EL CUERPO DE LAS FRACCIONES DE UN DOMINIO DE INTEGRIDAD

Dado un anillo integro (A; L, L') donde A es un conjunto, L es la ley aditiva y es L' la ley multiplicativa, nos encontramos en general que, aunque la ley aditiva está simetrizada (todo elemento tiene simétrico- diremos también "opuesto" por extensión del lenguaje que usamos para la suma) en virtud de la misma definición de anillo, no ocurre lo mismo con la ley multiplicativa L', ya que si ésta también estuviese simetrizada (si todo elemento tuviera "inverso"), la estructura de (A;L,L') sería, además, un campo o cuerpo.

La idea que nos planteamos es la de encontrar, para un dominio íntegro dado, A, un cuerpo conmutativo mínimo K que contenga un subanillo isomorfo al dominio A.

Se dice, entonces, que el dominio A *está inmerso* en el cuerpo K, y, obviamente, también estaría inmerso en todos los supercuerpos del cuerpo K. A K se le acostumbra a llamar *cuerpo o campo de las fracciones del dominio A*.

El ejemplo más inmediato lo tenemos en la aritmética ordinaria para el dominio íntegro Z de los números enteros, (Z;+,.), donde el campo de fracciones correspondiente es el cuerpo Q de los números racionales (Q;+,.). Es fácil probar que Q es el cuerpo conmutativo mínimo que cumple la condición de inmersión para Z.

1. UN PRODUCTO CARTESIANO Y UNA RELACIÓN DE EQUIVALENCIA:

Supongamos que A es un dominio de integridad, esto es, un anillo conmutativo, con elemento unidad y sin divisores del cero. Para simplificar, llamemos "+" y "." a las leyes aditiva y conmutativa, respectivamente, y sean "0" y "1" sus respectivos elementos neutros (elementos cero y unidad del anillo).

Consideremos también una parte S de A que sea estable para la ley multiplicativa y que contenga al elemento unidad del anillo, esto es, un submonoide multiplicativo de A: $1\in S, \quad x,y\in S \rightarrow x.y\in S$.

Definición 1: Una relación en binaria en *AxS*

Sea el conjunto producto cartesiano

$$AxS=\{(a,s)/a\in A, s\in S\}$$

y definamos en él una relación binaria de la forma

$$(a,s)R(a',s')\Leftrightarrow \exists s_1\in S/s_1.(s'.a-s.a')=0$$

Proposición 1: La relación *R* es de equivalencia.

- Es reflexiva:

$$\forall(a,s)\in AxS,\ sa-sa=0\Rightarrow \forall s_1\in S,\ s_1(sa-sa)=0\Rightarrow(a,s)R(a,s)$$

- Es simétrica:

$$\begin{aligned}&(a,s)R(a',s')\Rightarrow \exists s_1\in S/s_1(s'a-sa')=0\Rightarrow \exists s_1\in S/s_1(sa'-s'a)=0\Rightarrow\\ &\Rightarrow(a',s')R(a,s)\end{aligned}$$

- Es transitiva:

$$\left.\begin{array}{r}(a,s)R(a',s')\\(a',s')R(a'',s'')\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}\exists s_1\in S/s_1(s'a-sa')=0\\ \exists s_2\in S/s_2(s''a'-s'a'')=0\end{array}\right\}$$

multiplicando la primera por s_2s'' y la segunda por s_1s , se tiene:

$$\begin{aligned}&\left.\begin{array}{r}s_1s_2s''(s'a-sa')=0\\ s_1s_2s(s''a'-s'a'')=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}s_1s_2(s''s'a-s''sa')=0\\ s_1s_2(s''sa'-s'sa'')=0\end{array}\right\}\Rightarrow\\ &\Rightarrow s_1s_2(s''s'a-s'sa'')=0\Rightarrow s_1s_2s'(s''a-sa'')=0\end{aligned}$$

