Curvas Cicloidales

Wilfredo Zuleta R. [1]

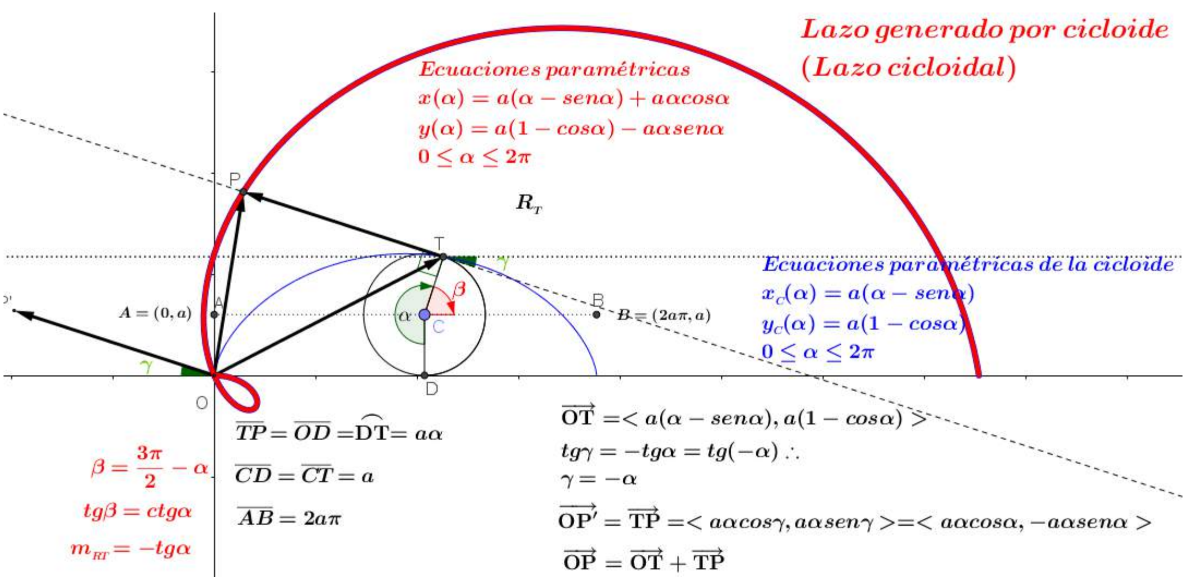
"Las matemáticas las descubrió el hombre y por lo tanto están al alcance de todos. No son para seres especiales o genios"[2]

Este artículo se basa en la obtención de varios lugares geométricos (curvas) generadas por una circunferencia que rueda sin deslizarse sobre un segmento de recta y la correspondiente cicloide que esta circunferencia genera. Por eso el nombre que hemos escogido para el artículo. Se ha empleado el programa matemático GeoGebra[3] para el trazado de la gráfica de todos los lugares geométricos estudiados en este artículo.

1. Lazo Cicloidal 1
(Generado por tangente a la circunferencia)

Esta curva se describe de la siguiente manera: Una circunferencia de radio a rueda, sin deslizarse, sobre el segmento $[0,2a\pi]$ sobre el eje de las x. Tracemos la tangente a dicha circunferencia en el punto T y sobre esta tangente escogemos el punto P a la izquierda de T y la distancia entre ellos es igual a la longitud de arco $\overset{\frown}{DT}$, donde el punto D es el punto de contacto de la circunferencia con el segmento mencionado.

En la figura 1 se recoge toda la información pertinente para que con el uso de elementos básicos de trigonometría y vectores en el plano obtengan las ecuaciones paramétricas de la curva en cuestión.



---

[1] Profesor jubilado del NURR. Universidad De Los Andes. Trujillo-Venezuela. Email:wrzr2001us@hotmail.com

[2] "*El placer de descubrir*" Richard Feynman. Premio Nobel de Física 1965.

