Solución de una clase de ecuaciones diferenciales - Método algebraico

José Albeiro Sánchez Cano

Departamento de Ciencias Básicas_ Universidad EAFIT

josanche@eafit.edu.co

Resumen En este trabajo se presenta un método algebraico elemental para resolver ecuaciones diferenciales con factores lineales reducibles a homogéneas, evitando los procesos largos que involucran su solución por los métodos clásicos.

Palabras clave Ecuación diferencial, pendiente, recta tangente, problema de valor inicial

Abstract This paper is to present an elementary algebraic method to solve differential equations with linear factors, avoiding the long processes that involve their solution by the classic methods.

Keywords Differential equations, slope, tangent line, initial value problem.

1. Introducción

En los cursos regulares de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) nos encontramos con ecuaciones diferenciales con factores lineales de la forma $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}$, donde a, b, c, α, β y γ son constantes. Aprendimos que si se cumple $a\beta - \alpha b = 0,$ entonces, mediante el cambio $y = ax + bt,$ la ecuación considerada se reduce a una ecuación con variables separables. En el otro caso, esto es, si $a\beta - \alpha b \neq 0,$ entonces, haciendo un cambio de las variables dependiente e independiente por las fórmulas

$$y = ax + by + c; \quad \tau = \alpha x + \beta y + \gamma; \quad y = y(\tau),$$

obtenemos una ecuación homogénea.

En este artículo, encontraremos la solución a este tipo de ecuaciones diferenciales, mediante un proceso algebraico, si en dicha ecuación se cumplen las siguientes condiciones: (i) $a\beta - \alpha b \neq 0$ y (ii) $\alpha + b = 0$.

Definición. Una ecuación diferencial de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se dice que es de coeficientes lineales si se puede representar de la forma

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

O bien, en la forma estándar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}. \tag{1}$$

Estaremos interesados en el caso donde el determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$, esto es, donde $a\beta - \alpha b \neq 0$. Luego el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ \alpha x + \beta y + \gamma &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

tiene una única solución (x_0, y_0) .

Nota. La condición (ii) hace que la ecuación diferencial (1) sea exacta y por lo tanto ésta puede ser resuelta por el método clásico.

2. Solución clásica

Consideremos el $a\beta - \alpha b \neq 0$, luego mediante las sustituciones $x = u + x_0$ y $y = v + y_0$, donde (x_0, y_0) es solución del sistema de ecuaciones (2), transforman la ecuación (1) en la ecuación homogénea

$$\frac{dv}{du} = \frac{au + bv}{\alpha u + \beta v} = \frac{a + b\left(\frac{v}{u}\right)}{\alpha u + \beta\left(\frac{v}{u}\right)},$$

la cual ya sabemos cómo resolver. Otra forma de resolver la ecuación (1), que resulta ser exacta, es mediante una agrupación adecuada de sus términos. La ecuación así ordenada se puede integrar término a término.

Así, la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ donde $M(x,y) = ax + by + c$ y $N(x,y) = -\alpha x - \beta y - \gamma$, resulta ser exacta ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = b = -\alpha = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (\text{condición (i)})$$

Esto también se puede ver después de agrupar así:

$$
\begin{aligned}
&(ax+by+c)dx-(\alpha x+\beta y+\gamma)dy=0\\
&(ax-\alpha y+c)dx-(\alpha x+\beta y+\gamma)dy=0, \qquad (b=-\alpha)\\
&axdx-\beta ydy-\alpha(ydx+xdy)+(cdx-\gamma y)=0
\end{aligned}
$$

Esta última ecuación se puede integrar término a término para obtener la primitiva

$$\frac{a}{2}x^2-\frac{\beta}{2}y^2-\alpha xy+cx-\gamma y=k \tag{3}$$

Ahora bien, nos proponemos a resolver la ecuación diferencial (1) usando sólo Algebra elemental, el cual, como veremos, evita realizar los largos cálculos que involucra resolver un tipo problema como el que se presenta por el método de las ecuaciones con coeficientes lineales o bien, por exactas.