- Las clases de equivalencia y el conjunto cociente:

Podemos representar por [a/s] a la clase de equivalencia de representante (a,s), es decir, al conjunto de todos los pares equivalentes a (a,s):

$$[a / s] = \{(a', s') / (a', s') R (a, s)\}$$

Y representaremos por $S^{-1}A$ al conjunto cociente, esto es, al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia.

$$S^{-1}A = \left\{ \left[{}^{a}\!/\!{}_{s} \right] / \left[{}^{a}\!/\!{}_{s} \right] clase\_equiv \right\}$$

2. ESTRUCTURACIÓN ALGEBRAICA DEL CONJUNTO COCIENTE COMO ANILLO CON ELEMENTO UNIDAD:

Vamos a estructurar algebraicamente el conjunto cociente $S^{-1}A$ definiendo dos leyes internas que llamaremos multiplicación o producto a la ley multiplicativa, que simbolizaremos por un punto (.) y adición o suma a la ley aditiva que simbolizaremos por la cruz (+), al igual que en el anillo A de partida.

Las propiedades de uniformidad, asociatividad, conmutatividad y de existencia de elemento neutro se prueban trivialmente en base a las propiedades de las leyes internas que confieren estructura de anillo al conjunto A. Igual de sencillo es la demostración de la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, que mostramos como ejemplo. Reseñemos, pues, la definición y propiedades básicas.

Definición 2: Una ley multiplicativa en el conjunto cociente:

$$\forall \left(a/s\right), \left(a'/s'\right) \in S^{-1}A,\ \left(a/s\right).\left(a'/s'\right) = \left(aa'/ss'\right)$$

Proposición 2: Propiedades de la ley multiplicativa en el conjunto cociente:

- Uniformidad (buena definición):

$$\left(a_1/s_1\right) = \left(a_1'/s_1'\right), \left(a_2/s_2\right) = \left(a_2'/s_2'\right) \Rightarrow \left(a_1a_2/s_1s_2\right) = \left(a_1'a_2'/s_1's_2'\right)$$

- Asociatividad:

$$\forall \left(a/s\right), \left(a'/s'\right), \left(a''/s''\right) \in S^{-1}A,\quad \left(a/s\right)\left[\left(a'/s'\right)\left(a''/s''\right)\right] = \left[\left(a/s\right)\left(a'/s'\right)\right]\left(a''/s''\right)$$

- Conmutatividad:

$$\forall \left(a/s\right), \left(a'/s'\right) \in S^{-1}A,\quad \left(a/s\right)\left(a'/s'\right) = \left(a'/s'\right)\left(a/s\right)$$

- Elemento Neutro (elemento unidad):

$$\forall \left(a/s\right) \in S^{-1}A,\ \exists \left(m/m\right) \in S^{-1}A \,/\, \left(m/m\right)\left(a/s\right) = \left(a/s\right)\left(m/m\right) = \left(a/s\right)$$

Corolario 1: El conjunto cociente es, para la ley multiplicativa, un semigrupo conmutativo con elemento unidad, es decir, un monoide conmutativo.

Efectivamente, por las propiedades que cumple la ley multiplicativa.

Definición 3: Una ley aditiva en el conjunto cociente:

$$\forall \left(a/s \right), \left(a'/s' \right), \ \left(a/s \right) + \left(a'/s' \right) = \left(as'+a's/ss' \right)$$

Proposición 3: Propiedades de la ley aditiva en el conjunto cociente:

- Uniformidad:

$$\left(a_1/s_1 \right) = \left(a_1'/s_1' \right), \left(a_2/s_2 \right) = \left(a_2'/s_2' \right) \Rightarrow \left(a_1s_2 + a_2s_1/s_1s_2 \right) = \left(a_1's_2'+a_2's_1'/s_1's_2' \right)$$

