ACERCA DE LA DEFINICIÓN DE CONVERGENCIA UNIFORME

1. Introducción. La convergencia puntual:

Consideremos la sucesión $f_1, f_2, ..., f_n, ...$ de funciones definidas en un dominio S:

$$f_n : S \to A, \quad n = 1, 2, ...$$

y construyamos la sucesión $\{f_n(x)\} \equiv f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ..., \quad \forall x \in S$, con los valores que toman las funciones en cada punto x del dominio S.

Sea asimismo $T \subseteq S$ el subconjunto de S en el que esta última sucesión de valores es convergente. La función

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \quad x \in T$$

se denomina *función límite* de la sucesión $\{f_n\}$ y se dice que tal sucesión *converge puntualmente en T.*

El problema que se nos plantea de inmediato es comprobar si las propiedades de las funciones f_n de la sucesión, tales como continuidad, derivabilidad, integrabilidad, etc., se transfieren o no a la función límite f , y bajo qué condiciones.

En general nos encontramos que la convergencia puntual no es suficiente fuerte para el estudio de la transferencia a la función límite de las propiedades de las funciones de la sucesión. Se hace necesario estudiar alguna forma de convergencia "más fuerte" que permita avanzar en el estudio.

Este problema se plantea obviamente en el estudio de la convergencia de series de funciones, teniendo en cuenta que, en realidad, una serie es siempre una sucesión.

2. Convergencia uniforme y acotación uniforme:

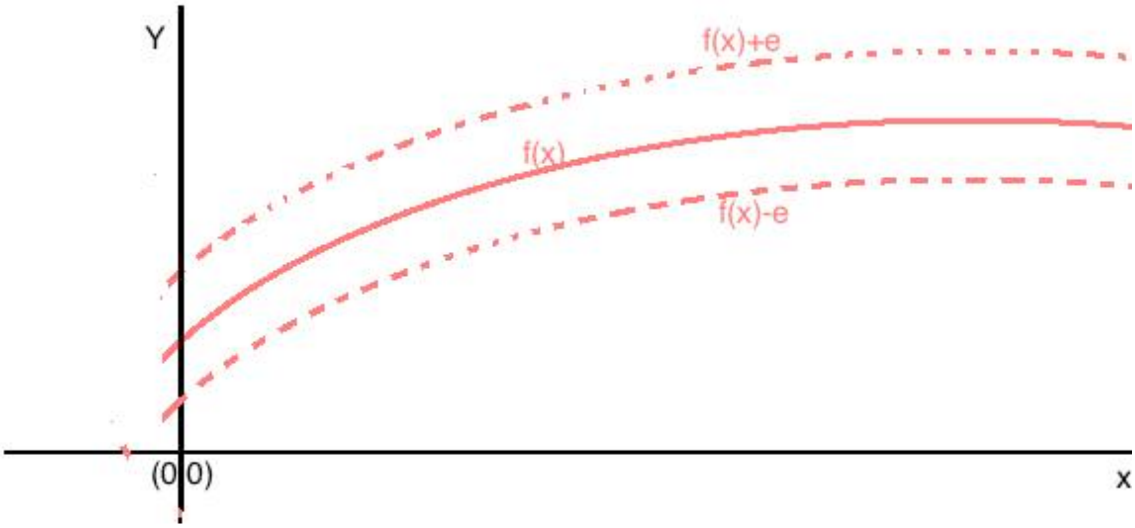
Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones se dice que *converge uniformemente hacia la función* f *en un conjunto T* si se verifica que

$$\forall x \in T, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) / \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon, \; \forall n > N(\varepsilon)$$

Se puede expresar simbólicamente mediante la expresión

$$f_n \to f \quad uniformemente\ en\ T$$

Puesto que $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$ es equivalente a $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$ para todo $n > N(\varepsilon)$, y para todo $x \in T$, se deduce que existe una banda de altura 2ε simétricamente dispuesta alrededor de la función límite que encierra a cada una de las funciones de la sucesión.



Una sucesión $\{f_n\}$ se dice uniformemente acotada en T sii existe una constante M tal que

$$\left|f_n(x)\right| \leq M, \quad \forall x \in T, \qquad n = 1,2,...$$

El número M se denomina *cota uniforme* para la sucesión $\{f_n\}$.