[3] GeoGebra 5.0.351.0-3D

Figura 1

Asignación 1: Se puede obtener otra curva interesante y sus correspondientes ecuaciones paramétricas, pero tomando el punto P a la derecha del punto T. La mostramos en la figura 2.

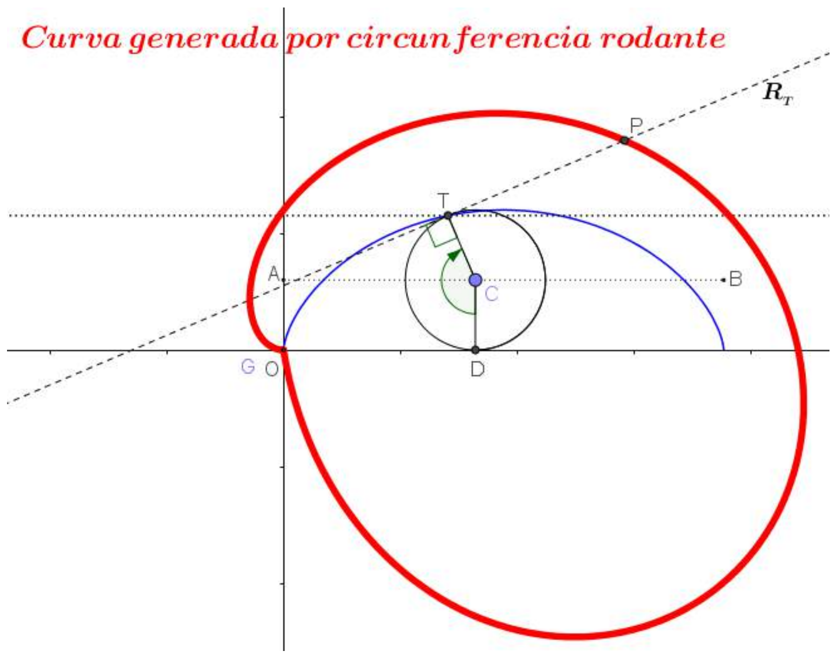


Figura 2

2. Lazo Cicloidal 2 (Generado por tangente a la cicloide)

En este caso el punto P es el punto de corte de la tangente a la cicloide en el punto T y la recta perpendicular a ésta y que pasa por el punto $A = (0, a)$ el cual es el extremo izquierdo del segmento AB por donde se desplaza el centro, punto C, de la circunferencia que genera la mencionada cicloide. Ver figura 3.