- Asociatividad:

$$\forall \left(a/s \right), \left(a'/s' \right), \left(a''/s'' \right) \in S^{-1}A, \ \left(a/s \right) + \left[\left(a'/s' \right) + \left(a''/s'' \right) \right] = \left[\left(a/s \right) + \left(a'/s' \right) \right] + \left(a''/s'' \right)$$

- Conmutatividad:

$$\forall \left(a/s \right), \left(a'/s' \right) \in S^{-1}A, \ \left(a/s \right) + \left(a'/s' \right) = \left(a'/s' \right) + \left(a/s \right)$$

- Elemento Neutro (elemento nulo):

$$\forall \left(a/s \right) \in S^{-1}A, \ \exists \left(0/m \right) \in S^{-1}A \,/ \left(0/m \right) + \left(a/s \right) = \left(a/s \right) + \left(0/m \right) = \left(a/s \right)$$

- Elemento Simétrico (opuesto):

$$\forall \left(a/s \right) \in S^{-1}A, \ \exists \left(-a/s \right) \in S^{-1}A \,/ \left(-a/s \right) + \left(a/s \right) = \left(a/s \right) + \left(-a/s \right) = \left(0/s \right)$$

Corolario 2: El conjunto cociente es, para la ley aditiva, un grupo conmutativo.

Efectivamente, también a la vista de las propiedades de la suma.

Proposición 4: La ley multiplicativa es distributiva con respecto a la ley aditiva:

$$\forall \left(a/s \right), \left(a'/s' \right), \left(a''/s'' \right) \in S^{-1}A, \ \left(a/s \right) \left[\left(a'/s' \right) + \left(a''/s'' \right) \right] = \left(a/s \right)\left(a'/s' \right) + \left(a/s \right)\left(a''/s'' \right)$$

En efecto:

Pues es:

$$\left(a/s \right) \left[\left(a'/s' \right) + \left(a''/s'' \right) \right] = \left(a/s \right) \left[\frac{a's''+a''s'}{s's''} \right] = \frac{aa's''+aa''s'}{ss's''}$$

Y también:

$$\left(a/s \right)\left(a'/s' \right) + \left(a/s \right)\left(a''/s'' \right) = \frac{aa'}{ss'} + \frac{aa''}{ss''} = \frac{aa's''}{ss's''} + \frac{aa''s'}{ss's''} = \frac{aa's''+aa''s'}{ss's''}$$

Corolario 3: Las leyes aditiva y multiplicativa en el conjunto cociente confieren a éste estructura de anillo conmutativo con elemento unidad.

Por definición de anillo, la estructura algebráica $\left(S^{-1}A,+,.\right)$ es, en efecto, un anillo conmutativo con elemento unidad, que llamaremos *anillo de fracciones o de cocientes de A por S.*

Corolario 4: El cero del anillo no está en S.
El cero del anillo A no pertenece a S $\left(0 \notin S\right)$ pues caso contrario el anillo de cocientes solo contendría la clase $\left[{}^{0}\!/\!{}_{1}\right]$, pues todos los pares de AxS serían equivalentes.

3. HOMOMORFISMOS DE ANILLOS. LA INMERSIÓN DE A EN EL ANILLO DE COCIENTES:

Proposición 5: Un homomorfismo básico de anillos.

Dada la aplicación $j_s : A \to S^{-1}A$, definida por la condición

$$\forall a \in A,\ j_s(a) = a/1$$

Se cumple:

1) Es homomorfismo, no necesariamente inyectivo.
2) $\forall x \in S \subseteq A,\ j_s(x)$ es inversible en $S^{-1}A$

En efecto:

1) Veamos que se trata de un homomorfismo:

$$\forall (a,b) \in A,\quad j_s(a+b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = j_s(a) + j_s(b)$$

$$\forall (a,b) \in A,\quad j_s(a.b) = \frac{a.b}{1} = \frac{a}{1}.\frac{b}{1} = j_s(a).j_s(b)$$

2) Veamos la inversibilidad de los elementos de la imagen de S:

$$\forall x \in S,\quad j_s(x) = \frac{x}{1} \in S^{-1}A \quad \wedge\ x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in S^{-1}A \Rightarrow \frac{1}{j_s(x)} = j_s(x)^{-1} \in S^{-1}A$$

Proposición 6: Una composición de homomorfismos.

