SOBRE CUERPOS ORDENADOS

1. Introducción

Podemos definir en un cuerpo cualquiera K, sea o no conmutativo, una cierta clase de elementos del mismo, su clase positiva, que en unión con el elemento nulo constituye el llamado semicuerpo positivo de elementos de K y que permite, de forma natural, establecer para los elementos del cuerpo una relación de orden total.

El orden establecido en un cuerpo K utilizando su clase positiva nos plantea la posibilidad de definir correspondencias entre los elementos del cuerpo entre sí o entre los elementos del cuerpo y otros conjuntos numéricos, imponiendo condiciones de definición que se basen en el orden de K, o en su clase positiva. Así, podemos definir de forma sencilla conceptos como *valor absoluto*, *sucesión,* etc.. y tipificar en base a estos conceptos estructuras como *cuerpo arquimediano* o *cuerpo completo.*

2. Ordenación

Un subconjunto P de un cuerpo K, no vacío, se dice que es *clase positiva de* K si tiene las dos propiedades:

a) Para cualquier elemento del cuerpo se cumple que o bien pertenece a P o bien su opuesto pertenece a P, o bien el elemento es el cero del cuerpo.
b) Para dos elementos cualesquiera de P, entonces también pertenece a P la composición de ambos mediante las leyes internas del cuerpo, esto es, su suma (por la ley aditiva), y su producto (por la ley multiplicativa).

Se denomina *cuerpo ordenado* a un par *(P,K)* cuyos elementos son un cuerpo K y una clase positiva P de K.

$$P \subseteq K \text{ clase positiva de } K \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\forall x \in K,\, x \in P \vee (-x) \in P \vee x = 0\right) \\ \wedge \\ \forall x, y \in P,\, x + y \in P \wedge x.y \in P \end{cases}$$

Trivialmente, $P \bigcup \{0\}$ verifica también las condiciones a) y b), por lo que es un semicuerpo de K que denominaremos *semicuerpo positivo de* K. Los elementos de P se dicen *elementos positivos* del cuerpo K.

Orden: Definimos en K la relación "$\leq$" por la condición

$$\forall x, y \in K,\, x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P \bigcup \{0\}$$

Teorema 2.1: La relación "$\leq$" es una relación de orden total.

Demostración:

- Es reflexiva:
  $\forall x \in K, x - x = 0 \in P \bigcup \{0\} \to x \leq x$
- Es antisimétrica:
  $Sean\ x, y \in K / x \leq y \wedge y \leq x \to y - x \in P \bigcup \{0\} \wedge x - y \in P \bigcup \{0\} \to$
  $\to (y - x) \in P \bigcup \{0\} \wedge -(y - x) \in P \bigcup \{0\} \to (y - x) = -(y - x) \to x = y$
- Es transitiva:
  $\forall x, y, z \in K, x \leq y \wedge y \leq z \to (y - x) \in P \bigcup \{0\} \wedge (z - y) \in P \bigcup \{0\} \to$
  $\to (y - x) + (z - y) \in P \bigcup \{0\} \to z - x \in P \bigcup \{0\} \to x \leq z$

Teorema 2.2: Sea (K, P) un cuerpo ordenado. Para todo subcuerpo $K_1 \subseteq K$ se verifica que $(K_1, K_1 \bigcap P)$ es también un cuerpo ordenado con el orden de K restringido a K_1.
Demostración:

a) $\forall x \in K_1 \to x \in K \to (x \in K \wedge x \in P) \vee (x \in K \wedge -x \in P) \vee x = 0 \to$
$\to (x \in K_1 \wedge x \in P) \vee (x \in K_1 \wedge -x \in P) \vee x = 0 \to x \in (K_1 \bigcap P) \vee -x \in (K_1 \bigcap P) \vee x = 0$

b) $\forall x, y \in K_1 \bigcap P \to x, y \in K_1 \wedge x, y \in P \to (x + y), (x.y) \in K_1 \wedge (x + y), (x.y) \in P \to$
$\to (x + y) \in K_1 \bigcap P \wedge (x.y) \in K_1 \bigcap P$