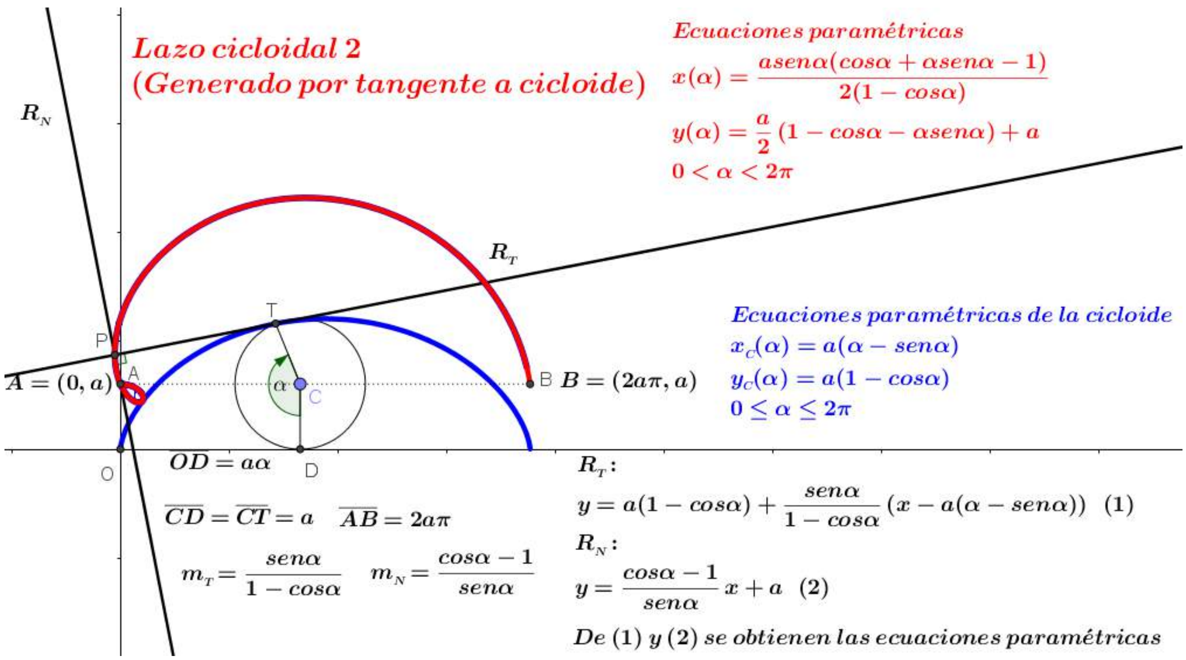


Figura 3

Asignación 2: Se puede obtener otra curva "semejante" a esta curva y sus correspondientes ecuaciones paramétricas, pero tomando el punto P como la intersección de la mencionada tangente y la perpendicular a ésta que pasa por el punto $B = (2a\pi, a)$, esta curva la mostramos en la figura 4.

