CURVAS GALILEANAS

Wilfredo Zuleta R. [1]

"Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo". Galileo Galilei

Este pequeño y sencillo artículo está basado en uno de los más grandes resultados en la Física, el cual fue descubierto y desarrollado por uno de los grandes sabios de la humanidad, Galileo Galilei[2].

Supongamos que un objeto D está ubicado inicialmente en el punto $B=(a,b)$ y una partícula P en el origen de coordenadas cartesianas $O=(0,0)$. La partícula P es propulsada en el instante $t=0$ en dirección del segmento $\overline{OB}$ (que forma un ángulo α con el eje positivo de las x) y en ese mismo instante el objeto en B cae libremente (sin resistencia del aire) por la trayectoria $x=a$. Galileo comprobó que dichas partículas se encuentran a lo largo de esta trayectoria, para un valor muy particular de la velocidad inicial v_o con la cual se dispara la partícula P en el punto O en $t=0$ Ver figura 1.

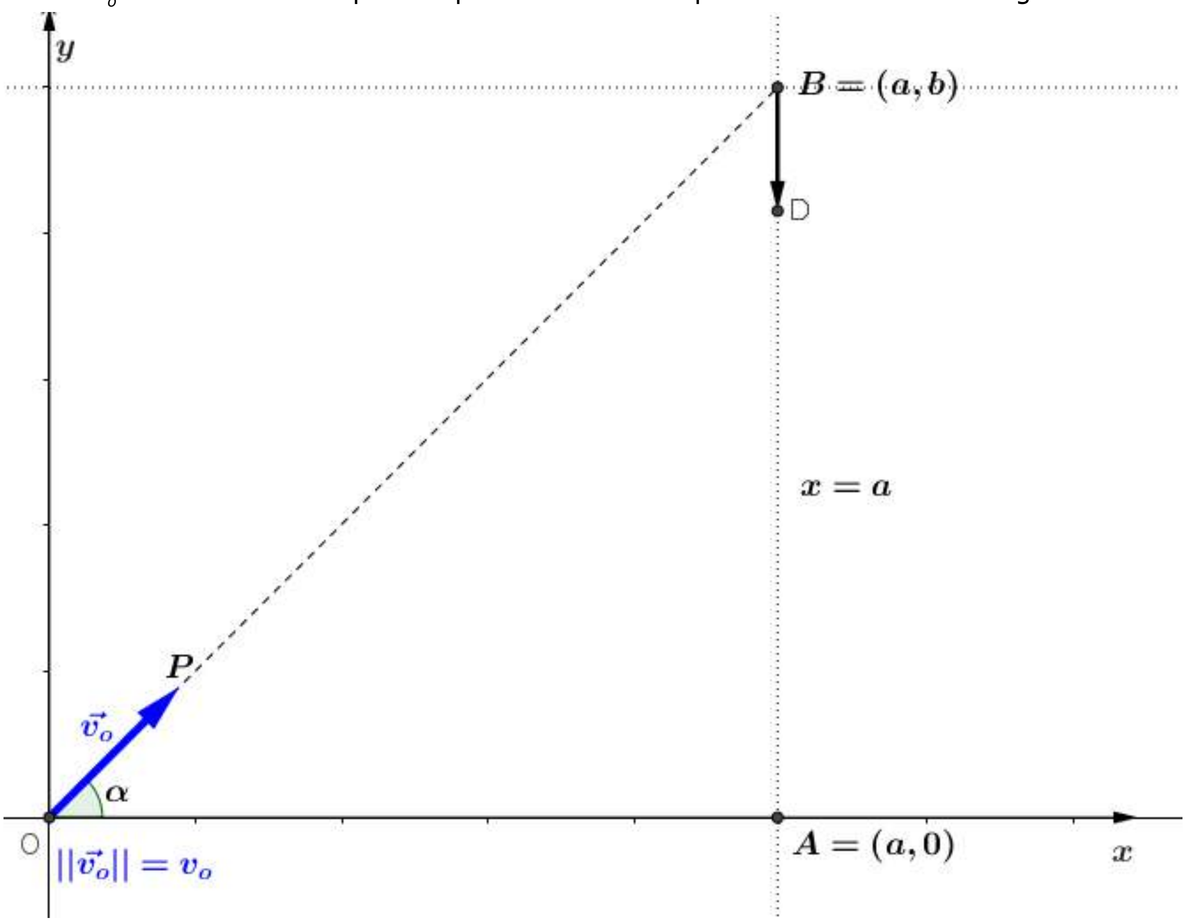

Figura 1

[1] Profesor jubilado del NURR. Universidad De Los Andes. Trujillo-Venezuela. Email:wrzr2001us@hotmail.com

[2] Galileo Galilei. Fue un físico y astrónomo italiano del siglo XVI y XVII (nació el 15 de febrero de 1564 y murió el 1642 a los 77 años) conocido principalmente por defender, a través del método científico y a riesgo de su propia **vida**, la teoría heliocéntrica de Nicolás Copérnico.

Los cuerpos P y D se encuentran en algún lugar de la trayectoria vertical $x = a$. Ver figura 2.

