Correspondencias entre conjuntos

1 Idea de correspondencia

1.1. Definiciones básicas

Una *correspondencia f* entre dos conjuntos, A y B, es una terna, f=(G,A,B), donde G es un grafo cuya primera componente o proyección está contenida en A y cuya segunda componente o proyección está contenida en B:

$$f \ corresp \leftrightarrow f = \left(G, A, B\right) \wedge pr_1 G \subseteq A \wedge pr_2 G \subseteq B$$

En cada uno de los pares (x,y) componentes del grafo, diremos que la segunda componente *corresponde* a la primera, "y corresponde por f a x", y lo indicaremos por *y=f(x)*.

El conjunto A se llama *conjunto inicial* o *conjunto de partida* de la correspondencia f. Lo indicaremos por *A = in f*. El conjunto B se llama *conjunto final* o *conjunto de llegada* y lo representamos por *B = fin f*.

El conjunto de la primera proyección del grafo se denomina *conjunto de definición* o *conjunto original* de la correspondencia, y el conjunto de la segunda proyección del grafo se llama *conjunto de valores* o *conjunto imagen* de la correspondencia:

Conjunto de definición: $D= pr_1G= orig\ f$, *Conjunto de valores*: $V=pr_2G = imag\ f$

De lo dicho, es obvio que

$$(\forall x)(x \in pr_1G \leftrightarrow (\exists y)(y \in B \wedge (x,y) \in G))$$
$$(\forall y)(y \in pr_2G \leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge (x,y) \in G))$$

Dada una parte X del conjunto A, el conjunto de todos los elementos de B que corresponden a todos los elementos de X se llama imagen de X por f y se puede simbolizar mediante f(X):

$$f(X) = \left\{ y / (\exists x)(x \in X \wedge (x,y) \in G \right\}$$

Es obvio, según esto, que *f(A) = pr₂G*.

1.2. Algunas propiedades inmediatas

Teorema 1: Se verifica que

$$X \subseteq Y \subseteq A \to f(X) \subseteq f(Y)$$

En efecto, pues:

$$\forall y \in f(X) \to (\exists x)(x \in X \wedge (x,y) \in G) \wedge X \subseteq Y \to$$
$$\to (\exists x)(x \in Y \wedge (x,y) \in G) \to y \in f(Y) \to f(X) \subseteq f(Y)$$

consecuentemente:

$$\forall X \subseteq A \to f(X) \subseteq f(A) = pr_2G = imf$$

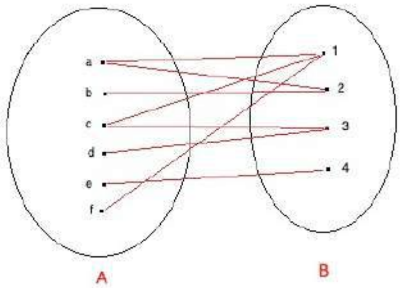
Teorema 2:
$\forall X, Y \subseteq A,$

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$$
$$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$$

Demostración:
$\forall u \in f(X \cup Y) \to (\exists x)(x \in X \cup Y / f(x) = u \to x \in X \vee x \in Y \to$
$\to f(x) \in f(X) \vee f(x) \in f(Y) \to u = f(x) \in f(X) \cup f(Y)$
por tanto: $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$
$\forall u \in f(X) \cup f(Y) \to u \in f(X) \vee u \in f(Y) \to \exists x \in f(X) / f(x) = u \vee$
$\vee \exists y \in f(Y) / f(y) = u \to \exists z \in X \cup Y / f(z) = u \to u \in f(X \cup Y)$
por tanto: $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$
Y de ambas inclusiones se sigue la igualdad: $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

$\forall u \in f(X \cap Y) \to (\exists x)(x \in X \cap Y / f(x) = u \to x \in X \wedge x \in Y \to$
$\to f(x) \in f(X) \wedge f(x) \in f(Y) \to f(x) = u \in f(X) \cap f(Y)$
Por tanto: $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$
La inclusión en sentido contrario no se verifica. Para probarlo bastará un contraejemplo:

Sean los conjuntos A={a,b,c,d,e,f} y B={1,2,3,4} y la correspondencia definida por el grafo G={(a,1),(a,2),(b,2),(c,1),(c,3),(d,3),(e,4),(f,1)}, gráficamente:



Si consideremos las partes de A: X={a,b,c} y Y={b,d,e}, se tiene:

$X \cap Y = \{b\}$, $f(X) = \{1,2,3\}$, $f(Y) = \{2,3,4\}$,

$f(X) \cap f(Y) = \{2,3\}$, $f(X \cap Y) = \{2\}$

De donde resulta evidente que $f(X) \cap f(Y) \not\subset f(X \cap Y)$

Teorema 3: $f(pr_1 G) = pr_2 G$

En efecto: como $pr_1 G \subseteq A$ y $pr_2 G \subseteq B$ será $pr_1 G \subseteq A \to f(pr_1 G) \subseteq f(A) = pr_2 G$

Y por otra parte

$\forall y \in pr_2 G \to \exists x \in A \,/\, f(x) = y \to x \in pr_1 G \to y = f(x) \in f(pr_1 G) \to$

$\to pr_2 G \subseteq f(pr_1 G)$

y de ambas inclusiones se sigue la igualdad: $f(pr_1 G) = pr_2 G$

1.3. Correspondencia recíproca

Dada la correspondencia $f = (G; A, B)$, se llama grafo recíproco del grafo G al grafo $G^{-1} = \{(y,x) / (x,y) \in G\}$.