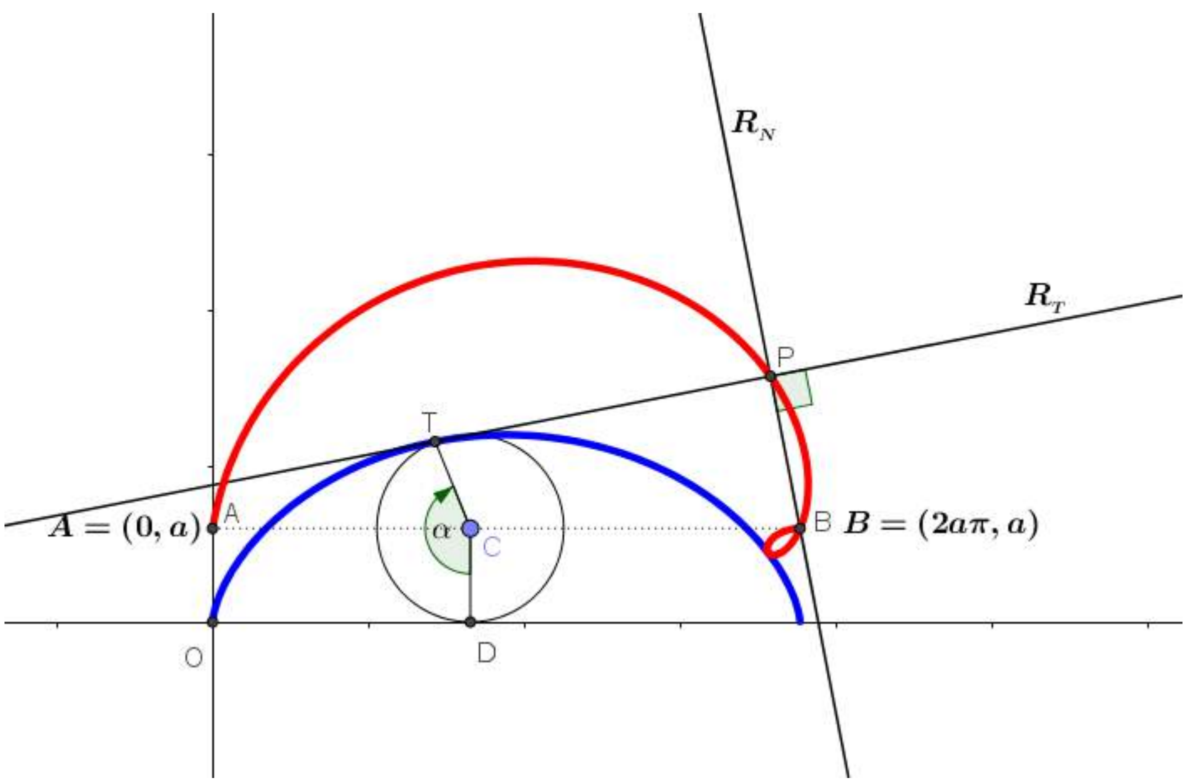


Figura 4

Observación: Si en el caso inmediato anterior la tangente se toma sobre la circunferencia en el punto T y la perpendicular a esta tangente exactamente igual, entonces obtenemos la curva que mostramos en la figura 5.

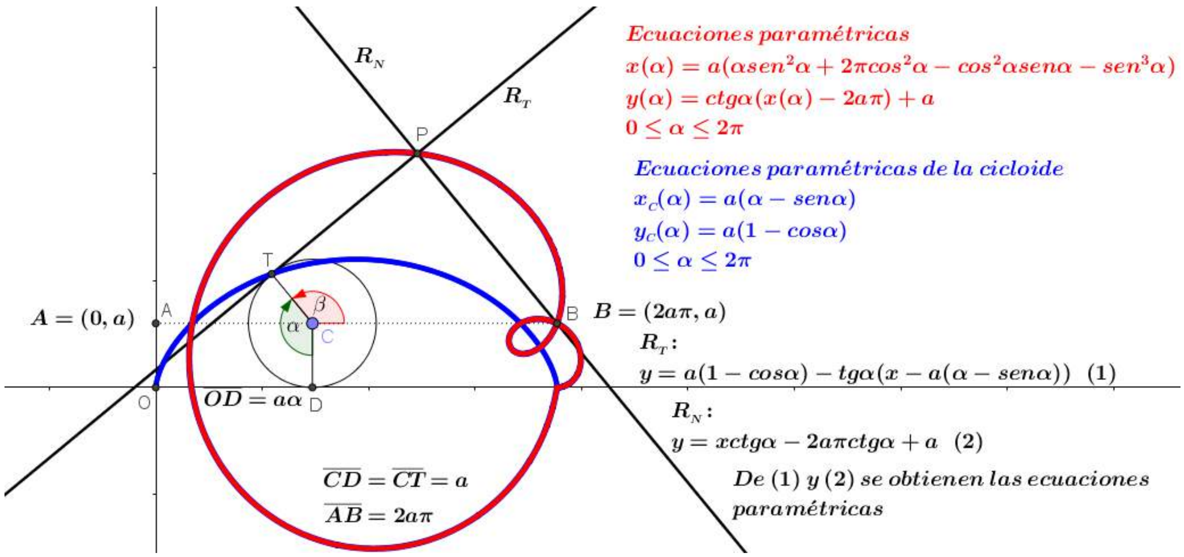


Figura 5

Y en caso de que dicha perpendicular pase por el punto $A = (0, a)$ se obtiene el lugar geométrico "semejante" y que mostramos en la figura 6.