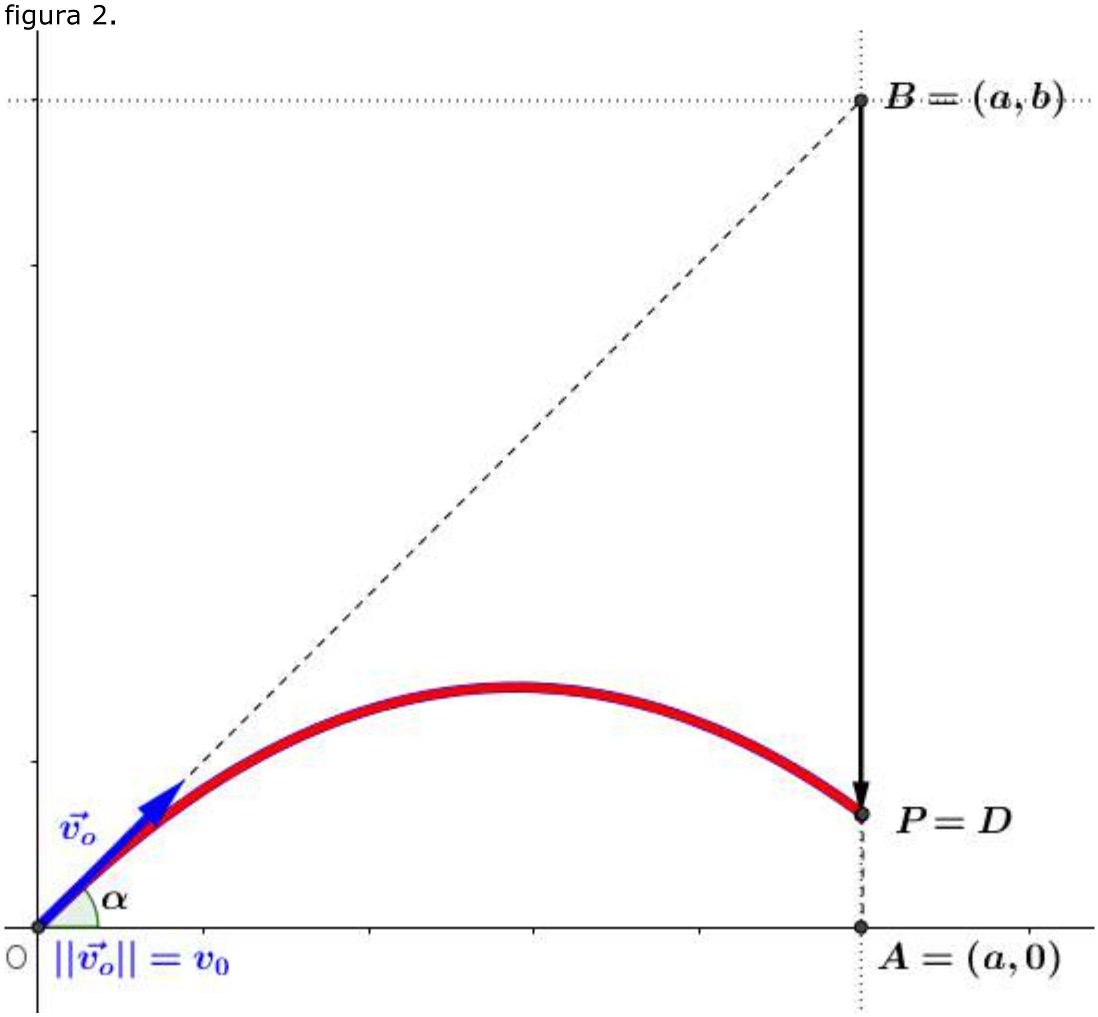

Figura 2

En primer lugar, haremos una sencilla prueba de esta afirmación para luego considerar ciertas especulaciones y así construir otros lugares geométricos que cumplen con lo mismo, esto es, que los objetos P y D se encuentran a lo largo de la recta $x = a$ en un determinado tiempo. Una de ellas es un pedazo de una curva polinómica de segundo grado (parábola) que no depende de la velocidad inicial v_o, mientras que la otra es una parte de un polinomio cúbico. A estas dos curvas las hemos denominado **Curvas Galileanas**, en honor a este eminente científico.

El objeto D en un tiempo t ha descendido, a lo largo de la recta $x = a$, la distancia $\frac{1}{2}gt^2$, por tanto su altura $y_D = b - \frac{1}{2}gt^2$. Ahora calculamos la altura del objeto P cuando ha recorrido la distancia $x = a$, para eso tenemos que el tiempo empleado para ese recorrido está dado por $t_{x=a} = \frac{a}{v_o \cos\alpha}$, así que la altura alcanzada por dicho objeto para cuando $x = a$ es

$$y_P = v_o sen\alpha\, t_{x=a} - \frac{1}{2}gt_{x=a}^2 = v_o sen\alpha \frac{a}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2}gt_{x=a}^2 = a\,tg\alpha - \frac{1}{2}gt_{x=a}^2 = b - \frac{1}{2}gt^2$$

Se ha tenido en cuenta que $tg\alpha = \frac{b}{a}$ y $t_{x=a} = t$ =tiempo que emplea el objeto D en recorrer la distancia $\frac{1}{2}gt^2$, de manera que $y_D = y_P$, o sea, los objetos D y P se encuentran a lo largo de la recta $x = a$ en un punto de coordenadas

$$C = (a, b - \frac{1}{2}gt^2) = (\mathrm{a}, \mathrm{b} - \frac{ga^2}{v_o^2 \cos^2\alpha}).$$

Teniendo en cuenta que el tiempo que tarda el objeto D en llegar al punto $A = (a, 0)$ es $t = \sqrt{\frac{2b}{g}}$ y si ese tiempo se usa en la ecuación $x = v_o \cos\alpha\, t$ de P para cuando $x = a$, tenemos que $v_0 = \frac{a}{\sqrt{\frac{2b}{g}}\cos\alpha}$ y entonces los objetos D y P se encuentran justamente en A. En el caso de que $v_0 > \frac{a}{\sqrt{\frac{2b}{g}}\cos\alpha}$ dichos objetos se encuentran entre A y B.

