El desafío de Navier-Stokes

0. El problema

En la página web http://www.claymath.org/ del Instituto Clay de Matemáticas, institución creada con la fortuna del magnate Landon T. Clay y gestionada por el matemático Arthur Jaffe de la Universidad Harvard a fin de premiar la resolución de problemas matemáticos destacados y otras tareas de investigación (Clay Research Award), figura el siguiente texto:

> Waves follow our boat as we meander across the lake, and turbulent air currents follow our flight in a modern jet. Mathematicians and physicists believe that an explanation for and the prediction of both the breeze and the turbulence can be found through an understanding of solutions to the Navier-Stokes equations. Although these equations were written down in the 19th Century, our understanding of them remains minimal. The challenge is to make substantial progress toward a mathematical theory which will unlock the secrets hidden in the Navier-Stokes equations.
>
> ***Las olas siguen nuestro barco serpenteando sobre el lago, y las corrientes de aire turbulentas siguen nuestro vuelo en un avión moderno. Los matemáticos y los físicos creen que se puede encontrar una explicación para la predicción, tanto de la brisa del lago como de la turbulencia del vuelo, a través de la comprensión de las soluciones a las ecuaciones de Navier-Stokes. Aunque las ecuaciones fueron escritas en el siglo XIX, nuestra comprensión de ellas sigue siendo mínima. El reto es hacer un progreso sustancial hacia una teoría matemática que permita descubrir los secretos escondidos en las ecuaciones de Navier-Stokes.***

(http://www.claymath.org/millenium-problems/navier%E2%80%93stokes-equation)

Las ecuaciones de Navier-Stokes, formuladas por Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) en 1822, y por George Gabriel Stokes (1819-1903) en 1841, establecen el modelo clásico del movimiento de los fluidos incompresibles. Sin embargo, no existen soluciones de estas ecuaciones, salvo en casos particulares muy restrictivos. Todavía no se conocen todas sus implicaciones, principalmente debido a la su no linealidad y a los múltiples términos acoplados.

Se plantea el problema de progresar hacia una teoría matemática más efectiva sobre lo que hoy entendemos como dinámica de fluidos. Interesa probar, principalmente, si a partir de cualquier valor físicamente aceptable de las condiciones iniciales dadas para un fluido en desplazamiento laminar, la solución del flujo en todo instante posterior es también un flujo en desplazamiento laminar.

Al no existir soluciones teóricas, es preciso recurrir actualmente al análisis numérico para determinar una solución aproximada en cada ocasión o problema concreto. A la rama de la mecánica de fluidos que se ocupa de la obtención de soluciones con métodos numéricos se la denomina dinámica de fluidos computacional (*Computational Fluid Dynamics*).

1. Introducción

Sabemos que las estructuras materiales se agregan en diferentes estados o fases, generalmente en función de su temperatura, de la presión, etc., teniendo estos estados características y propiedades diversas.

Algunos de los estados de agregación de la materia tienen lugar espontáneamente en las condiciones del entorno natural en el que se desarrolla la vida humana. Son los estados sólido, líquido, gaseoso y plasmático.

Otros estados de agregación, como los condensados de Bose-Einstein, los plasmas Gluón-Quark, etc., solo se estructuran en condiciones extremas.

La Física propone un modelo matemático de estudio de las agregaciones de materia naturales en nuestro entorno mediante lo que se denomina Mecánica de medios continuos, denominando a estos, *sólidos deformables, sólidos rígidos* y *fluidos*. El término *medio continuo* se utiliza en general para describir tanto el modelo matemático como una porción física de agregación de materia cuyo comportamiento pueda ser descrito mediante el modelo. Los fluidos engloban, a su vez, los estados líquido, gaseoso y plasmático.

1. Los fluidos:

Los fluidos son estados materiales que, debido a la debilidad de las fuerzas de cohesión intermolecular cambian de forma adaptándose al recipiente que les contiene sin que existan fuerzas restitutivas que les hagan recuperar la forma original, como ocurriría en el caso de un sólido deformable.

Los líquidos son fluidos que, adaptando su forma a la forma del recipiente contenedor, mantienen su propio volumen, mientras que los gases adaptan su forma al recipiente que les contiene y ocupan un volumen que también depende del recipiente contenedor, de la temperatura, de la presión, etc.