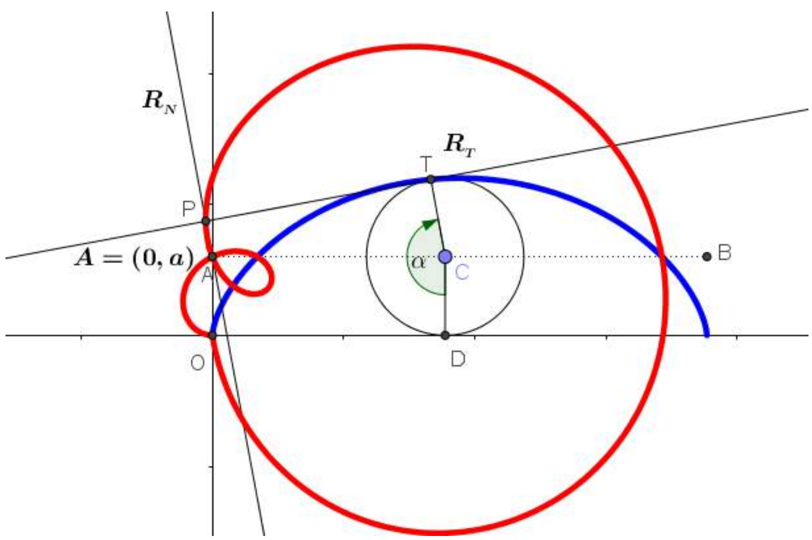


Figura 6

3. Sombrero cicloidal

Esta curva a la cual le hemos dado el sugerente nombre de **Sombrero cicloidal** se obtiene encontrando el punto P que es la intersección de la tangente a la cicloide en el punto T y la perpendicular a ésta y que pasa por el centro de la circunferencia, punto $c = (a\alpha, a)$, de manera que cuando la circunferencia rueda sin deslizarse a lo largo del segmento antes mencionado el punto P traza este lugar geométrico, que presentamos en la figura 7.

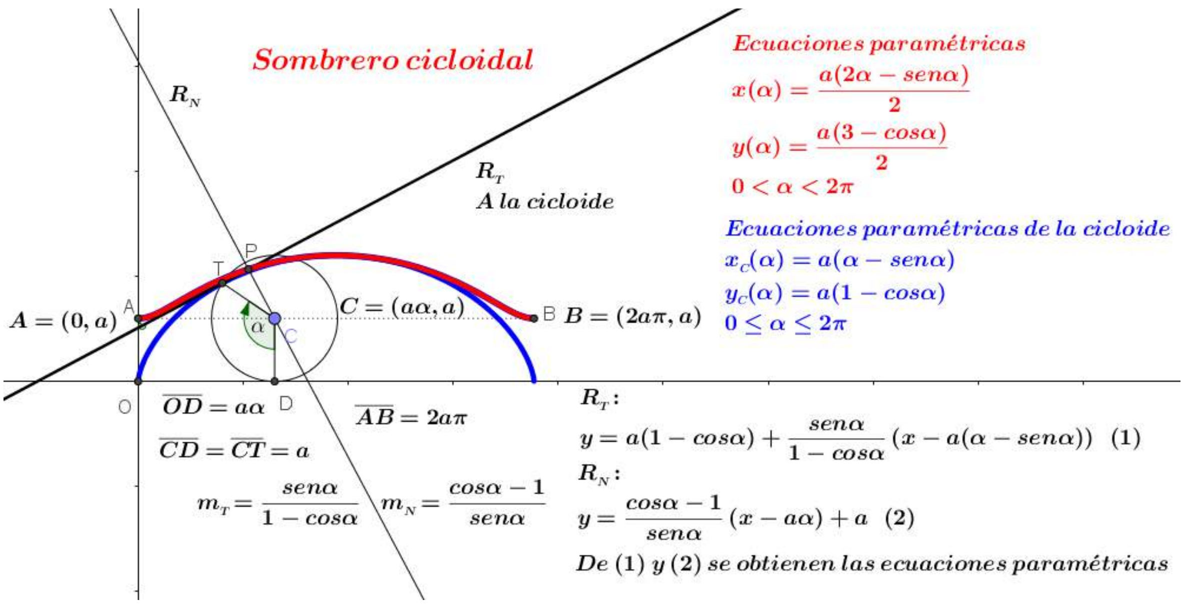


Figura 7

Observaciones:

1) Pueden observar el parecido de las ecuaciones de este lugar geométrico encontrado (sombrero cicloidal) con las de la cicloide, con esto se puede observar el "parecido" de ambas graficas en una buena parte del intervalo $[0, 2a\alpha]$.