Si cada término de la sucesión $\{f_n\}$ es acotado y $f_n \to f \ uniformemente\ en\ T$ resulta sencillo probar que la sucesión es uniformemente acotada en T, sirviendo esta observación para comprobar que, caso contrario, una determinado sucesión no converge uniformemente.

Consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas en un conjunto T, y consideremos

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \; n = 1,2,..., \quad \forall x \in T$$

La serie $\sum_{1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en T sii existe una función f tal que $s_n \to f \ uniformemente\ en\ T$ y podemos escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \ \ (\textit{uniformemente en } T)$$

3. La condición de Cauchy:

Teorema 1 (*Condición de Cauchy para la convergencia uniforme de sucesiones*):

Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas en el conjunto T, se verifica que existe una función f tal que

$$f_n \to f \ \textit{uniformemente en } T$$

si y solamente si se verifica la condición de que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) / \forall m,n > N(\varepsilon), \left| f_m(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon, \ \forall x \in T$$

Demostración:

- Veamos que si $\{f_n\}$ converge uniformemente se verifica la condición de Cauchy:

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in T, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) / \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon/2, \ \forall n > N(\varepsilon) \\ \forall x \in T, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) / \left| f_m(x) - f(x) \right| < \varepsilon/2, \ \forall m > N(\varepsilon) \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left| f_n(x) - f(x) \right| + \left| f_m(x) - f(x) \right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

y como es:

$$\left| f_n(x) - f_m(x) \right| = \left| (f_n(x) - f(x)) - (f_m(x) - f(x)) \right| \leq \left| f_n(x) - f(x) \right| + \left| f_m(x) - f(x) \right| <$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

se tiene, en definitiva, que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) / \forall m,n > N(\varepsilon), \left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon, \ \forall x \in T$$

- Veamos ahora que si se verifica la condición de Cauchy entonces la sucesión converge uniformemente:

Si se verifica la condición de Cauchy, entonces $\{f_n\}$ converge al menos puntualmente. Sea entonces

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad \forall x \in T$$

fijando ε podemos elegir $N(\varepsilon)$ de modo que para $n > N(\varepsilon)$ implique que

$$\left| f_n(x) - f_{n+p}(x) \right| < \varepsilon/2, \, p = 1,2,... \quad \forall x \in T$$

en el límite, para $p \to \infty$:

$$\lim_{p\to\infty} \left| f_n(x) - f_{n+p}(x) \right| = \left| f_n(x) - \lim_{p\to\infty} f_{n+p}(x) \right| = \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon/2 < \varepsilon$$

por tanto es

$$\forall x \in T, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) / \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon, \ \forall n > N(\varepsilon)$$

Teorema 2 (Condición de Cauchy para la convergencia uniforme de series):

Una serie $\sum_1^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en T si, y únicamente si, se verifica la condición de que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) / \forall n > N(\varepsilon), \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon, \quad p = 1,2,..., \ \forall x \in T$$

Demostración:

Si definimos la sucesión $\{s_n\}$ por $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \ n = 1,2,..., \ \forall x \in T$

Y le aplicamos el teorema anterior, será condición necesaria y suficiente para su convergencia uniforme que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) / \forall n > N(\varepsilon), \ \left| s_{n+p}(x) - s_n(x) \right| < \varepsilon, \, p = 1,2,..., \ \forall x \in T \to$$

$$\to \left| \sum_{k=1}^{n+p} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon, \, p = 1,2,..., \ \forall x \in T$$

Teorema 3 (Criterio M de Weierstrass):

Consideremos la sucesión $\{M_n\}$, donde los M_n son números no negativos tales que se verifica que

$$0 \le \left| f_n(x) \right| \le M_n, \text{ para } n = 1,2,..., \ \forall x \in T$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en T si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge.

Demostración:

De la condición de Cauchy para series de números reales se tiene que si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge entonces:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) / \forall n > N(\varepsilon), \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k \right| < \varepsilon, \quad p = 1,2,...$, y se tiene, de acuerdo con la hipótesis, que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k \right| < \varepsilon$$

por tanto:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) / \forall n > N(\varepsilon), \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon, \quad p = 1,2,..., \ \forall x \in T$$

que es la condición de Cauchy para la convergencia de series.