Una demostración vectorial del teorema de las proporciones de Tales[1]

Wilfredo Zuleta R[2]

"Lo más sabio es el tiempo, porque esclarece todo"

Tales de Mileto

Teorema de las proporciones de Tales[3]:

Sean L y L' dos rectas concurrentes en el punto A, y M, N y P tres rectas paralelas y B, B', C, C', D y D' los cortes de estas rectas con L y L', entonces tenemos las siguientes proporciones: (Ver figura 1)

1. $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{B'D'}}{\overline{B'C'}}$, o sea, $\dfrac{\|\overrightarrow{BD}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{B'D'}\|}{\|\overrightarrow{B'C'}\|}$
2. $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{C'D'}}$, o sea, $\dfrac{\|\overrightarrow{BC}\|}{\|\overrightarrow{CD}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{B'C'}\|}{\|\overrightarrow{C'D'}\|}$
3. $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CC'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BB'}}$, o sea, $\dfrac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{CC'}\|} = \dfrac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{BB'}\|}$

[1] Tales de Mileto (siglo VI a.C.) fue sobresaliente tanto en la Geometría como en Física, Astronomía y Filosofía. Fue considerado uno de los Siete Sabios de Grecia. No hay documentos acerca de su vida que provengan directamente del propio Tales, sino recopilaciones de escritores/narradores posteriores a él.

[2]Profesor jubilado del Núcleo Universitario "Rafael Rangel" (N.U.R.R/Trujillo). Universidad De Los Andes. Mérida/Venezuela. email: wrzr2001us@hotmail.com

[3] Este teorema es conocido también como *primer teorema de Tales*. Existen otros cuatro teoremas adicionales atribuidos a él y de gran importancia en la Geometría

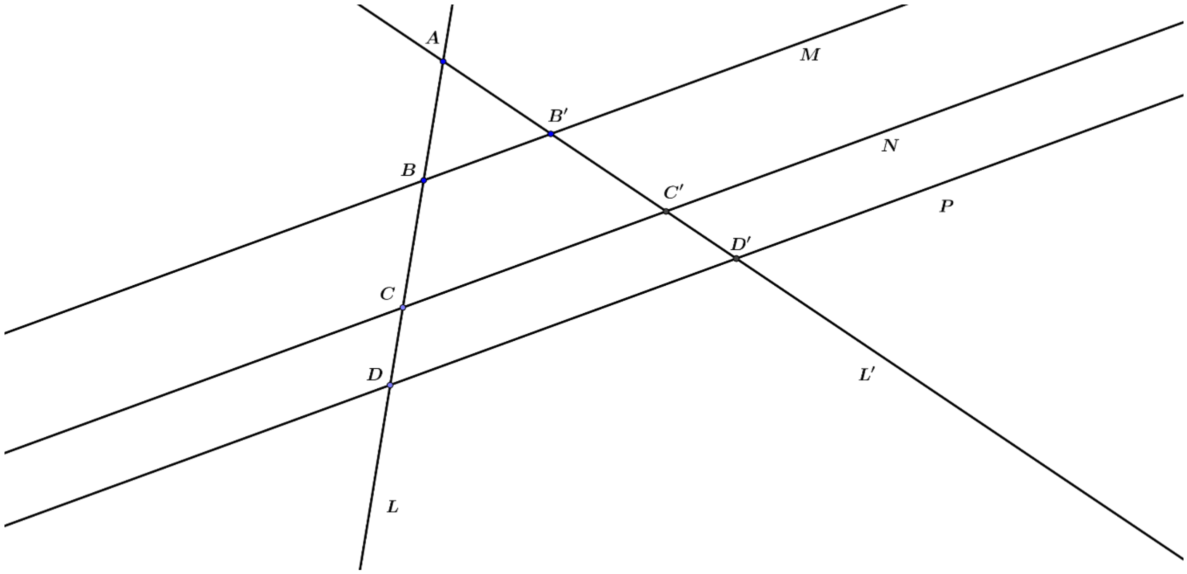

Figura 1

Demostración

En primer lugar, definamos los vectores unitarios directores de las rectas concurrentes L y L′ y de las rectas paralelas M, N y P, respectivamente, $\vec{v}$, $\vec{v'}$ y $\vec{u}$

