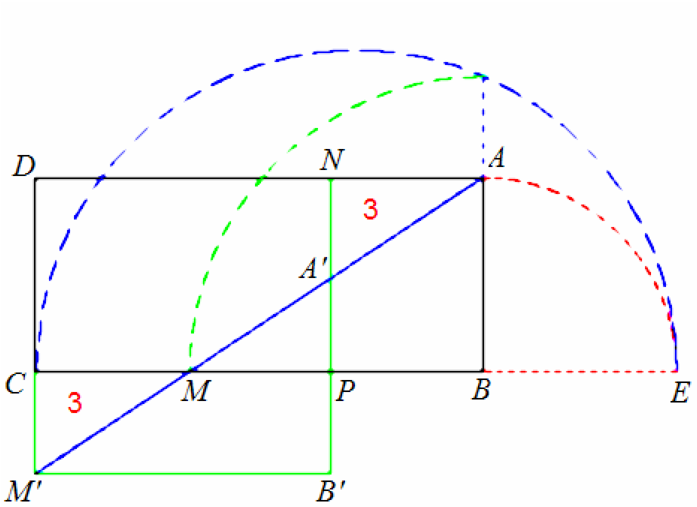


Es momento de hablar sobre algunas de las disecciones que ofrece Maurice Kraitchik en su obra. Cabe aclarar que el autor muestra las construcciones, pero al lector le corresponde hacer las demostraciones necesarias de que tales construcciones son correctas. En el primer problema del capítulo correspondiente a las disecciones geométricas solicita "Disecar un rectángulo cualquiera en tres piezas mediante un corte para formar un cuadrado." Esto es posible sólo para algunos rectángulos pues es claro que el número de cortes necesario se incrementa conforme aumenta la razón entre la longitud y la anchura (imagine un rectángulo muy alargado y lo verá).

En el caso que la razón mencionada sea menor que 2, es decir, el largo no excede al doble del ancho, Hay que construir el lado del cuadrado mediante la media proporcional, en este caso es *BF*, Con ese radio y haciendo centro en *B* se obtiene *M*. Así mismo, el segmento *CN* es perpendicular a *BM*. Las piezas con 1 y 2 son las correspondientes en el cuadrado y el rectángulo.

Si la razón entre la longitud y la anchura no excede el valor 4, es factible realizar la siguiente construcción.

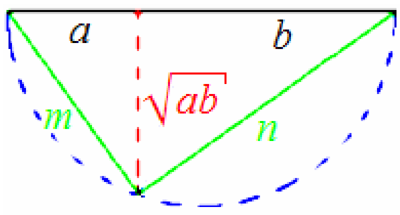




El segmento *BM* es la media proporcional de los lados del rectángulo, que es el valor del lado del cuadrado. La pieza 3 es la correspondiente en el rectángulo y en el cuadrado. Si el triángulo *BAM* del rectángulo se desliza sobre su hipotenusa, corresponderá al triángulo *B'A'M'* del cuadrado.

El segundo problema pide "Disecar un cuadrado en cinco piezas con las que se puedan formar dos cuadrados, uno con el doble de área que el otro." En este problema, el autor vuelve a utilizar la media proporcional, pero de una manera muy elegante para obtener los lados de los cuadrados cuyas áreas estarán en la misma proporción que guarden los segmentos en los que se partió el lado del cuadrado original. Veamos esto.

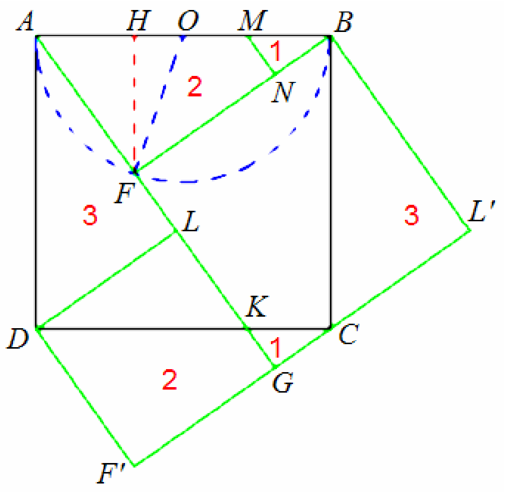
Usted tiene un segmento dividido en otros dos cuyas medidas *a* y *b* están en razón *r*. Construya la media proporcional por el método usual, ésta medirá $\sqrt{ab}$, el punto de la semicircunferencia que le permitió tal construcción y los extremos del segmento forman un triángulo rectángulo cuyos catetos miden *m* y *n*.