Para todo homomorfismo de anillos, $f : A \to B$ de modo que f(s) sea inversible en B, $\forall s \in S$, se cumple que existe un único homomorfismo $g : A^{-1}S \to B$ tal que $f = g \circ j_s$. O sea:

$$\left.\begin{array}{r} f : A \to B \,/\, f(x)^{-1} \in B, \forall x \in S \\ j_s : A \to S^{-1}A \,/\, j_s(a) = \dfrac{a}{1}, \forall a \in A \end{array}\right\} \Rightarrow \exists¡g : S^{-1}A \to B \,/\, (g \text{ hom}om. \wedge f = g \circ j_s)$$

En efecto:

- Unicidad:

al ser $\forall a \in A, f(a) = (g \circ j_s)(a) = g[j_s(a)] = g\left(\dfrac{a}{1}\right) \in B$

y también $\forall x \in S, g\left(\dfrac{1}{x}\right) = g\left[\left(x/1\right)^{-1}\right] = g\left(\dfrac{x}{1}\right)^{-1} = f(s)^{-1} \in B$

Por lo cual:

$$\forall (a,s) \in AxS,\ g\left(1/s\right) = g\left(\frac{a}{1}.\frac{1}{s}\right) = g\left(\frac{a}{1}\right).g\left(\frac{1}{s}\right) = f(a).f(s)^{-1} \in B$$

por lo que la aplicación f determina a g, existiendo, pues, un único g para una aplicación dada f.

- Existencia:

Se trata de comprobar que g está bien definido, o sea, que

$$a/s = a'/s' \Rightarrow g(a/s) = g(a'/s')$$

deducimos:

$$\begin{aligned}
& a/s = a'/s' \Rightarrow \exists s_1 \in S \,/\, s_1.(s'.a - s.a') = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \exists s_1 \in S \,/\, f(s_1).(f(s').f(a) - f(s).f(a')) = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow f(s_1).(f(s').f(a) - f(s).f(a')) = 0 \wedge f(s') \neq 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow f(s').f(a) - f(s).f(a') = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow f(s').f(a) = f(s).f(a') \Rightarrow g(a/s) = g(a'/s')
\end{aligned}$$

Proposición 7: Algunas propiedades del homorfismo de A en el anillo cociente:

Se verifican las siguientes propiedades

1) La imagen de cualquier elemento de S es una unidad del anillo cociente.
2) Si la imagen de un elemento a es el elemento nulo del anillo cociente, entonces existe algún elemento de S tal que el producto por a es el cero del anillo A.
3) Todo elemento del anillo cociente es de la forma $j_s(a).j_s(s)^{-1}$ para algún elemento a del anillo A.

En efecto:

1) Ver proposición 5, 2) donde se prueba la inversibilidad de las imágenes de los elementos de S.
2) Veamos que $j_s(a) = 0 \Rightarrow \exists s \in S \,/\, s.a = 0$. Esto es así, pues

$$j_s(a) = \frac{a}{1} \wedge j_s(a) = 0 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{0}{1} \Rightarrow \exists s \in S \,/\, s.(a.1 - 0.1) = 0 \Rightarrow s.a = 0$$

3) $\forall \frac{a}{s} \in S^{-1}A,\ \frac{a}{s} = \frac{a}{1}.\frac{1}{s} = j_s(a).\frac{1}{j\ (s)} = j_s(a).j_s(s)^{-1}$

Proposición 8: Un interesante isomorfismo.