Para el caso en que D pueda moverse por debajo de A y manteniéndose en la recta $x = a$ entonces con $v_0 < \frac{a}{\sqrt{\frac{2b}{g}}\cos\alpha}$ se encontrarán por debajo de A en el punto de coordenadas $C = (\mathrm{a}, \mathrm{b} - \frac{ga^2}{v_o^2 \cos^2\alpha})$. En definitiva, los objetos siempre se encontrarán a lo largo de la recta $x = a$ y por debajo del punto $B = (a, b)$. Veamos las figuras 3, 4 y 5 donde se ilustran estas situaciones. Con el uso del programa GeoGebra[3] hemos representado las ecuaciones paramétricas y la ecuación cartesiana para la parábola (un pedazo de ella, para x en $[0, a]$).

[3] GeoGebra 5.0.236.0-3D

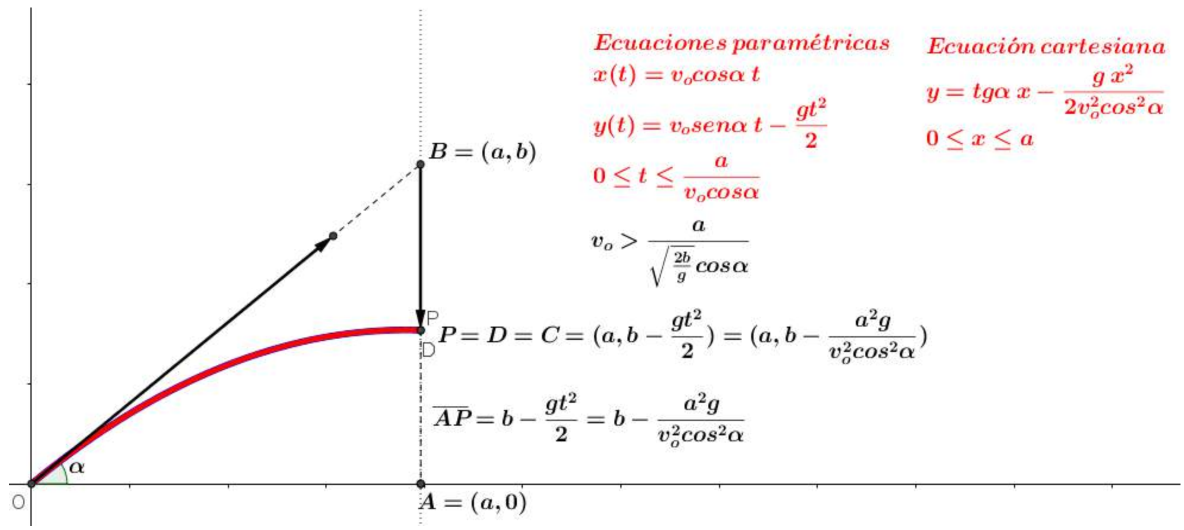

Figura 3

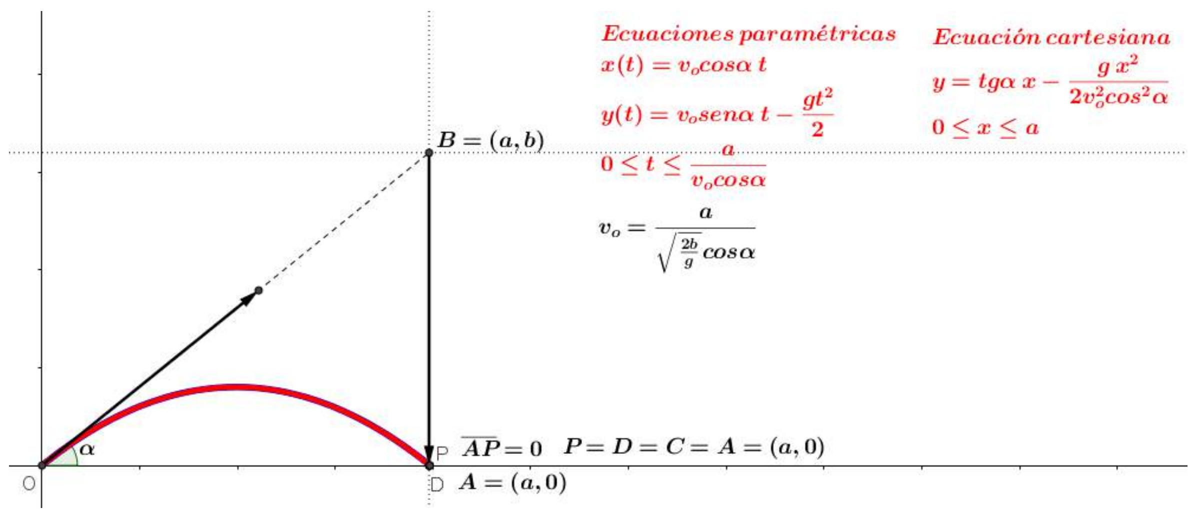

Figura 4

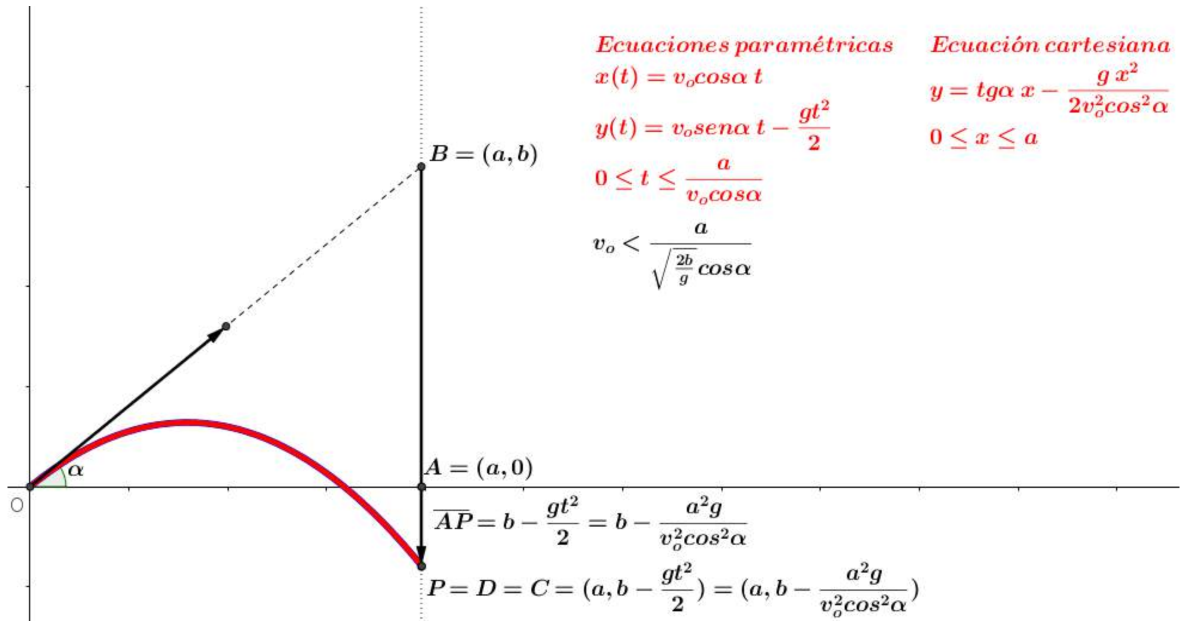

Figura 5

CURVAS GALILEANAS

Estos lugares geométricos (curvas) que se construirán a continuación son las trayectorias que podría seguir el objeto P y lograr el mismo objetivo, esto es, encontrarse con el objeto D en un punto determinado C que está por debajo del punto B a lo largo de la recta $x = a$.