Haremos el siguiente ejemplo (R. Nagle y E. Saff, 1991, pp. 74-76) de dos formas: 1. Usaremos el método clásico para su solución y 2. Usando el método algebraico, mediante unos pasos sencillos, sin hacer referencia al método como tal, solo como un ejercicio de algebra, después, se dará la fundamentación del método, esto se hace, para no perdernos en los detalles del mismo.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x-y-6}{x+y+2}. \tag{3}$$

En este caso se tiene: $a=3, b=-1, c=-6, \alpha=1, \beta=1, \gamma=2$ se cumple que $a\beta-\alpha b=4\neq 0$

Resolvemos primero el sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
3x-y-6&=0,\\
x+y+1&=0
\end{aligned} \tag{4}
$$

el cual arroja las soluciones: $x=1, y=-3.$ Por consiguiente, hacemos $x=u+1$ y $y=v-3$. Puesto que $dx=du$ y $dy=dv$, sustituyendo x y y en la ecuación (3) resulta

$$\frac{dv}{du}=\frac{3-\left(\frac{v}{u}\right)}{1+\left(\frac{v}{u}\right)}.$$

La ecuación anterior es homogénea, así que hacemos el cambio de variable $z = v/u$. Entonces $dv/du = z + u(dz/du)$, remplazando v/u se obtiene

$$z + u\frac{dz}{du} = \frac{3-z}{1+z}.$$

Al separar variables obtenemos

$$\int \frac{z+1}{z^2+2z-3}dz = -\int \frac{1}{u}du,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|z^2+2z-3\right| = -\ln|u| + C_1,$$

de lo cual se deduce que

$$z^2+2z-3 = Cu^{-2}.$$

Cuando se reemplaza en forma regresiva z, u y v, se obtiene

$$\left(\frac{v}{u}\right)^2 + 2\left(\frac{v}{u}\right) - 3 = Cu^{-2},$$

$$v^2+2uv-3u^2 = C,$$

$$(y+3)^2+2(x-1)(y+3)-3(x-1)^2 = C.$$

La última ecuación proporciona una solución implícita de (3).

Ahora utilicemos el resultado del método que propondremos. El cual realizaremos mediante los pasos siguientes:

Paso 1. Resolver el sistema (4) produce $x_0 = 1, \quad y_0 = -3.$

Paso 2. Hacemos $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+3}{x-1}.$

Paso 3. El resultado del paso 2 se iguala con ecuación (3) para obtener,

$$\frac{y+3}{x-1} = \frac{3x-y-6}{x+y+2}.$$

Paso 4. Resolvemos la ecuación dada en el paso 3, esto es,

$$xy + y^2 + 2y + 3x + 3y + 6 = 3x^2 - xy - 6x - 3x + y + 6$$
$$y^2 - 3x^2 - 2xy + 4y + 12x = C$$

donde C es una constante. La última ecuación es precisamente la solución de la EDO (3) y coincide con la solución proporcionada por el método clásico. Deberá notarse que se ha igualado a una constante C, ya que la ecuación es exacta.

Las preguntas que surgen: ¿Dónde está el truco? y ¿Funciona para toda ecuación diferencial de la forma (1)?. La respuesta a estas dos preguntas es dada en la siguiente proposición.

Proposición. La ecuación diferencial (1) además de satisfacer la condición $a\beta - \alpha b \neq 0$, se cumple que $\alpha + b = 0$, entonces, la solución se obtiene en una forma algebraica sencilla, la cual viene dada por

$$\beta y^2 - ax^2 + (\alpha - b)xy + (\gamma - \beta y_0 + bx_0)y - (c - ax_0 + \alpha y_0)x = k \tag{5}$$

donde (x_0, y_0) es la solución del sistema de ecuaciones (2), y k constante.

Observar que la ecuación (5) también puede ser escrita como

$$\beta y^2 - ax^2 + 2\alpha xy + 2\gamma y - 2cx = k \tag{6}$$

Puesto que $\alpha + b = 0$ y (x_0, y_0) es la solución del sistema de ecuaciones (2).

Demostración. Supongamos inicialmente que el punto (x_0, y_0) es solución del sistema (2). Luego la pendiente de la recta tangente viene dada por $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ con lo cual, haciendo $m = \frac{dy}{dx}$ e igualando con la ecuación (1) obtenemos

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}. \tag{7}$$

Resolviendo se llega a la siguiente ecuación

$$\beta y^2 - ax^2 + (\alpha - b)xy + (\gamma - \beta y_0 + bx_0)y - (c - ax_0 + \alpha y_0)x = k \tag{8}$$

O bien la ecuación (6).