Las agrupaciones moleculares no cohesionadas fluyen en estos estados de la materia obedeciendo a la gravedad, al rozamiento o viscosidad, a la presión, etc..

2. Magnitudes:

Si consideramos un volumen elemental, dV, de fluido que en un determinado instante es ocupado por una masa elemental, dm, podemos definir:

Densidad de masa:

$$\delta = \frac{dm}{dV}$$

Velocidad: es el desplazamiento del volumen elemental por unidad de tiempo:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right)$$

Aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \left(\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}, \frac{du_3}{dt} \right)$$

componentes del vector aceleración:

$$a_k = \frac{du_k}{dt} = \frac{\partial u_k}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial u_k}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u_k}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial u_k}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial u_k}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial u_k}{\partial x_2}u_2 + \frac{\partial u_k}{\partial x_3}u_3 =$$

$$= \frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} u_j = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla} u_k, \qquad k = 1,2,3 \qquad [2]$$

Viscosidad:

Si es $\vec{f}_t$ la componente tangencial de la fuerza con la que un volumen elemental de referencia del fluido interactúa con el resto del fluido, la viscosidad es el parámetro ν tal que $\vec{f}_t = \nu.\vec{\nabla}^2\vec{u}$. Si dicha fuerza tangencial es nula, la viscosidad es cero y el fluido se dice no viscoso.

3. Tipología de los fluidos:

- Fluidos newtonianos: son aquellos fluidos de viscosidad constante. Son ejemplos el agua, el aire, y la mayor parte de los gases.

Los fluidos con viscosidad variable se dirán, pues, no newtonianos. Su viscosidad depende de factores como la velocidad, la temperatura, densidad, etc.

- Fluidos no viscosos o perfectos: son los fluidos de viscosidad nula. Los fluidos con viscosidad no nula se dicen reales.

- Fluidos incompresibles: Son fluidos con densidad constante. La mayor parte de los líquidos son incompresibles. Los fluidos con densidad variable, generalmente los gases, se denominan fluidos compresibles.

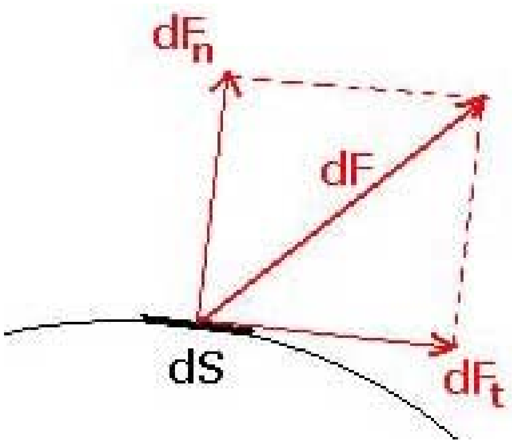
- Fluidos estacionarios: Son fluidos que se desplazan con velocidad constante. Caso contrario se dirán no estacionarios o no estables.

- Fluidos irrotacionales o no turbulentos, son los que se desplazan sin torbellinos o turbulencias, y se dice también que tienen flujo laminar. En ellos se verifica que el rotacional de la velocidad es nulo: $\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = 0$

- Los fluidos turbulentos o rotacionales verifican que $\vec{\nabla} \wedge \vec{u} \neq 0$

4. Fluidos perfectos y fluidos reales

Si consideramos que la fuerza dF de interacción que ejerce un elemento diferencial de superficie, dS, del dominio D con el resto del fluido tiene en general dos componentes, una normal a la superficie dS y otra tangencial a la misma.



Un fluido se dice perfecto o no viscoso si la componente tangencial es nula, por lo que la interacción de la superficie de un dominio cualquiera con el resto del fluido es de dirección normal a la superficie del mismo. En los fluidos perfectos es posible la descripción de su movimiento sin tener en cuenta efectos de viscosidad o frotamiento.

Los fluidos perfectos son simplemente modelos que permiten simplificar los cálculos, y son prácticamente inexistentes en la naturaleza. Los fluidos reales tienen una componente tangencial de frotamiento viscoso que aparece en el movimiento del mismo. Es únicamente en reposo cuando un fluido tiene un comportamiento perfecto. La estática de los fluidos reales se identifica con la estática de los fluidos perfectos.