Curva galileana 1

Este lugar geométrico lo describimos de la siguiente manera: El punto P está en la intersección del segmento de recta OD y la recta $x = \frac{1}{2}gt^2$, así que P tiene las coordenadas $P = (x(t), y(t))$, donde $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$ y $y(t)$ lo vamos a determinar observando la figura 6.

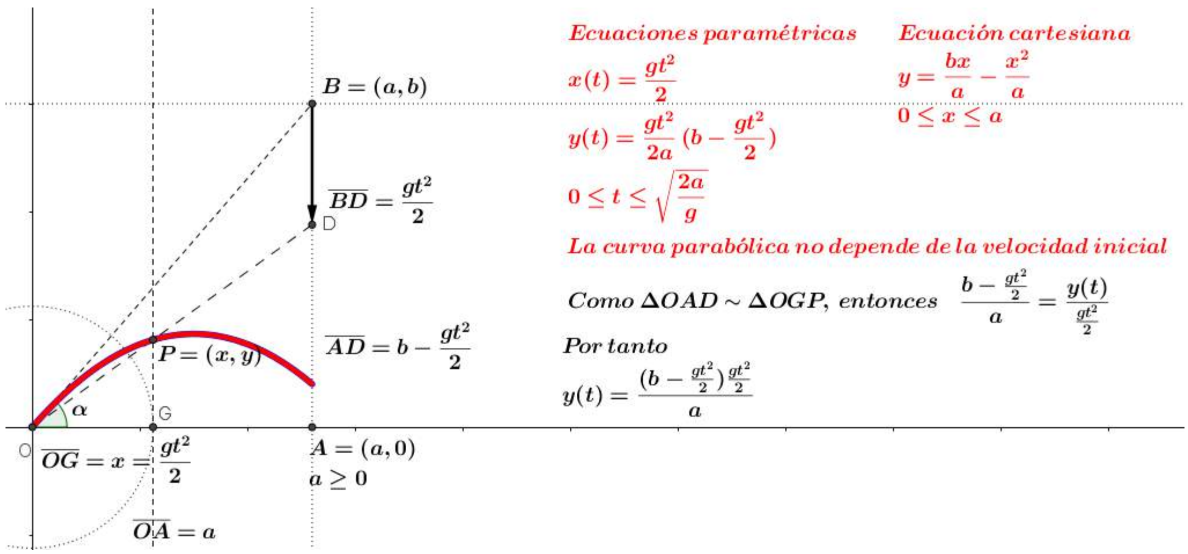

Figura 6

Como se puede observar, esta curva no depende de la velocidad inicial v_0 (pero sí de a, o sea, del ángulo α) y esto significa que con cualquier $v_0 > 0$ los objetos se encontrarán a lo largo de la recta $x = a$ y por debajo de $B = (a,b)$ y en $C = (a, b-a)$, donde la ordenada de C se obtiene sustituyendo $x = a$ en la expresión para la variable y en la ecuación cartesiana. Si $b > a$ entonces P encuentra a D entre A y B a una distancia $b - a$ medida desde A.