Sea $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo de anillos tal que se verifica:

1) La imagen de cualquier elemento de S es una unidad de B.
2) Si la imagen de un elemento de a es el elemento nulo de B, entonces existe algún elemento de S tal que su producto por a es el cero del anillo A.
3) Todo elemento de B es de la forma $f(a).f(s)^{-1}$.

Entonces, existe un isomorfismo único $g : S^{-1}A \rightarrow B$ tal que $f = g \circ j_s$.

En efecto:

Por proposición 6, $\exists ¡ g : S^{-1}A \to B \,/\, (g \text{ homom.} \wedge f = g \circ j_s)$, definido por

$$g\left(a/s\right) = f(a).f(s)^{-1}, \forall a/s \in S^{-1}A$$

Veamos que g es isomorfismo, probando que es suprayectivo e inyectivo:

- es suprayectivo:

  Por la condición 3) $\forall m \in B,\ m = f(a).f(s)^{-1} = g\left(a/s\right)$, es decir,

  $$\forall m \in B, \exists a/s \in S^{-1}A \,/\, g\left(a/s\right) = m$$

- es inyectivo:

  Veamos que el núcleo de g es el elemento nulo: $Ker\ g = \left\{0/1\right\}$.

$$\forall a/s \in Ker\ g \Rightarrow g\left(a/s\right) = 0 \Rightarrow g\left(a/s\right) = f(a).f(s)^{-1} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(a).f(s)^{-1} = 0 \wedge f(s)^{-1} \neq 0 \left(por\ ser\ unidad\right) \Rightarrow f(a) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (por\ 2)), \exists s_1 \in S \,/\, s_1.a = 0 \Rightarrow s_1.(1.a - s.0) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a/s = 0/1 \Rightarrow Ker\ g = \left\{0/1\right\} \Rightarrow g\ inyectiva$$

Luego, efectivamente, g es isomorfismo.

Proposición 9: El carácter inyectivo del homomorfismo básico.

Si S no contiene al cero, entonces el homomorfismo $j_s : A \to S^{-1}A$, definido por $j_s(a) = \frac{a}{1} \in S^{-1}A, \forall a \in A$, es inyectivo.

En efecto:

Veamos, efectivamente, que es nulo el núcleo de este homomorfismo.

$$\forall a \in Ker\ j_s \Rightarrow j_s(a) = \frac{a}{1} = \frac{0}{1} \Rightarrow \exists s_1 \in S \,/\, s_1(1.a - 1.0) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s_1 a = 0 \wedge s_1 \neq 0\ (pues\ 0 \notin S) \Rightarrow a = 0\ (A\ es\ dom\ \text{int}\,egro) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Ker\ j_S = \{0\} \Rightarrow j_s inyectivo$$

4. EL CUERPO DE LAS FRACCIONES:

Proposición 10: Una redefinición de la relación de equivalencia para el caso de que A sea dominio de integridad.

Si A es dominio de integridad y S = A - {0}, la relación R de equivalencia que determina $S^{-1}A = {}^{AxS}\!/_{R}$ puede expresarse por

$$(a,s)R(a',s') \Leftrightarrow a'.s = a.s'$$

En efecto:

La relación de equivalencia R fue introducida de forma general en la Definición 1, mediante la expresión

$$(a,s)R(a',s') \Leftrightarrow \exists s_1 \in S \,/\, s_1.(s'.a - s.a') = 0$$

Veamos que, si A es dominio de integridad, la relación R es equivalente a la relación R' definida así:

$$(a,s)R'(a',s') \Leftrightarrow s'.a - s.a' = 0$$

- Si $(a,s)R(a',s')$:

$$(a,s)R(a',s') \Rightarrow \exists s_1 \in S \,/\, s_1.(s'.a - s.a') = 0 \Rightarrow s_1.(s'.a - s.a') = 0 \wedge$$
$$\wedge\ s_1 \neq 0 \wedge A\ dom\ \mathrm{int}\,egr \Rightarrow s'.a - s.a' = 0 \Rightarrow s'.a = s.a' \Rightarrow (a,s)R'(a',s')$$

- Si $(a,s)R'(a',s')$':

$$(a,s)R'(a',s') \Rightarrow s'.a - s.a' = 0 \Rightarrow \forall s_1 \in S,\ s_1.(s'.a - s.a') = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a,s)R(a',s')$$

Proposición 11: El cuerpo de los cocientes.