Afirmamos que la ecuación (8) es solución de la ecuación diferencial (1). En efecto, diferenciando implícitamente con respecto a x, en la ecuación (8), se tiene

$$2\beta yy' - 2ax + (\alpha - b)y + (\alpha - b)xy' + (\gamma - \beta y_0 + bx_0)y' - (c - ax_0 + \alpha y_0) = 0$$

Donde y´ denota la derivada con respecto x. Despejando de ésta última ecuación y´, se tiene:

$$y' = \frac{(c - ax_0 + \alpha y_0) + 2ax - (\alpha - b)y}{2\beta y + (\alpha - b)x + (\gamma - \beta y_0 + bx_0)} \tag{9}$$

Por una parte, el numerador de la ecuación (9) es

$$\begin{aligned}(c - ax_0 + \alpha y_0) + 2ax - (\alpha - b)y &= -ax_0 - by_0 - ax_0 + \alpha y_0 + 2ax - \alpha y + by \\ &= 2a(x - x_0) - (\alpha - b)(y - y_0).\end{aligned}$$

pues $ax_0 + by_0 + c = 0$. Análogamente, el denominador de la ecuación (9) viene dado por

$$2\beta y + (\alpha - b)x + (\gamma - \beta y_0 + bx_0) = 2\beta(y - y_0) + (\alpha - b)(x - x_0)$$

Con lo que la ecuación (9) es equivalente a

$$y' = \frac{2a(x - x_0) - (\alpha - b)(y - y_0)}{2\beta(y - y_0) + (\alpha - b)(x - x_0)} \tag{10}$$

Ahora bien, ya que (x_0, y_0) es solución del sistema (1) se tiene que $ax + by + c = a(x - x_0) + b(y - y_0)$ de igual forma, $\alpha x + \beta y + \gamma = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)$. Así que la ecuación (1) queda

$$y' = \frac{a(x - x_0) + b(y - y_0)}{\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)} \tag{11}$$

Igualando las ecuaciones (10) y (11) se tiene:

$$\frac{2a(x - x_0) - (\alpha - b)(y - y_0)}{2\beta(y - y_0) + (\alpha - b)(x - x_0)} = \frac{a(x - x_0) + b(y - y_0)}{\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)}$$

Para simplificar los cálculos, llamamos $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$, con lo cual, se obtiene finalmente,

$$\frac{2aX-(\alpha-b)Y}{2\beta Y+(\alpha-b)X}=\frac{aX+bY}{\alpha X+\beta Y}$$

$$2a\alpha X^2+2a\beta XY-\alpha(\alpha-b)XY-\beta(\alpha-b)Y^2=2a\beta XY+2b\beta Y^2+a(\alpha-b)X^2+b(\alpha-b)XY$$

Reorganizando

$$\begin{aligned}(2b\beta+\beta(\alpha-b))Y^2+(\beta(\alpha-b)+\alpha(\alpha-b))XY+(a(\alpha-b)-2a\alpha)X^2&=0\\ \beta(\alpha+b)Y^2+(\alpha-b)(\alpha+b)XY-a(\alpha+b)X^2&=0\\ (b+\alpha)\left[\beta Y^2+(\alpha-b)XY-aX^2\right]&=0\\ (b+\alpha)k&=0,\qquad k\neq 0\\ b+\alpha&=0\end{aligned}$$

Observar que el factor que acompaña a $\alpha+b$, esto es, $\beta Y^2+(\alpha-b)XY-aX^2=k$, no es más que la ecuación (8), es decir, la solución de la EDO (1). Observar que esto se sigue ya que la ecuación diferencial (1) con la condición $\alpha+b=0$, es exacta.

3. Ejemplos

El primer ejemplo al que le aplicaremos el método algebraico, será una EDO separable y el segundo ejemplo será un problema de valor inicial (PVI), las cuales pueden ser fácilmente obtenidas mediante su solución clásica. Deberá observarse que no habrá necesidad de aprenderse la fórmula (6).