Si $b = a$ dichos puntos se encuentran justamente en A, y si $b < a$ entonces se encuentran por debajo de A a una distancia $a - b$.
Veamos esto ilustrado en las figura 7, 8 y 9.

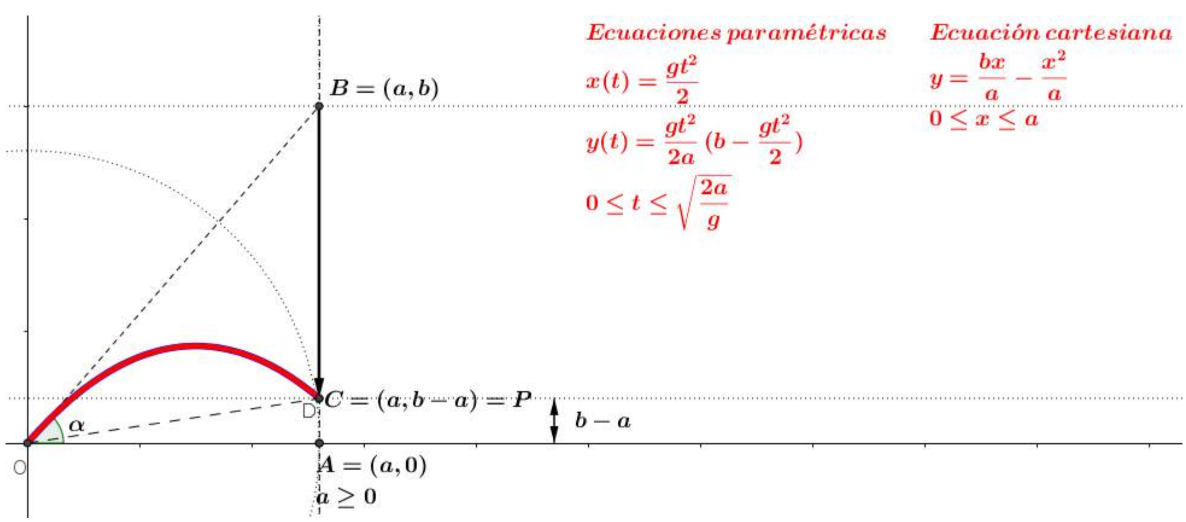

Figura 7 (b>a)

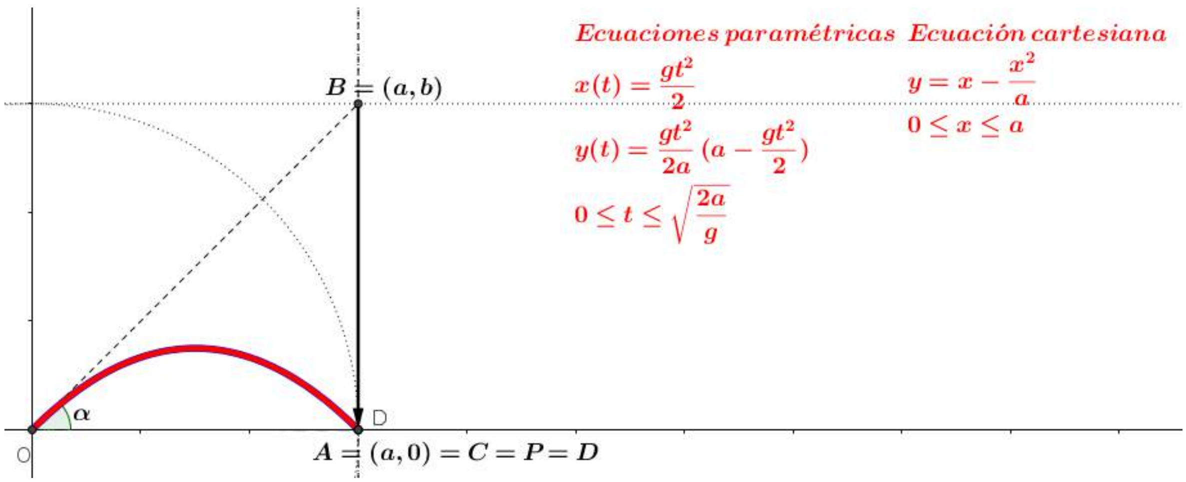

Figura 8 (b=a)