El anillo cociente es un cuerpo si A es dominio íntegro y S = A - {0}.

En efecto:

Veamos que, con esta condición, en el anillo conmutativo con elemento unidad de los cocientes, todo elemento, salvo el elemento nulo, es inversible.

$$\forall \frac{a}{s} \in S^{-1}A - \left\{{}^{0}\!/_{1}\right\} \Rightarrow {}^{a}\!/_{s} \neq {}^{0}\!/_{1} \Rightarrow a \neq 0 \wedge s \neq 0\ (pues\ s \in S) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{s}{a} \in S^{-1}A - \left\{{}^{0}\!/_{1}\right\} \Rightarrow \frac{a}{s}.\frac{s}{a} = \frac{1}{1} \Rightarrow {}^{a}\!/_{s}\ inversible$$

Definición 4: Cuerpo de fracciones o campo de fracciones.

Si A es un dominio íntegro y es S = A - {0}, entonces el cuerpo $S^{-1}A$ se llama cuerpo de fracciones o de cocientes del dominio de integridad.

Corolario 5: Inmersión del dominio íntegro A en su cuerpo de fracciones.

El dominio de integridad A puede sumergirse en su cuerpo de fracciones, ya que el conjunto $A' = \left\{ \frac{a}{1} / a \in A - \{0\} \right\}$ es un subanillo de dicho cuerpo isomorfo al anillo A.

Proposición 13: Carácter minimal del cuerpo de fracciones.

Dado un dominio de integridad, A, su cuerpo de fracciones, $S^{-1}A$, es el menor para la inclusión que contiene un subanillo isomorfo a A.

En efecto:

Veamos que de existir un subcuerpo M de $S^{-1}A$, $M \subseteq S^{-1}A$, que contenga un anillo A' isomorfo a A, dicho subcuerpo M ha de coincidir con $S^{-1}A$.

$$\forall\, {}^{a}\!/\!_{b} \in S^{-1}A,\ \frac{a}{b} = \frac{a}{1}.\frac{1}{b} \wedge \frac{a}{1} \in A' \wedge \frac{1}{b} \in A' \Rightarrow {}^{a}\!/\!_{b} \in M \Rightarrow S^{-1}A \subseteq M$$

Por tanto, $S^{-1}A = M$

Proposición 14: La unicidad del cuerpo de fracciones.

Cualquier cuerpo conmutativo, K, tal que el único subcuerpo del mismo que contenga un subanillo isomorfo a A sea el propio K, es isomorfo a $S^{-1}A$.

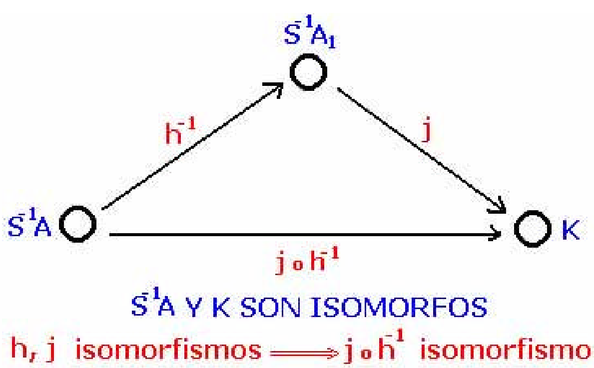
En efecto:

Si llamamos A_1 al subanillo del cuerpo K isomorfo al dominio A, y $S_1^{-1}A_1$ a su correspondiente cuerpo de cocientes en K, daremos los pasos siguientes:

a) Probaremos que $S^{-1}A_1$ es isomorfo a $S^{-1}A$.
b) Probaremos que $S^{-1}A_1$ es isomorfo a K.