2) Conseguir la longitud de la cicloide se reduce a calcular una integral que se puede hacer por técnicas elementales, mientras que para encontrar la longitud de esta curva tenemos que recurrir a las integrales elípticas, o sea, se va a encontrar un valor aproximado para tal longitud en vista de que dicha longitud viene dada por la integral

$$L = \frac{a}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{5 - 4\cos\alpha}\, d\alpha \approx 6.682446612\,a \quad ({}^4)$$

Al comparar con el valor de la longitud de la cicloide que es $8a$ podemos notar que la longitud de la curva sombrero es aproximadamente 0.8353058265 veces más pequeña que la de la cicloide en el mismo intervalo.

[4] Valor aproximado encontrado con el programa Maple 2015.

3) En cambio el valor del área comprendida por esta curva, el eje de las x en el intervalo $[0,2a\alpha]$ si se puede calcular a través de una integral elemental, esto es

$$A=\int_0^{2a\pi} ydx=\int_0^{2\pi}\frac{a}{2}(3-\cos\alpha)\frac{a}{2}(2-\cos\alpha)d\alpha=\frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi}(3-\cos\alpha)(2-\cos\alpha)d\alpha=\frac{13}{4}\pi a^2$$

Se puede observar que el valor de esta área es bastante aproximada al valor del área para la cicloide que es $3\pi a^2$ ([5]).De manera que el área encerrada por el sombrero cicloidal es veces $\frac{13}{12}$ más grande que la encerrada por la cicloide que la genera, en el mismo intervalo.

4) Con un poco de trabajo trigonométrico podemos obtener la ecuación cartesiana para esta curva que viene dada por

$$x=a\arccos\left(\frac{3a-2y}{a}\right)-\sqrt{3ay-y^2-2a^2}\quad para\ a\le y\le 2a$$

4. Involuta de la cicloide (Evolvente cicloidal)

Como recordarán la involuta o evolvente de una circunferencia es la curva que describe la punta de una cinta de grosor despreciable que se obtiene al despegar dicha cinta de la circunferencia que no rota ni se desliza y la cual se mantiene tensa en la medida que ésta se está despegando de la mencionada circunferencia.

En este caso, cambiamos la circunferencia por una cicloide como lo mostramos en la figura 8, donde también está toda la información necesaria para la obtención de las ecuaciones paramétricas de la correspondiente curva a la cual, por analogía, le hemos llamado **Involuta** o **Evolvente cicloidal.**

Vale aclarar que al decir que la cinta se mantiene tensa significa que ésta al desprenderse de la cicloide se mantiene tangente en el punto T sobre la cicloide y la distancia entre este punto y el punto P es la longitud de arco de la cicloide entre 0 y un valor α cualquiera menor o igual a 2π y que viene dada por

$$w(\alpha)=4a\left(1-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\quad ({}^6)$$

[5] Ver el artículo "*La cicloide, una curva de mucho empaque*". Carlos S. Chinea. Enero 2002. Páginas 4-5

[6] Ver el artículo "*La cicloide, una curva de mucho empaque*". Carlos S. Chinea. Enero 2002. Páginas 4-5