3.1. Ejemplo 1. Resolver la EDO

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

Solución. En este caso se tiene: $a=0, b=-1, c=0, \alpha=1, \beta=0, \gamma=0$. Se cumple las dos condiciones: (i) $a\beta-\alpha b=1\neq 0$ y (ii) $\alpha+b=0$. Lo cual indica que podemos seguir.

Paso 1: claramente se tiene $(x_0,y_0)=(0,0)$.

Paso 2: la pendiente de la recta tangente a la curva que pasa por $(0,0)$ viene dada por $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$.

Paso 3: resolvemos la ecuación $\frac{y}{x} = -\frac{y}{x}$. El resultado de esto da, $xy = -xy$, o equivalentemente

$y = \frac{k}{x}$ la cual es la solución de la EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

3.2. Ejemplo 2. Resolver el problema de valor inicial (PVI)

$$(5x + 2y + 1)dx + (2x + y + 1)dy = 0, \qquad y(1) = 1 \tag{11}$$

Solución. Escribimos la ecuación en la forma (1), esto es,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5x + 2y + 1}{2x + y + 1}. \tag{12}$$

En este caso se tiene: $a = -5, b = -2, c = -1, \alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 1$

Se cumple la condición: $\alpha + b = 0$. Lo cual indica que podemos seguir. La condición (i) indica que el sistema de ecuaciones (2) tiene solución única.

Paso 1: Resolvemos primero el sistema de ecuaciones, el cual sabemos que tiene solución,

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= -1 \\ 2x + y &= -1, \end{aligned}$$

el cual arroja las soluciones: $x = 1, y = -3$. El método consiste entonces en escribir $\frac{dy}{dx} = \frac{y+3}{x-1}$, la cual a su vez, se iguala con la EDO (11), con lo cual obtenemos

$$\frac{y+3}{x-1} = -\frac{5x + 2y + 1}{2x + y + 1}.$$

O equivalentemente

$$5x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 2y + 2 = 0$$

Pero según el método, hacemos el lado izquierdo de la ecuación igual a una constante, esto es,

$$5x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 2y = k$$

Ahora para obtener el valor de k, hacemos uso de la condición inicial $x = 1, y = 1,$ dada por la condición (11). Reemplazando estos valores en la ecuación anterior, se obtiene el valor de k, a saber, $k = 14.$ así que la solución del PVI, es $5x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 2y = 14.$

Resolviendo esta última ecuación, mediante la solución de una exacta, se tiene:

$$M(x, y) = 5x + 2y + 1 \quad (A), \quad N(x, y) = 2x + y + 1 \quad (B)$$

Condición de exacta $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2 = \dfrac{\partial N}{\partial x}.$ Con lo cual

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = M(x, y) = 5x + 2y + 1, \quad (C)$$

Integrando con respecto a x en la ecuación (C), se obtiene

$$f(x, y) = \frac{5}{2}x^2 + 2xy + x + h(y) \qquad (D)$$

Derivando con respecto a y e igualando con la ecuación (B) tenemos

$$\begin{aligned} &2x + h'(y) = 2x + y + 1 \\ &h'(y) = y + 1 \\ &h(y) = \frac{1}{2}y^2 + y \end{aligned}$$

Remplazando en (D), tenemos

$$f(x, y) = \frac{5}{2}x^2 + 2xy + x + \frac{1}{2}y^2 + y$$

Así que la solución de la ecuación diferencial viene dada por $f(x, y) = k$, o bien

$$\frac{5}{2}x^2 + 2xy + x + \frac{1}{2}y^2 + y = k$$

La cual coincide con nuestra solución, encontrada algebraicamente.

4. Conclusiones

En este trabajo presentamos una forma alternativa de resolver una ecuación diferencial con factores lineales de la forma (1), bajo ciertas condiciones, evitando los procesos largos, los cuales ocurren cuando se resuelven con los métodos clásicos. Es claro que el método algebraico expuesto resulta ser muy restrictivo, pero resulta ser mucho más sencillo de resolver una vez se cumplan las condiciones (i) y (ii), las cuales son fáciles de verificar.

5. Bibliografía

Nagle, R.K. y Saff, E.B. (1992). *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*. México, Addison-Wesley Iberoamericana.

O. García J., J. Villegas G., J.I. Bedoya, J.A. Sánchez C. (2010). *Ecuaciones Diferenciales*. Colombia, Fondo Editorial Universidad EAFIT.