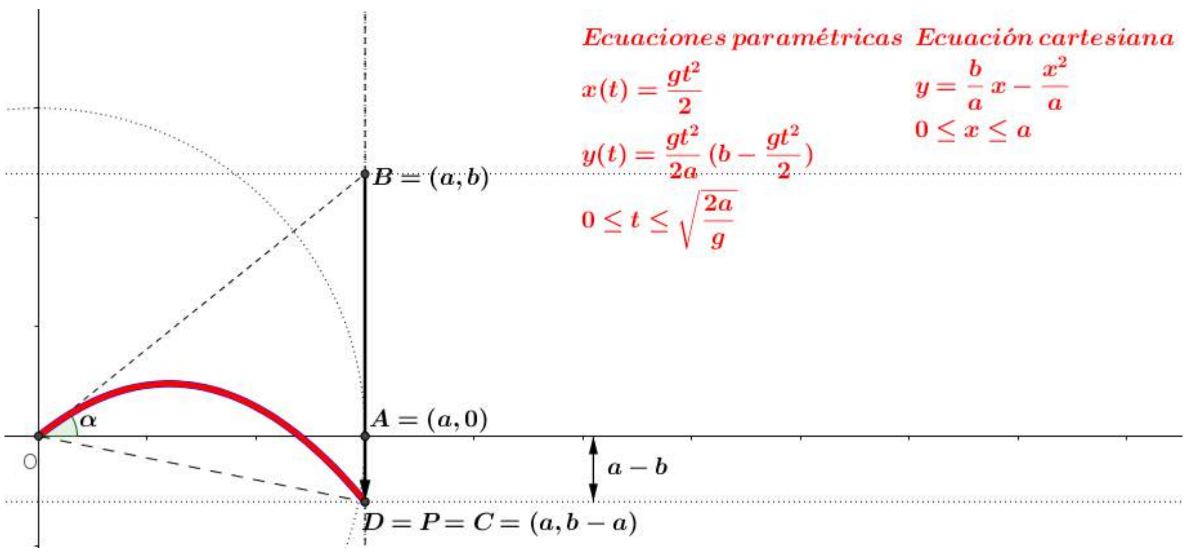

Figura 9 (b<a)

Cabe destacar que se ha escogido la distancia horizontal recorrida por el punto P en un tiempo t igual a la distancia descendida por el punto D en el mismo tiempo, y que el punto P está en el segmento de recta OD, algo así como que el punto D está siempre en la mira del punto P, como si fuese un radar.

Curva galileana 2

En este caso escogemos que el desplazamiento horizontal del punto P sea como lo indica la ecuación galileana $x = v_o \cos\alpha\, t$, siendo el resto de la descripción igual a como se ha hecho en el caso inmediato anterior. Esto lo podemos visualizar en la figura 10.

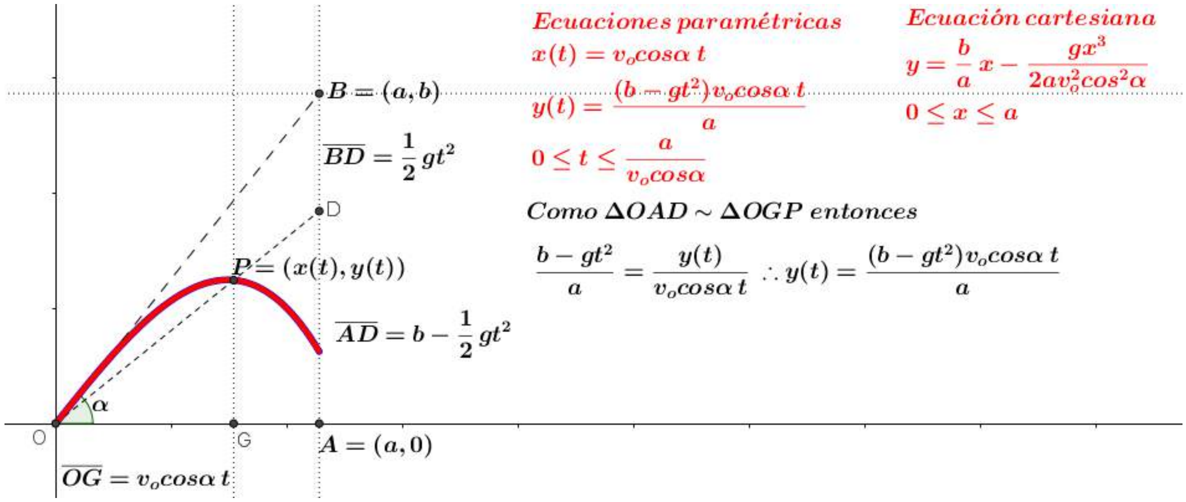

Figura 10

De nuevo, si $v_0 > \dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{2b}{g}}\cos\alpha}$ los punto P y D se encuentran en el punto $C = (a, b - \dfrac{ga^2}{2v_o^2\cos^2\alpha})$ por encima del punto A.

si $v_0 = \dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{2b}{g}}\cos\alpha}$ los punto P y D se encuentran en el punto $C = (a, 0)$, o sea, justamente en el punto A.

si $v_0 < \dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{2b}{g}}\cos\alpha}$ los punto P y D se encuentran en el punto $C = (a, b - \dfrac{ga^2}{2v_o^2\cos^2\alpha})$, o sea, por debajo del punto A, a una distancia igual a $\dfrac{ga^2}{2v_o^2\cos^2\alpha} - b$.

Esta curva y la estudiada al principio de este artículo tienen en común que comparten el punto inicial O y el punto de encuentro C (digamos que tienen sus puntos iniciales y finales iguales) sobre la recta $x = a$, pero difieren en que la estudiada por Galileo es un polinomio de segundo grado, esto es, una parábola, mientras que esta última es un pedazo del polinomio cúbico.

$$y = \frac{b}{a}x - \frac{gx^3}{2av_o^2\cos^2\alpha}$$

con x en $[0, a]$, la cual mostramos en un intervalo más grande en la figura 11 en color azul.