El segmento que señala a la media proporcional divide en dos triángulos semejantes al triángulo mayor. Al aplicar las propiedades de semejanza se ve que

$$\frac{m}{\sqrt{ab}} = \frac{n}{b}, \text{ de la cual puede deducir que } \frac{m^2}{n^2} = \frac{a}{b} = r.$$

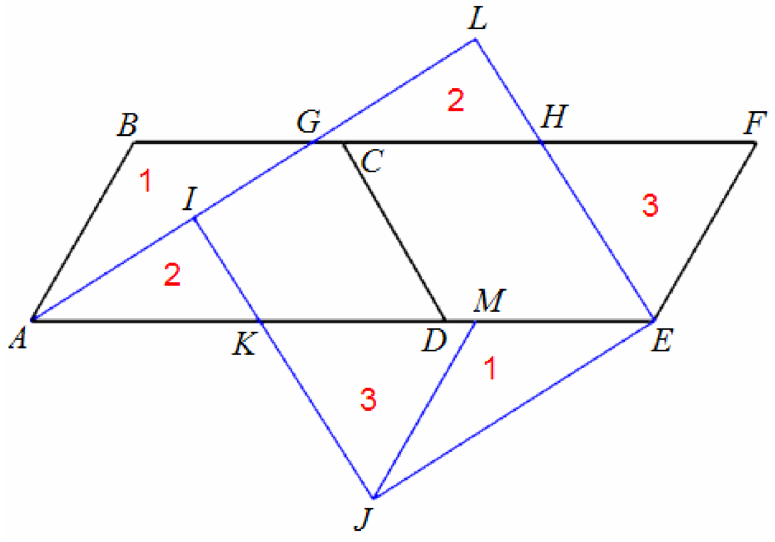
Aquí *O* es el punto medio de *AB*, además *H* parte a este segmento en razón 1:2, la misma razón en la que deseamos las áreas de los cuadrados, por tanto *AF* y *BF* son las medidas de los lados de los cuadrados buscados.



El punto *K* se obtiene al prolongar el segmento *AF*, y *L* es el pie de la perpendicular que se baja hacia *AK* desde *D*. El segmento *MB* tiene la misma medida que *KC*. El punto *N* es el pie de la perpendicular que se baja hacia *BF* desde *M*. El resto de la construcción es sencillo.

¿Este procedimiento servirá para disecar en dos cuadrados si las áreas están en otra razón cualquiera?

Otro problema más que nos plantea Kraitchik es "Disecar un hexágono regular en cinco piezas poligonales con las que se pueda formar un cuadrado."



Primero se corta al hexágono por uno de sus diámetros y con las dos piezas se forma un paralelogramo.

El punto *G*, sobre *BC*, es tal que *AG* es la media proporcional entre *AE* y la correspondiente altura del paralelogramo y, por ende, el lado del cuadrado. Por el punto *E*, baje una perpendicular a la prolongación del lado *AG* y llame *L* al pie de dicha perpendicular, la cual corta en *H* al lado *BF*.

Sobre el segmento *LA*, localice al punto *I* tal que *LI* = *LE*. Sobre el segmento *DE*, localice al punto *M* tal que *ME* = *BG*. El resto del proceso es producto de la construcción del cuadrado, por ello no abrumaré más al lector y dejaré aquí el tema.

Cualquier comentario que el lector desee hacerme, lo agradeceré; puede enviarlo a mi dirección electrónica: elias_loyola@hotmail.com

BIBLIOGRAFÍA

Si usted desea saber más sobre este asunto, puede consultar, además de los ya mencionados, los siguientes libros:

BOLTIANSKI, VLADIMIR. G. *Figuras equivalentes y equicompuestas*. Colección Lecciones populares de matemáticas. Editorial MIR, Moscú. 1981.

Como todos los libros de esta colección, está dirigido a quienes concluyeron satisfactoriamente su educación media (la de los soviéticos de esa época) y deseen ampliar sus conocimientos. Boltianski parte de algunos conceptos de geometría euclidiana para demostrar algunos teoremas importantes de la disección, unos de ellos con resultados verdaderamente sorprendentes. En la primera parte examina la disección de los polígonos y en la segunda la de los poliedros. (Desde la desintegración de la URSS, los libros de esta editorial son difíciles de adquirir, pero ahora son fáciles de conseguir en formato electrónico por Internet, por ejemplo en la dirección http://www.elibros.cl/matematicas.php. Sólo por presumir: mi ejemplar está autografiado por el autor.)

LINDGREN, HARRY. *Recreational problems in geometric dissections & how to solve them*. Dover Publictions, Inc. New York. 1972.

Mediante una gran cantidad de ejemplos profusamente ilustrados, y sin las pretensiones a que obligan los formalismos matemáticos, el autor muestra valiosas técnicas de disección, entre ellas las que podemos obtener a partir de los teselados. También plantea varios problemas para que el lector los resuelva y las soluciones están en uno de los apéndices. Incluye un capítulo para disecciones curvilíneas y otro más para disecciones de sólidos.

Elías LOYOLA CAMPOS

Aguascalientes, México

elias_loyola@hotmail.com