Por lo que obtendremos como conclusión que $S^{-1}A$ es isomorfo a K.

Es decir, se verificaría el siguiente diagrama de isomorfismos:



- Un isomorfismo entre los cuerpos de fracciones:

Sea $g : A \to K$ el homomorfismo inyectivo que existe por hipótesis y llamemos $A_1 = g(A)$, con lo cual $g : A \to A_1$ es isomorfismo y A_1 es también un dominio de integridad.

El cuerpo de fracciones de A_1 será $S_1^{-1}A_1$ donde $S_1 = A_1 - \{0\}$.

en estas condiciones, definimos la correspondencia $h : S_1^{-1}A_1 \to S^{-1}A$ por la condición:

$$\forall\left(\frac{a}{b}\right) \in S_1^{-1}A_1,\ h\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{g^{-1}(a)}{g^{-1}(b)}$$

y veamos que ha de ser un isomorfismo:

a) Es una aplicación:

Puesto que $b \in A_1 - \{0\} \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow g^{-1}(b) \neq 0$, ya que g es un isomorfismo de A en A_1.

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow a.b' = a'.b \Rightarrow g^{-1}(a.b') = g^{-1}(a'.b) \Rightarrow g^{-1}(a).g^{-1}(b') = g^{-1}(a').g^{-1}(b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{g^{-1}(a)}{g^{-1}(b)} = \frac{g^{-1}(a')}{g^{-1}(b')} \Rightarrow h\left(\frac{a}{b}\right) = h\left(\frac{a'}{b'}\right)$$

b) Es biyectiva:

Es inyectiva, pues

$$h\left(\frac{a}{b}\right) = h\left(\frac{a'}{b'}\right) \Rightarrow \frac{g^{-1}(a)}{g^{-1}(b)} = \frac{g^{-1}(a')}{g^{-1}(b')} \Rightarrow g^{-1}(a).g^{-1}(b') = g^{-1}(a').g^{-1}(b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g^{-1}(a.b') = g^{-1}(a'.b) \wedge g\ isomorf \Rightarrow a.b' = a'.b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

Es sobreyectiva, pues

$$\forall\left(\frac{c}{d}\right) \in S^{-1}A,\ (c,d) \in Ax(A - \{0\}) \Rightarrow \exists (a,b) \in A_1x(A_1 - \{0\}) \,/\, g(c) = a \wedge g(d) = b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g^{-1}(a) = c \wedge g^{-1}(b) = d \Rightarrow \exists\left(\frac{a}{b}\right) \in S_1^{-1}A_1 \,/\, h\left(\frac{a}{b}\right) = h\left(\frac{g(c)}{g(d)}\right) = \frac{g^{-1}(g(c))}{g^{-1}(g(d))} = \frac{a}{b}$$

c) Es homomorfismo:

$$\forall\left(\frac{a}{b}\right),\left(\frac{a'}{b'}\right) \in S_1^{-1}A_1,\ h\left(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}\right) = h\left(\frac{a.b' + a'.b}{b.b'}\right) = \frac{g^{-1}(a.b' + a'.b)}{g^{-1}(b.b')} =$$
$$= \frac{g^{-1}(a).g^{-1}(b') + g^{-1}(a').g^{-1}(b)}{g^{-1}(b).g^{-1}(b')} = \frac{g^{-1}(a)}{g^{-1}(b)} + \frac{g^{-1}(a')}{g^{-1}(b')} = h\left(\frac{a}{b}\right) + h\left(\frac{a'}{b'}\right)$$

$$h\left(\frac{a}{b}.\frac{a'}{b'}\right)=h\left(\frac{a.a'}{b.b'}\right)=\frac{g^{-1}(a.a')}{g^{-1}(b.b')}=\frac{g^{-1}(a).g^{-1}(a')}{g^{-1}(b).g^{-1}(b')}=\frac{g^{-1}(a)}{g^{-1}(b)}.\frac{g^{-1}(a')}{g^{-1}(b')}=h\left(\frac{a}{b}\right).h\left(\frac{a'}{b'}\right)$$