3. Propiedades de la ordenación

3.1) $\forall x \in K / x \neq 0 \to x^2 \in P \to x^2 > 0$. Demostración:
$x \neq 0 \to x \in P \vee -x \in P$. Si $x \in P \to x.x = x^2 \in P$, Si $-x \in P \to (-x).(-x) = x^2 \in P$

3.2) $1 \in P \to 1 > 0$. Demostración:
$1 \in K \wedge 1 \neq 0 \to 1^2 = 1 \in P$

3.3) Si $n \in N, n.1 \in P. \to n.1 > 0$ Demostración (inducción):
$1 \in P, 1 + 1 = 2 \in P, Si\ (n - 1).1 \in P \to (n - 1).1 + 1 = n.1 \in P$

3.4) Si $x_i \in K, i = 1,2,...,n \to \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0, \forall n \in N$. Demostración:

por 1): $x_i \in K \to x_i = 0 \vee x_i^2 \in P \to x_i^2 \in P \bigcup \{0\}$. Aplicando inducción:

$x_1^2 \in P \bigcup \{0\}, x_1^2 + x_2^2 \in P \bigcup \{0\}, \ldots$, Si $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \in P \bigcup \{0\} \to \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \in P \bigcup \{0\}$

3.5) $\forall x, y, z \in K / x > y \to x + z > y + z$
Demostración:
$x > y \leftrightarrow y \leq x \wedge y \neq x \leftrightarrow x - y \in P \bigcup \{0\} \wedge x - y \neq 0 \leftrightarrow x - y \in P$
$x > y \to (x + z) - (y + z) = x - y \in P \to x + z > y + z$

3.6) $\forall x, y, z, u \in K / x > y \wedge z > u \to x + z > y + u$
Demostración:
$$\left.\begin{matrix} x > y \\ z > u \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x - y \in P \\ z - u \in P \end{matrix}\right\} \to (x - y) + (z - u) \in P \to (x + z) - (y + u) \in P \to x + z > y + u$$

3.7) $\forall x, y, z \in K / x > y \wedge z > 0 \to x.z > y.z$
Demostración:
$$\left.\begin{matrix} x > y \\ z > 0 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x - y \in P \\ z \in P \end{matrix}\right\} \to (x - y).z \in P \to x.z - y.z \in P \to x.z > y.z$$

3.8) $\forall x,y,z \in K / x > y \wedge z < 0 \rightarrow x.z < y.z$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} x > y \\ z < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x - y \in P \\ 0 - z \in P \end{array}\right\} \rightarrow (x-y).(0-z) \in P \rightarrow y.z - x.z \in P \rightarrow y.z > x.z$$

3.9) $\forall x \in K / x > 0 \rightarrow x^{-1} > 0$

Demostración (Red. al absurdo):

Si $x^{-1} < 0$ por 8) se cumple que $x.x^{-1} < 0 \rightarrow 1 < 0$ (absurdo)$\rightarrow x^{-1} > 0$

3.10) $\forall x \in K / x < 0 \rightarrow x^{-1} < 0$

Demostración (Red. al absurdo):

Si $x^{-1} > 0$ por 8) se cumple que $x.x^{-1} < 0 \rightarrow 1 < 0$ (absurdo)$\rightarrow x^{-1} < 0$

3.11) $\forall x,y \in K / x > y \rightarrow x > \frac{x+y}{2} > y$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} 2 > 0 \\ x > y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 1/2 > 0 \\ x > y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 1/2 - 0 \in P \\ x - y \in P \end{array}\right\} \rightarrow (1/2 - 0).(x-y) \in P \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(x-y) \in P \rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \in P$$

a) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \in P \rightarrow x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \in P \rightarrow x - \frac{x+y}{2} \in P \rightarrow x > \frac{x+y}{2}$

b) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \in P \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - y \in P \rightarrow \frac{x+y}{2} - y \in P \rightarrow \frac{x+y}{2} > y$