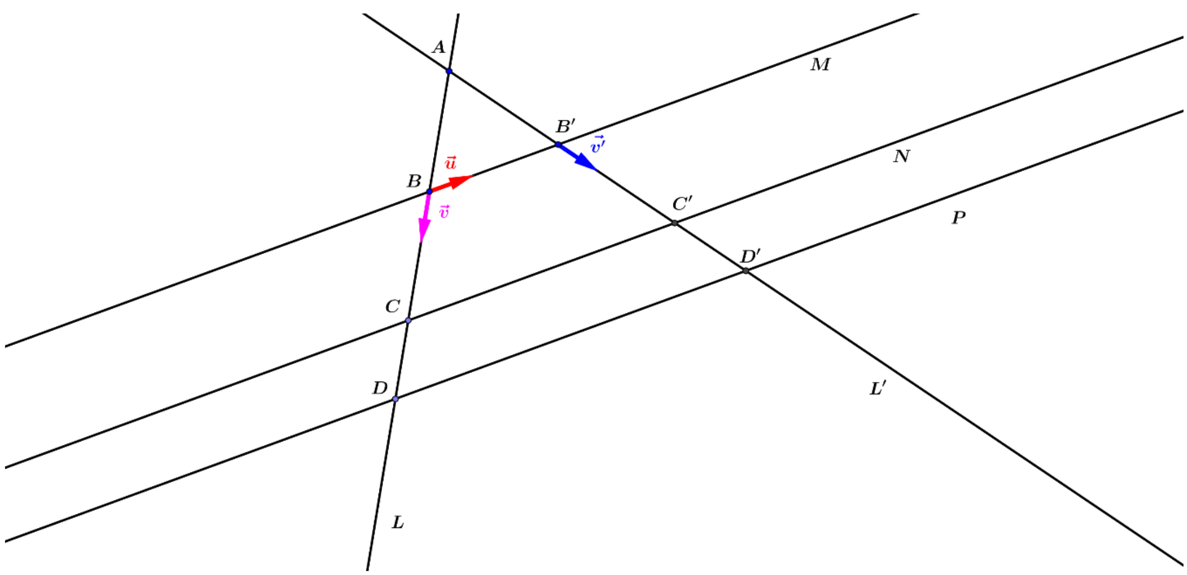

Figura 2

Observamos que los conjuntos $\left\{\vec{u},\vec{v}\right\},\left\{\vec{u},\vec{v}'\right\}$ y $\left\{\vec{v},\vec{v}'\right\}$ son linealmente independientes, de manera que forman bases de $\mathbb{R}^2$, en particular tenemos que $\vec{v}=\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}'$ $(*)$, donde se puede asegurar que $\alpha\neq 0$ y $\beta\neq 0$ en vista de la independencia lineal que acabamos de mencionar.

Prueba de la proporciones (1): $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{B'D'}}{\overline{B'C'}}$

$$\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\vec{v}\overset{Por\,(*)}{=}\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\left(\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}'\right)=\alpha\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\vec{u}+\beta\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\vec{v}'\quad (I)$$

$$\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{BB'}\right\|\vec{u}+\left\|\overrightarrow{B'C'}\right\|\vec{v}'-\left\|\overrightarrow{C'C}\right\|\vec{u}=\left(\left\|\overrightarrow{BB'}\right\|-\left\|\overrightarrow{C'C}\right\|\right)\vec{u}+\left\|\overrightarrow{B'C'}\right\|\vec{v}'\quad (II)$$

De (I) y (II) obtenemos:

$$\beta\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{B'C'}\right\|\ \therefore\ \beta=\frac{\left\|\overrightarrow{B'C'}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}\quad (III)$$

Por otra parte, $\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\vec{v}\overset{Por\,(*)}{=}\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\left(\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}'\right)=\alpha\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\vec{u}+\beta\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\vec{v}'\quad (IV)$

$$\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BB'}\right\|\vec{u}+\left\|\overrightarrow{B'D'}\right\|\vec{v}'-\left\|\overrightarrow{D'D}\right\|\vec{u}=\left(\left\|\overrightarrow{BB'}\right\|-\left\|\overrightarrow{D'D}\right\|\right)\vec{u}+\left\|\overrightarrow{B'D'}\right\|\vec{v}'\quad (V)$$