En los fluidos reales la componente tangencial es no nula y su módulo es proporcional a la divergencia del gradiente de la velocidad, esto es, proporcional a su laplaciano. La constante de proporcionalidad es, como se ha definido antes, la viscosidad:

$$\vec{f}_t = \nu.\nabla^2\vec{u}$$

5. Compresibilidad e incompresibilidad

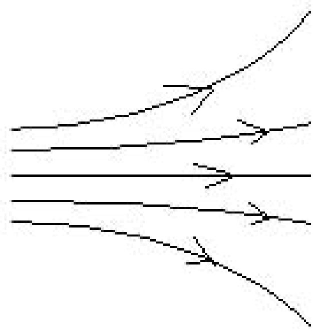
Un fluido se dice incompresible si el volumen ocupado por una masa del mismo no varia en función de la presión exterior. Los líquidos en general pueden ser considerados fluidos incompresibles o de densidad constante.

Matemáticamente, se habría de cumplir que la divergencia de la función velocidad es nula, en un fluido incompresible:

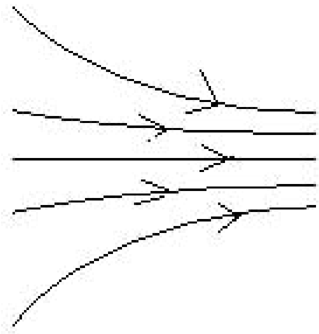
$$\nabla u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

Un fluido es compresible cuando el volumen ocupado por una masa dada del mismo varía en función de la presión exterior. Los gases son fluidos compresibles, y en ellos la divergencia de la velocidad en cada punto es positiva o negativa:

$$\nabla u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} > 0$$



$$\nabla u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} < 0$$



La obtención de relaciones se realiza mediante las ecuaciones que proporcionan los teoremas de conservación de la física clásica: teorema de conservación de la masa, teorema de conservación del momento lineal y teorema de conservación de la energía.

6. La presión sobre un fluido:

La presión sobre un volumen elemental de fluido, dV, origina una fuerza sobre el mismo dada por $\vec{f}_p = -\vec{\nabla} p.dV$, es decir:

$$\vec{f}_p = \left(f_{p1}, f_{p2}, f_{p3}\right) = -\vec{\nabla} p.dV = -\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3}\right).dV$$

7. Las ecuaciones de Euler:

Sea un fluido perfecto (con viscosidad nula). Si consideramos un volumen elemental de referencia, dV, conteniendo una masa dm. que se desplaza en el seno de un fluido con velocidad $\vec{u} = \vec{u}(r,t)$, y que ejerce sobre el mismo una presión $\vec{p}$ por unidad de volumen, estando sometido todo el fluido a una fuerza externa $\vec{f}_e$, también por unidad de volumen, se tiene que, al aplicar la segunda ley de Newton en un desplazamiento de velocidad $\vec{u}$ resulta:

$$dm.\frac{du}{dt} = \vec{f} = -\vec{p}.dV + \vec{f}_e.dV$$

donde el total de la fuerza aplicada es la suma de la fuerza debida a la presión sobre el volumen de referencia y a causas externas, como gravedad, etc. Se tiene, entonces:

$$dm.\frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}p.dV + \vec{f}_e.dV \rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}p.\frac{dV}{dm} + \vec{f}_e.\frac{dV}{dm} = -\frac{1}{\delta}\vec{\nabla}p + \frac{1}{\delta}\vec{f}_e$$

En definitiva:

$$\left(\frac{du_1}{dt},\frac{du_2}{dt},\frac{du_3}{dt}\right) = -\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial p}{\partial x_1},\frac{\partial p}{\partial x_2},\frac{\partial p}{\partial x_3}\right) + \frac{1}{\delta}\left(f_{e1}, f_{e1}, f_{e1}\right)$$

y las componentes de la aceleración se pueden escribir, utilizando las expresiones [2], en la forma:

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}u_1 = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{\delta}f_{e1}$$
$$\frac{du_2}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}u_2 = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{\delta}f_{e2}$$
$$\frac{du_3}{dt} = \frac{\partial u_3}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}u_3 = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{1}{\delta}f_{e3}$$

Este conjunto de ecuaciones se conoce como *ecuaciones de Euler para un fluido perfecto (sin viscosidad).* En forma compacta, serían:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}u_i = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\delta}f_{ei}, \qquad i = 1,2,3$$

Si se trata de un fluido perfecto e incompresible, entonces las ecuaciones son

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}u_i = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\delta}f_{ei}, \qquad i = 1,2,3$$
$$\vec{\nabla}\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

para condiciones iniciales dadas por $\vec{u}(r,0) = \vec{u}_0(r)$

8. Las ecuaciones de Navier-Stokes:

Son las ecuaciones que se obtienen al aplicar la segunda ley de Newton a un fluido real (con viscosidad no nula, $\nu \neq 0$). Para obtenerlas basta repetir los pasos del apartado anterior para las ecuaciones de Euler, solo que ahora hemos de considerar además de las fuerzas actuantes debidas tanto a la presión, $\vec{f}_p$, y posibles fuerzas externas sobre todo el fluido, $\vec{f}_e$, como también a la fuerza por unidad de volumen debida a la fricción o rozamiento, $\vec{f}_t$:

$$dm.\frac{du}{dt} = \vec{f} = -\vec{p}.dV + \nu.\vec{\nabla}^2\vec{u}.dV + \vec{f}_e.dV$$

de lo cual:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\delta}\vec{\nabla}p + \frac{1}{\delta}\nu\vec{\nabla}^2 u + \frac{1}{\delta}\vec{f}_e$$

$$\left(\frac{du_1}{dt}, \frac{du_2}{dt}, \frac{du_3}{dt}\right) = -\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3}\right) + \frac{1}{\delta}\nu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}\right) + \frac{1}{\delta}\left(f_{e1}, f_{e1}, f_{e1}\right)$$

y las componentes:

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\nu}{\delta}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\delta}f_{ei}, \qquad i = 1,2,3$$

finalmente:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}u_i = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\nu}{\delta}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\delta}f_{ei}, \qquad i = 1,2,3$$

Si el fluido es incompresible:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}u_i = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\nu}{\delta}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\delta}f_{ei}, \qquad i = 1,2,3$$

$$\nabla u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

para condiciones iniciales dadas por $\vec{u}(r,0) = \vec{u}_0(r)$

Soluciones:

Si se tiene un fluido incompresible de densidad δ y viscosidad ν, sometido a una fuerza externa, $\vec{f}_e = \left(f_{e1}, f_{e2}, f_{e3}\right)$, el problema de determinar la presión por unidad de volumen, P, y la velocidad de desplazamiento $\vec{u}(x,t) = \left(u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)\right)$, del fluido, requiere la resolución de un sistema de cuatro ecuaciones no lineales con cuatro incógnitas:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}u_1 = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\nu}{\delta}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\delta}f_{e1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}u_2 = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\nu}{\delta}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\delta}f_{e2}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla}u_3 = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\nu}{\delta}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\delta}f_{e3}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

La dificultad de resolución de un sistema de ecuaciones de este tipo es obvia. Y el no encontrar una resolución teórica directa obliga al empleo de métodos numéricos mediante el uso de ordenadores para obtener resultados parciales aplicables a problemas concretos en cada caso.

Es este hecho lo que impulsa a la institución Clay y a muchos otros investigadores a afrontar el desafío de encontrar la manera de explicar el movimiento de fluidos incompresibles mediante algún procedimiento teórico que pueda superar el obstáculo que representan las ecuaciones de Navier-Stokes. Hay premios ofrecidos ya para una teoría de mecánica de fluidos que pueda presentarnos la información suficiente y de la cual ahora se carece.

Documentación:

Shnirelman, A.: *On the nonuniqueness of weak solutions of the Euler equation, Comm. Pure & Appl. Math. 1997.*

Fefferman, Charles L.: *Existence & Smoothness of the Navier-Stokes Equation, 2000 (http://casanchi.com/mat/problema03.pdf)*

Temam, R.: *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis, Amst., 1977*