Por tanto, $x > y \rightarrow x > \frac{x+y}{2} > y$

3.12) $x.y > 0 \rightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$

Demostración (Red. al absurdo):

Si $x > 0 \wedge y < 0 \rightarrow (x-0) \in P \wedge (0-y) \in P \rightarrow -x.y \in P \rightarrow x.y \notin P \rightarrow$

$\rightarrow x.y \leq 0$ contrario a la hipótesis. Luego, $x > 0 \rightarrow y > 0$

Si $x < 0 \wedge y > 0 \rightarrow (0-x) \in P \wedge (y-0) \in P \rightarrow -x.y \in P \rightarrow x.y \notin P \rightarrow$

$\rightarrow x.y \leq 0$ contrario a la hipótesis. Luego, $x < 0 \rightarrow y < 0$

3.13) No existen en el cuerpo ordenado (K,P) elementos mínimo ni máximo, positivo o negativo.

Demostración:

$$\forall x \in K / x \in P \rightarrow x > 0 \rightarrow x > \frac{x+0}{2} > 0 \rightarrow x > \frac{x}{2} > 0 \rightarrow x \text{ no mínimo}$$

$$\forall x \in K / x \in P \rightarrow x > 0 \rightarrow 2x > x > 0 \rightarrow x \text{ no máximo}$$

$$\forall x \in K / x \notin P \rightarrow x < 0 \rightarrow x < \frac{x}{2} < 0 \rightarrow x \text{ no máximo}$$

$$\forall x \in K / x \notin P \rightarrow x < 0 \rightarrow 2x < x < 0 \rightarrow x \text{ no mínimo}$$

4. El valor absoluto

Dado un cuerpo K, ordenado mediante una clase positiva, P, esto es, el par (K,P), se define la aplicación valor absoluto de K en $P \cup \{0\}$:

$$|\ |: K \rightarrow P \cup \{0\}$$

$$\forall x \in K, |x| \in P \bigcup \{0\}$$

por la condición:

$$\forall x \in K, |x| = \begin{cases} x, & si\ x \in P \bigcup \{0\} \\ -x, & si\ x \notin P \bigcup \{0\} \end{cases}$$

o lo que es lo mismo:

$$\forall x \in K, |x| = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases}$$

5. Propiedades del valor absoluto

5.1) $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$

Demostración:

Si $x = 0 \rightarrow x \in P \bigcup \{0\} \rightarrow |x| = x \wedge x = 0 \rightarrow |x| = 0$

Si $|x| = 0 \rightarrow x \geq 0 \rightarrow x \in P \bigcup \{0\} \wedge |x| = x \wedge |x| = 0 \rightarrow x = 0$

5.2) $\forall x \in K, |-x| = |x|$

Demostración:

Si $x > 0 \rightarrow -x < 0 \rightarrow |x| = x \wedge |-x| = -(-x) = x \rightarrow |-x| = |x|$

Si $x < 0 \rightarrow -x > 0 \rightarrow |x| = -x \wedge |-x| = -x \rightarrow |-x| = |x|$

Si $x = 0 = -0 \rightarrow |-0| = |0|$

5.3) $\forall x, y \in K, |x.y| = |x|.|y|$

Demostración:

Si $x > 0, y > 0 \rightarrow x.y > 0 \rightarrow |x.y| = x.y = |x|.|y|$

Si $x < 0, y < 0 \rightarrow x.y > 0 \rightarrow |x.y| = x.y = (-|x|).(-|y|) = |x|.|y|$

Si $x > 0, y < 0 \rightarrow x.y < 0 \rightarrow |x.y| = -x.y = -|x|.(-|y|) = |x|.|y|$