De (IV) y (V) conseguimos:

$$\beta\left\|\overrightarrow{BD}\right\|=\left\|\overrightarrow{B'D'}\right\|\ \therefore\ \beta=\frac{\left\|\overrightarrow{B'D'}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BD}\right\|}\quad (VI)$$

Ahora, de (III) y (VI) encontramos:

$$\beta=\frac{\left\|\overrightarrow{B'C'}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{\left\|\overrightarrow{B'D'}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BD}\right\|}\ \therefore\ \frac{\left\|\overrightarrow{BD}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{\left\|\overrightarrow{B'D'}\right\|}{\left\|\overrightarrow{B'C'}\right\|}\quad \text{Q.E.D.}$$

Prueba de las proporciones (2): $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{C'D'}}$

$$\overrightarrow{CD}=\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\vec{v}\overset{Por\,(*)}{=}\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\left(\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}'\right)=\alpha\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\vec{u}+\beta\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\vec{v}'\quad (VII)$$

$$\overrightarrow{CD}=\left\|\overrightarrow{CC'}\right\|\vec{u}+\left\|\overrightarrow{C'D'}\right\|\vec{v}'-\left\|\overrightarrow{C'C}\right\|\vec{u}=\left(\left\|\overrightarrow{CC'}\right\|-\left\|\overrightarrow{C'C}\right\|\right)\vec{u}+\left\|\overrightarrow{C'D'}\right\|\vec{v}'\quad (VIII)$$

De (VII) y (VII) tenemos que:

$$\beta\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\overrightarrow{C'D'}\right\| \ \therefore\ \beta = \frac{\left\|\overrightarrow{C'D'}\right\|}{\left\|\overrightarrow{CD}\right\|} \ (IX)$$

Ahora de (III) y (IX) conseguimos:

$$\beta = \frac{\left\|\overrightarrow{B'C'}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{C'D'}\right\|}{\left\|\overrightarrow{CD}\right\|} \ \therefore\ \frac{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{CD}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{B'C'}\right\|}{\left\|\overrightarrow{C'D'}\right\|} \ \text{Q.E.D.}$$

Prueba de las proporciones (3): $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CC'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BB'}}$

$$\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AC'}\right\|\vec{v}' - \left\|\overrightarrow{C'C}\right\|\vec{u} = \ (X)$$

$$\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|\vec{v} \overset{Por(*)}{=} \left\|\overrightarrow{AC}\right\|\left(\alpha\ \vec{u} + \beta\ \vec{v}'\right) = \alpha\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\vec{u} + \beta\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\vec{v}' \ (XI)$$

De (X) y (XI) encontramos:

$$\alpha\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = -\left\|\overrightarrow{C'C}\right\| \ \therefore\ \alpha = -\frac{\left\|\overrightarrow{C'C}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} \ (XII)$$

$$\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\vec{v} \overset{Por(*)}{=} \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left(\alpha\ \vec{u} + \beta\ \vec{v}'\right) = \alpha\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\vec{u} + \beta\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\vec{v}' \ (XIII)$$

$$\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB'}\right\|\vec{v}' - \left\|\overrightarrow{B'B}\right\|\vec{u} \quad (XIV)$$

De (XIII) y (XIV) conseguimos:

$$\alpha\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = -\left\|\overrightarrow{B'B}\right\| \ \because\ \alpha = -\frac{\left\|\overrightarrow{B'B}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} \ (XV)$$

De (XII) y (XV) obtenemos:

$$\alpha = -\frac{\left\|\overrightarrow{C'C}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = -\frac{\left\|\overrightarrow{B'B}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} \ \therefore\ \frac{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{CC'}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BB'}\right\|} \quad Q.E.D.$$

$$\left(\left\|\overrightarrow{C'C}\right\| = \left\|\overrightarrow{CC'}\right\| \ y\ \left\|\overrightarrow{B'C}\right\| = \left\|\overrightarrow{BB'}\right\|\right)$$