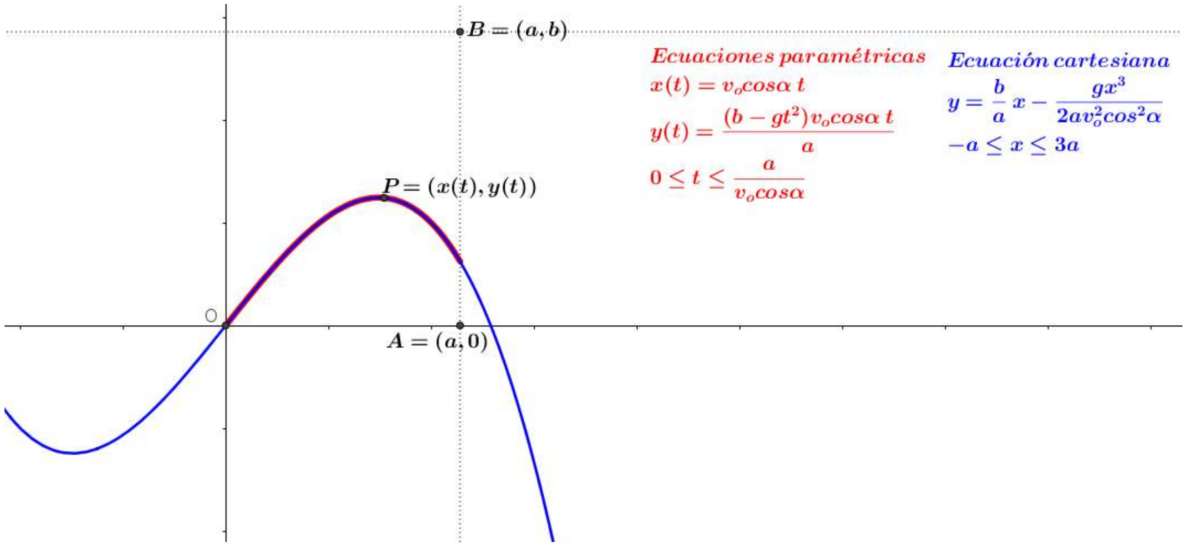

Figura 11

Ahora mostramos juntas estas tres curvas en la figura 12.

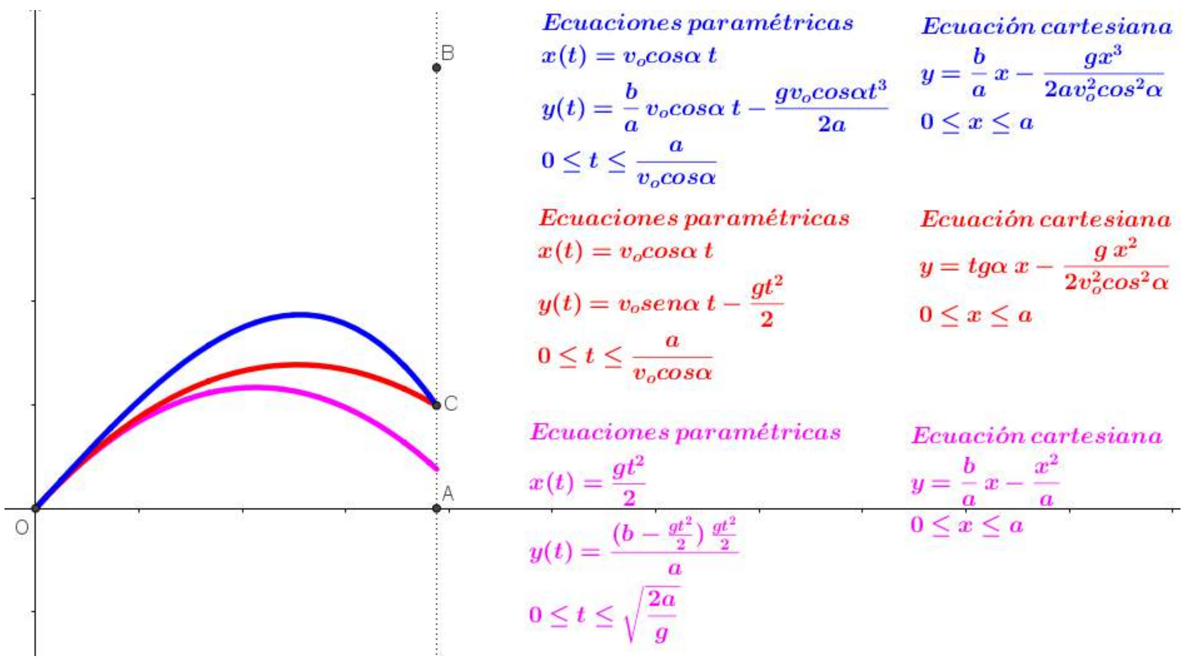

Figura 12

Curva galileana 3

En este caso consideramos que el objeto es lanzado hacia arriba desde A con velocidad inicial v_o y que el desplazamiento horizontal de P sea $x = v_o t$. Tenemos que el punto $B = (a, b) = (a, \frac{v^2}{2g})$ y que $v_o > (2a^2 g)^{1/3}$ para que la curva alcance a la recta $x = a$ entre A y B. Esto lo podemos visualizar en la figura 13.