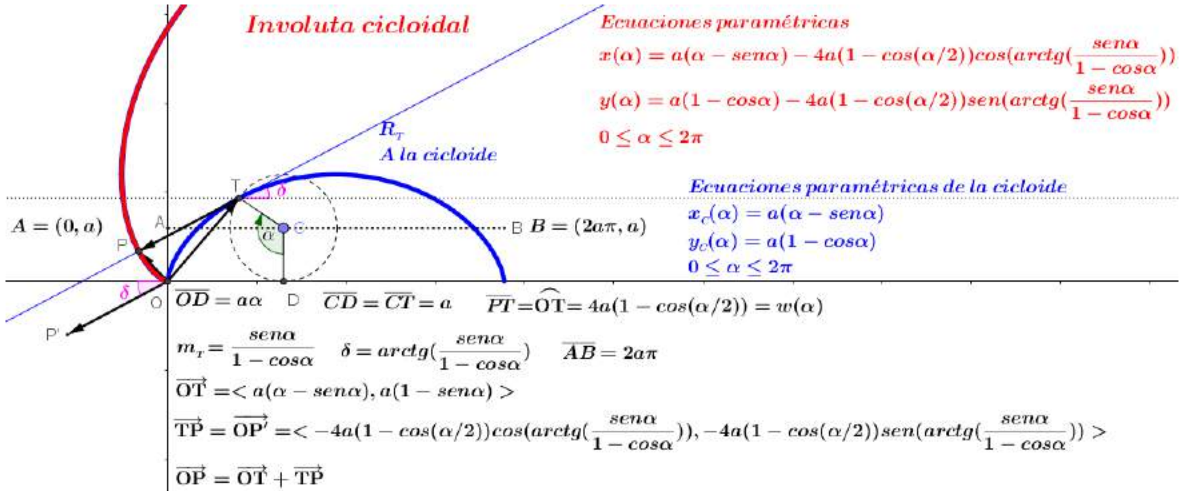


Figura 8

Si en el caso inmediato anterior la distancia entre los puntos T y P la tomamos igual al arco sobre la circunferencia que genera la cicloide, esto es, $\overline{TP} = \overset{\frown}{DT} = a\alpha$, entonces el punto P describe una **Cuasi evolvente** de la cicloide cuando la circunferencia se desplaza como se ha in dicado anteriormente. Podríamos decir que esto es un híbrido de las condiciones para generar la involuta de la circunferencia y de la cicloide. Observar en la figura 9.

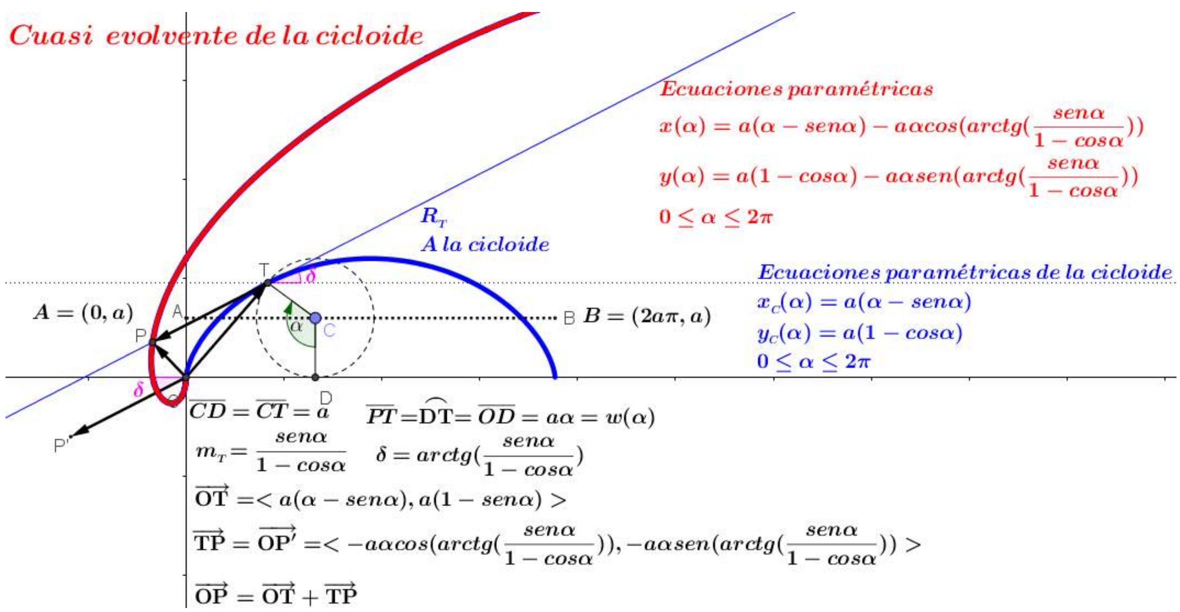


Figura 9