- El isomorfismo entre el cuerpo de fracciones $S_1^{-1}A_1$ y el cuerpo K:

Definimos $j : S_1^{-1}A_1 \rightarrow K$ por $\forall\left(\frac{a}{b}\right)\in S_1^{-1}A_1,\ j\left(\frac{a}{b}\right)=a.b^{-1}$
y veamos que ha de ser isomorfismo:

a) Es una aplicación:

$$\forall(a,b)\in A_1x(A_1-\{0\})\Rightarrow a.b^{-1}\in K\ (pues\ A_1\subset K)$$
$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}\Rightarrow a.b'=a'b\Rightarrow(multip\ \ por\ b^{-1}b'^{-1})\Rightarrow a.b^{-1}=a'b'^{-1}\Rightarrow\ j\left(\frac{a}{b}\right)=j\left(\frac{a'}{b'}\right)$$

b) Es biyectiva:
Es inyectiva, pues
$$j\left(\frac{a}{b}\right)=j\left(\frac{a'}{b'}\right)\Rightarrow a.b^{-1}=a'.b'^{-1}\Rightarrow(multip\ \ por\ b.b')\Rightarrow a.b'=a'b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$
Es sobreyectiva, pues $\forall x\in K,\ x=a.b^{-1}$ ya que fijado b, será $\forall m\in K,\ m.b\in k$
y si llamamos a = $m.b$, se tiene que m=a.b^{-1} $\Rightarrow\exists\left(\frac{a}{b}\right)\in K\,/\ j\left(\frac{a}{b}\right)=a.b^{-1}=m$

c) Es homomorfismo:
$$\forall\left(\frac{a}{b}\right),\left(\frac{a'}{b'}\right)\in S_1^{-1}A_1,\ j\left(\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}\right)=j\left(\frac{a.b'+a'b}{b.b'}\right)=(a.b'+a'b)(b.b')^{-1}=a.b^{-1}+a'b'^{-1}=$$
$$=j\left(\frac{a}{b}\right)+j\left(\frac{a'}{b'}\right)$$
$$\forall\left(\frac{a}{b}\right),\left(\frac{a'}{b'}\right)\in S_1^{-1}A_1,\ j\left(\frac{a}{b}.\frac{a'}{b'}\right)=j\left(\frac{a.a'}{b.b'}\right)=(a.a').(b.b')^{-1}=(a.b^{-1}).(a'b'^{-1})=j\left(\frac{a}{b}\right).j\left(\frac{a'}{b'}\right)$$

- Conclusión:

Habida cuenta de que son isomorfismos las correspondencias h y j, también será isomorfismo la correspondencia inversa de cada una de ellas, así como su composición, por lo cual, es isomorfismo $j_o h^{-1}$:

$$j\circ h^{-1} : S^{-1}A\rightarrow K\ \ es\ isomorfismo$$

y esto prueba la proposición de unicidad del cuerpo de las fracciones de un dominio de integridad.

En la aritmética ordinaria, por ejemplo, el único cuerpo de fracciones del dominio íntegro Z de los números enteros es el campo Q de los números racionales.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Atiyah, M; MacDonald, IG., Introducción al algebra Conmutativa, Ed. Reverté, 1975.

Abellanas, P., Geometría Básica, Ed. Romo, 1961

Bourbaki, N., Álgebra Conmutativa, 1985, Ed. Masson, París

Zariski, O.; Samuel, P., Conmutative Algebra, Ed. Springer 1990