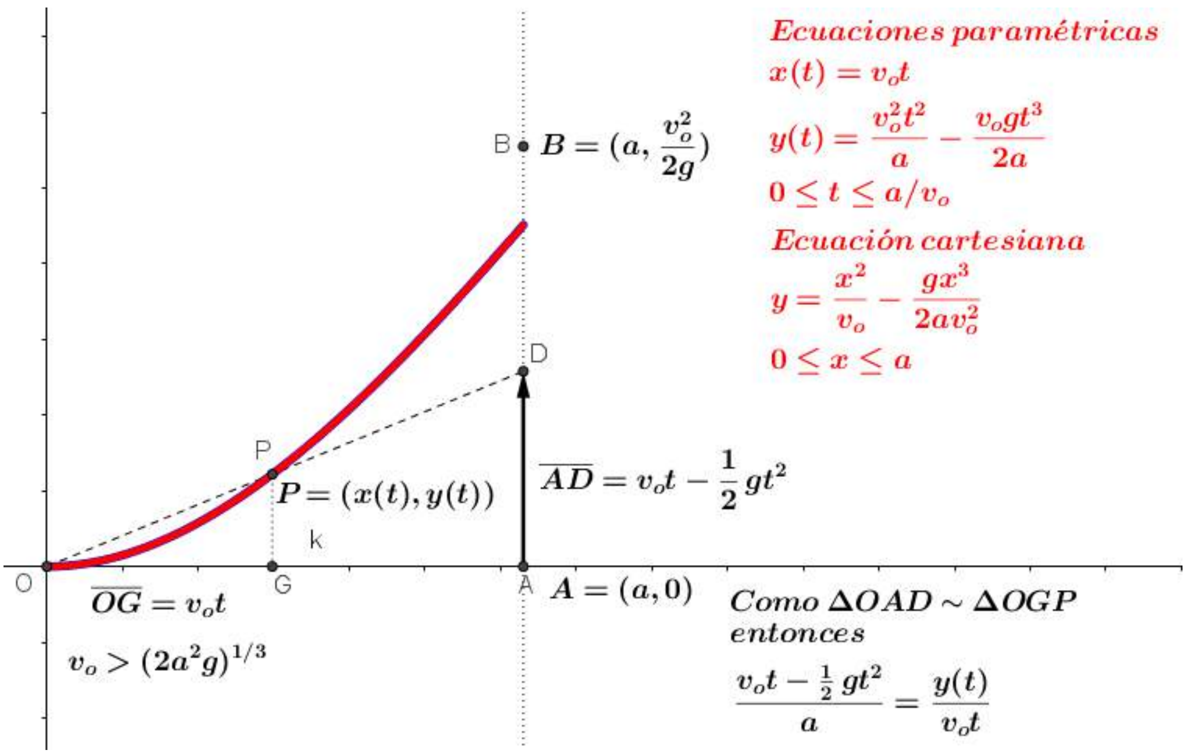

Figura 13

Curva galileana 4

En este caso consideramos que el objeto es lanzado hacia arriba desde A con velocidad inicial v_o y que el desplazamiento horizontal de P sea $x = v_o tg\alpha$, donde α es el ángulo formado por el segmento OD, de manera que α es una función del tiempo t. Igual que el caso 3, tenemos que $B = (a, b) = (a, \frac{v^2}{2g})$ y que $v_o > (2a^2 g)^{1/3}$ para que la curva alcance a la recta $x = a$ entre A y B. Esto lo podemos visualizar en la figura 14.

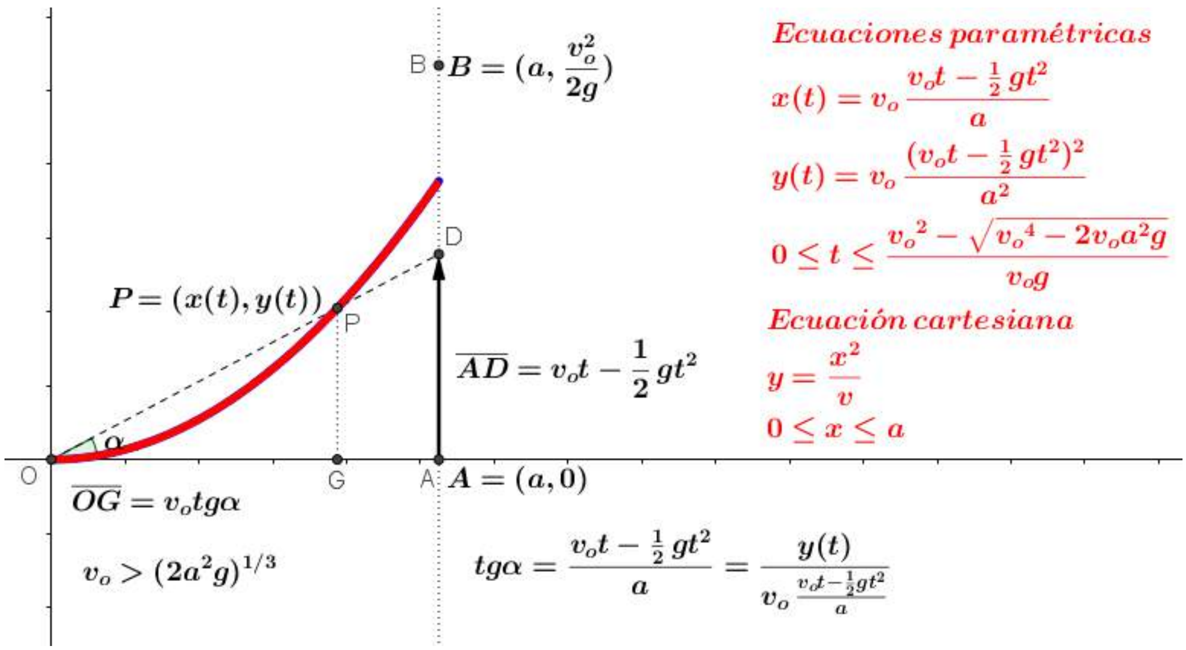

Figura 14

Teniendo en cuenta la manera como se han descrito y desarrollado estos lugares geométricos relacionados con el movimiento en el plano, se deja al lector en descubrir y estudiar haciendo otras especulaciones con los recorridos horizontales del objeto P, y así encontrar otras curvas que cumplan con el objetivo de que P y D coincidan a lo largo de la recta $x = a$, determinando las coordenadas del punto de encuentro.

Se puede verificar que no se pueden construir polinomios de variable x de grado mayor que tres que cumplan con lo requerido en los problemas planteados en este artículo.