Es obvio que

$$pr_1 G^{-1} = pr_2 G \subseteq B$$

$$pr_2 G^{-1} = pr_1 G \subseteq A$$

y que la terna

$$(G^{-1}; B, A)$$

es también una correspondencia que representaremos por $f^{-1} = (G^{-1}; B, A)$ y que se denomina *correspondencia reciproca* de la correspondencia dada.

Se verifica obviamente la involución: $(G^{-1})^{-1} = G$, por lo que $(f^{-1})^{-1} = f$.

1.4. Álgebra de correspondencias

Dadas dos correspondencias entre los conjuntos A y B

$$f = (G; A, B), \quad f' = (G'; A, B)$$

Se definen las operaciones básicas de unión, intersección, complementación e inclusión de ambas correspondencias, como dichas operaciones entre sus grafos:

Unión e intersección:

$$f \cup f' = \left(G \cup G'; A, B\right), \quad f \cap f' = \left(G \cap G'; A, B\right)$$

Complementación:

$\bar{f} = \left(\bar{G}; A, B\right)$, donde $\bar{G}$ es el complementario de *G* en $A \times B$.

Inclusión:
La correspondencia $f = \left(G; A, B\right)$ se dice contenida en la correspondencia $f' = \left(G'; A, B\right)$ sii se da la inclusión entre sus grafos correspondientes, $G \subset G'$.
Indicamos dicha inclusión por $f \subset f'$, o bien por $f' \to f$.

Las propiedades de estas operaciones son las mismas que tienen en la teoría de conjuntos, ya que, en definitiva, se trata de la realización de dichas operaciones entre los correspondientes grafos, que son conjuntos. El desarrollo de estas propiedades da lugar al álgebra de correspondencias.

2 Composición de correspondencias

2.1. Sobre el producto de grafos

Se llama *grafo producto* o *grafo composición*, G′$_o$G, de los grafos G y G′ al grafo dado por

$$G' \circ G = \left\{(x,z) / (\exists y)(y \in pr_2 G \cap pr_1 G' \wedge (x,y) \in G \wedge (y,z) \in G')\right\}$$

$G' \circ G$ es, efectivamente, un grafo, que será vacío si $pr_2 G \cap pr_1 G' = \phi$.
Puesto que $(x,u) \in G' \circ G \to (\exists y)(y \in pr_2 G \wedge (x,y) \in G \to x \in pr_1 G \to$
$\to pr_1(G' \circ G) \subseteq pr_1 G$
De igual modo es $pr_2 G' \circ G \subseteq pr_2 G$

Propiedades básicas:

a. El grafo recíproco del grafo producto G′oG es el producto de los grafos recíprocos en orden contrario:

$$(G' \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ G'^{-1}$$

En efecto:

$$(z,x) \in (G' \circ G)^{-1} \leftrightarrow (x,z) \in G' \circ G \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \left(\exists y\right)\left(y \in pr_2 G \cap pr_1 G' \wedge (x,y) \in G \wedge (y,z) \in G'\right) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \left(\exists y\right)\left(y \in pr_2 G \cap pr_1 G' \wedge (y,x) \in G^{-1} \wedge (z,y) \in G'^{-1}\right) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \left(\exists y\right)\left(y \in pr_1 G^{-1} \cap pr_2 G'^{-1} \wedge (y,x) \in G^{-1} \wedge (z,y) \in G'^{-1}\right) \leftrightarrow$$

$\leftrightarrow (z,x) \in G'^{-1} \circ G^{-1}$

Por tanto, $(G' \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ G'^{-1}$

b. La composición de grafos tiene la propiedad asociativa:

Sean los grafos G_1, G_2, G_3. Se tiene:

$$(G_1 \circ G_2) \circ G_3 = G_1 \circ (G_2 \circ G_3)$$

En efecto:

$(x,h) \in (G_1 \circ G_2) \circ G_3 \leftrightarrow (\exists y)(y \in pr_2 G_3 \cap pr_1(G_1 \circ G_2) \wedge (x,y) \in G_3 \wedge (y,h) \in (G_1 \circ G_2)) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (\exists y)(y \in pr_2 G_3 \cap pr_1(G_1 \circ G_2) \wedge (x,y) \in G_3 \wedge (\exists z)(z \in pr_2 G_2 \cap pr_1 G_1 \wedge$
$\wedge ((x,z) \in G_2 \wedge (z,h) \in G_1)) \leftrightarrow (z,h) \in G_1 \wedge (x,z) \in G_2 \circ G_3 \leftrightarrow (x,h) \in G_1 \circ (G_2 \circ G_3)$

c. La composición de grafos no es conmutativa, en incluso puede no estar definida en uno de los dos sentidos.
En efecto: Es obvio.

2.2. Composición de correspondencias. Propiedades

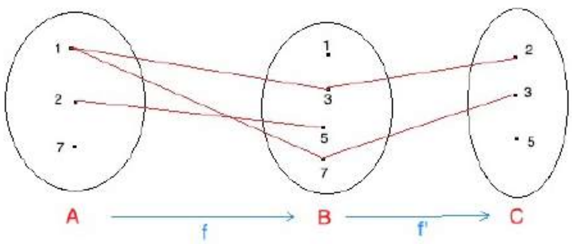
Dados los conjuntos A, B y C, y las correspondencias *f=(G;A,B)* y *f'=(G';B,C)*, se denomina *correspondencia producto* o *correspondencia compuesta* de f y f', denotándose por $f' \circ f$, a la correspondencia

$$f' \circ f = \left(G' \circ G; A, C\right)$$

Ejemplo:

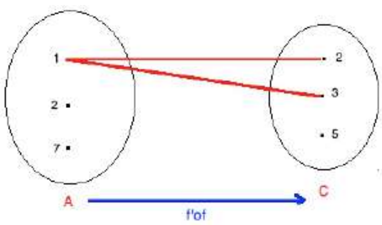
Sean los conjuntos $A = \{1,2,7\}$, $B = \{1,3,5,7\}$, $C = \{2,3,5\}$, y las correspondencias $f = \left(G; A, B\right)$, $f' = \left(G'; B, C\right)$, de grafos $G = \{(1,3),(2,5),(1,7)\}$, $G' = \{(3,2),(7,3)\}$
.

Se tiene:



$$G' \circ G = \{(1,2),(1,3)\}$$

$$f' \circ f = \left(G' \circ G; A, C\right)$$



Propiedades:

a. La correspondencia recíproca de una composición de dos correspondencias es la composición de ambas correspondencias recíprocas en contrario sentido:

$$(f' \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ f'^{-1}$$

Efectivamente: esta propiedad se verifica en base a que también se cumple para los correspondientes grafos.

b. Asociatividad:

$$(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$$

En efecto: pues es asociativa la composición de los grafos correspondientes

c. No conmutatividad:
La composición de correspondencias no es conmutativa, al no serlo la composición de los grafos.

2.3. Clasificación:

a. Correspondencia *idéntica*:
Un grafo G se dice que es *diagonal* si las dos componentes de cada par son iguales entre sí:

$$G \text{ diagonal} \leftrightarrow \forall (x,y) \in G,\ x = y$$

Una correspondencia es idéntica si su grafo es diagonal:

$$f = \left(G; A, B\right) \text{ idéntica} \leftrightarrow G \text{ diagonal}$$

b. Correspondencia *unívoca*:
Un grafo G se dice que es *unívoco* si no contiene pares distintos con la primera componente igual:

$$G \text{ unívoco} \leftrightarrow \forall (x,y),(x,y') \in G,\ \ y = y'$$

Una correspondencia es unívoca si su grafo es unívoco:

$$f = \left(G; A, B\right) \text{ unívoca} \leftrightarrow G \text{ unívoco}$$

c. Correspondencia *inyectiva*:
Un grafo G se dice *inyectivo* si no contiene pares distintos con la segunda componente igual:

$$G \text{ inyectivo} \leftrightarrow \forall (x,y),(x',y) \in G,\ x = x'$$

Una correspondencia unívoca es inyectiva si su grafo es inyectivo:

$$f = \left(G; A, B\right) \; inyectiva \leftrightarrow G \; unívoco \; e \; inyectivo$$

d. Correspondencia *suprayectiva*:
Una correspondencia es *suprayectiva* o *sobreyectiva*, si el conjunto final coincide con el conjunto imagen o conjunto de valores:

$$f = \left(G; A, B\right) \; sobreyectiva \leftrightarrow B = img \; f$$

e. Correspondencia *biyectiva*:
Una correspondencia es *biyectiva* si es *inyectiva* y *suprayectiva*:

$$f = \left(G; A, B\right) \; biyectiva \leftrightarrow G \; inyectivo \wedge B = img \; f$$

3 Bibliografía

Halmos, Paul R.- Teoría intuitiva de conjuntos.
CECSA, México, 1976

Zarisky, O.; Samuel P.- Conmutative Álgebra.
Springer, New York, 1991

Godement, R.-Álgebra.
Tecnos, Madrid, 1978