Si $x < 0, y > 0 \rightarrow x.y < 0 \rightarrow |x.y| = -x.y = -(-|x|).|y| = |x|.|y|$

Trivialmente, si $x = 0 \vee y = 0 \rightarrow |x.y| = |0| = 0$

5.4) $\forall z \geq 0, |x| \leq z \leftrightarrow -z \leq x \leq z$

Demostración:

Veamos que $|x| \leq z \rightarrow -z \leq x \leq z$

Si $x \geq 0 \wedge |x| \leq z \rightarrow z - |x| \geq 0 \rightarrow z - x \geq 0 \rightarrow x \leq z \wedge x \geq 0 \rightarrow -z \leq x \leq z$

Si $x < 0 \wedge |x| \leq z \rightarrow z - |x| \geq 0 \rightarrow z - (-x) \geq 0 \rightarrow z \geq -x \wedge x < 0 \rightarrow$
$\rightarrow -z \leq x \wedge x \leq z \rightarrow -z \leq x \leq z$

Veamos que $-z \leq x \leq z \rightarrow |x| \leq z$

Si $x \geq 0 \rightarrow |x| = x \wedge x \leq z \rightarrow |x| \leq z$

Si $x < 0 \rightarrow |x| = -x \wedge -z \leq x \rightarrow |x| = -x \wedge -x \leq z \rightarrow |x| \leq z$

5.5) $\forall x \in K, -|x| \leq x \leq |x|$

Demostración:

Si $x \geq 0 \rightarrow |x| = x \rightarrow -|x| \leq x = |x| \rightarrow -|x| \leq x \leq |x|$

Si $x < 0 \rightarrow |x| = -x \rightarrow -|x| = x \wedge x \leq |x| \rightarrow -|x| \leq x \leq |x|$

5.6) $\forall x,y\in K, \left||x|-|y|\right|\le |x+y|\le |x|+|y|$

Demostración:

De ser $-|x|\le x\le |x| \wedge -|y|\le y\le |y|$, sumando: $-|x|-|y|\le x+y\le |x|+|y|$, por tanto, aplicando 4): $|x+y|\le |x|+|y|$, y como también es $x-y\le x+y$, podemos escribir:

$|x\pm y|\le |x|+|y|$ (*)

Por otra parte es:

$$\left.\begin{array}{l} |x|=|(x-y)+y|\le |x-y|+|y|\rightarrow |x|-|y|\le |x-y| \\ |y|=|(y-x)+x|\le |y-x|+|x|\rightarrow |y|-|x|\le |y-x| \end{array}\right\}\rightarrow \left||x|-|y|\right|\le |x-y|$$

y también:

$$\left.\begin{array}{l} |x|=|(x+y)-y|\le |x+y|+|y|\rightarrow |x|-|y|\le |x+y| \\ |y|=|(y+x)-x|\le |y+x|+|x|\rightarrow |y|-|x|\le |y+x| \end{array}\right\}\rightarrow \left||x|-|y|\right|\le |x+y|$$

O sea: $\left||x|-|y|\right|\le |x\pm y|$ que, junto con la expresión (*), obtenemos:

$$\left||x|-|y|\right|\le |x\pm y|\le |x|+|y|$$

5.7) $\forall x_i\in K, i=1,...,n, \left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\le \sum_{i=1}^{n}|x_i|$

Demostración (por inducción):

para $n=1\rightarrow |x_1|\le |x_1|$, para $n=2\rightarrow |x_1+x_2|\le |x_1|+|x_2|$ (por 6))

Sea cierta para $n=k-1$:

$$\left|\sum_{i=1}^{k-1}x_i\right|\le \sum_{i=1}^{k-1}|x_i|$$

Y veamos que se verifica también para el siguiente número $n=k$:

- sumando $|x_k|$ a ambos términos de la desigualdad:

$$\left|\sum_{i=1}^{k-1}x_i\right|+|x_k|\le \sum_{i=1}^{k-1}|x_i|+|x_k|$$

- y como, por 6) es:

$$\left|\sum_{i=1}^{k-1}x_i+x_k\right|\le \left|\sum_{i=1}^{k-1}x_i\right|+|x_k|\rightarrow \left|\sum_{i=1}^{k}x_i\right|\le \sum_{i=1}^{k-1}|x_i|+|x_k|$$

de lo cual:

$$\left|\sum_{i=1}^{k}x_i\right|\le \sum_{i=1}^{k-1}|x_i|+|x_k|=\sum_{i=1}^{k}|x_i|$$

6. Sucesiones

Las sucesiones de elementos de K aparecen cuando se hace corresponder subconjuntos infinito-numerables de K con el conjunto de los números naturales. Se define, pues, una sucesión α de elementos del cuerpo K por una aplicación de N en K:

$$\alpha: N\rightarrow K \qquad \forall n\in N, \alpha(n)\in K$$

Representaremos a las sucesiones mediante símbolos como $(a_n),(b_n),(c_n),...,$ y representaremos por S al conjunto de todas ellas:

$$(a_n) = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$$
$$(b_n) = \{b_0, b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$$
$$(c_n) = \{c_0, c_1, c_2, ..., c_n, ...\}$$
$$.... \quad .... \quad .... \quad .... \quad .... \quad .... \quad ....$$

Al conjunto S se puede dotar de estructura algebraica definiendo la suma y producto de sucesiones en la forma

$$\forall (a_n),(b_n) \in S, \quad (a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$
$$\forall (a_n),(b_n) \in S, \quad (a_n).(b_n) = (a_n.b_n)$$

es decir,

$$(a_n) + (b_n) = \{a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n, ...\}$$
$$(a_n).(b_n) = \{a_0.b_0, a_1.b_1, a_2.b_2, ..., a_n.b_n, ...\}$$

puesto que estas operaciones son realmente las operaciones con elementos del cuerpo K, trivialmente la estructura $(S,+,.)$ resulta ser un espacio vectorial sobre K, y también es anillo unitario con divisores de cero, que será conmutativo si el cuerpo K es conmutativo.

Resumidamente, $(S,+,.)$ es un álgebra asociativa y unitaria, pudiéndose distinguir los subconjuntos o familias más peculiares:

- Familia S_A de las sucesiones acotadas, $S_A \subseteq S$
- Familia S_C de las sucesiones convergentes, $S_C \subseteq S_A \subseteq S$
- Familia S_L de las sucesiones con límite, $S_L \subseteq S_C \subseteq S_A \subseteq S$
- Familia S_0 de las sucesiones nulas, $S_0 \subseteq S_L \subseteq S_C \subseteq S_A \subseteq S$

Aunque no de forma exhaustiva, describimos muy brevemente estos conceptos a continuación.

- Las sucesiones acotadas:

Una sucesión $(a_n) \in S$ de elementos de un cuerpo ordenado (K,P) se dice acotada sii

$$\exists k \in K / \forall n \in N, |a_n| < k$$

El elemento $k>0$ se dice que es una cota de la sucesión (a_n). Se prueba que el conjunto S_A de las sucesiones acotadas, dotado de la suma y el producto de sucesiones, $(S_A,+,.)$ es un subálgebra unitaria y con divisores de cero del álgebra $(S,+,.)$

- Las sucesiones convergentes:

Una sucesión $(a_n) \in S$ de elementos de un cuerpo ordenado (K,P) se dice convergente sii

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in K, \exists n \in N / \forall p,q \geq n, |a_p - a_q| < \varepsilon$$

Puede probarse que el conjunto S_C de las sucesiones convergentes, dotado de la suma y el producto de sucesiones, $(S_C,+,.)$, verifica:

1) $S_C \subseteq S_A$
2) $(S_C,+,.)$ es un subálgebra del álgebra $(S,+,.)$

- Las sucesiones con límite:

Una sucesión $(a_n) \in S$ de elementos de un cuerpo ordenado *(K,P)* se dice que tiene límite $l \in K$, abreviadamente $\lim a_n = l$, sii

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in K, \exists n \in N / \forall p \geq n, \left| l - a_p \right| < \varepsilon$$

También puede probarse que el conjunto S_L de las sucesiones con límite, dotado de la suma y el producto de sucesiones, $(S_L,+,.)$, verifica:

1) $S_L \subseteq S_C$
2) $(S_L,+,.)$ es un subálgebra unitaria del álgebra $(S,+,.)$
3) El límite de casa sucesión (a_n) es único.

- Las sucesiones nulas:

Una sucesión nula es una sucesión con límite nulo:

$$(a_n)\, sucesión\ nula \leftrightarrow \lim a_n = 0$$

La familia de las sucesiones nulas, $(S_0,+,.)$ verifica:

1) $S_0 \subseteq S_L$
2) $(S_0,+,.)$ es subálgebra no unitaria de $(S,+,.)$
3) S_0 es un ideal bilátero primo de S_C y S_L.
4) El anillo de integridad unitario S_C / S_0 es un cuerpo ordenado.
5) K es isomorfo a un subcuerpo de S_C / S_0 cuyo orden restringido a este subcuerpo coincide con el orden de K.

7. Arquimedianismo

Sea *(K,P)* un cuerpo ordenado mediante la clase positiva P. Y sea 1 el elemento unidad del cuerpo (elemento neutro para ley multiplicativa).

Diremos que K es arquimediano sii verifica que $\forall x \in K, \exists n \in N / (n.1) > x$

Teorema: Si un cuerpo ordenado K es arquimediano, verifica entonces que la sucesión $a_n = (n.1)^{-1}$ es nula.

Demostración:

$$\forall p > 0 \Rightarrow p^{-1} > 0 \Rightarrow p^{-1} > 0 \wedge K\ arquimediano \Rightarrow \exists n \in N / (n.1) > p^{-1} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall p > 0,\ p > (n.1)^{-1} > 0 \Rightarrow a_n = (n.1)^{-1} \to 0 \Rightarrow \lim a_n = 0 \Rightarrow (a_n)\ nula$$

Teorema 7.1: Sea *(K,P)* un cuerpo ordenado mediante la clase positiva P. Y sea 1 el elemento unidad del cuerpo (elemento neutro para ley multiplicativa). La condición necesaria y suficiente para que K sea un cuerpo arquimediano es que

$$\forall x, y \in K, y > 0, \exists n \in N / n.y > x$$

Demostración:

- Demostremos en primer lugar que si K es arquimediano se verifica la condición anterior.
  Si K es arquimediano $(\exists m \in N / m.1 > x)$, y teniendo en cuenta el teorema anterior, se cumple que $\exists n \in N / y > (n.1)^{-1} > 0$.
  Multiplicamos la primera desigualdad por el término $(n.1).(n.1)^{-1}$:

$$\left.\begin{array}{l}(m.1).(n.1).(n.1)^{-1} > (n.1).(n.1)^{-1}x \\ y > (n.1)^{-1}\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow (m.1).(n.1)y > (n.1).(n.1)^{-1}x \rightarrow (m.1).(n.1)y > x \rightarrow mny > x$$

- Demostremos ahora que si se cumple la condición, entonces, K es arquimediano.
  Si se cumple la condición $\forall x, y \in K, y > 0, \exists n \in N / n.y > x$, bastará tomar y=1 para que $\forall x \in K, \exists n \in N / n.1 > x \rightarrow K \text{ arquimediano}$

Teorema 7.2: Entre dos elementos cualesquiera de un cuerpo ordenado arquimediano hay siempre un número racional:

$$\forall a, b \in K / a > b \rightarrow \exists n, m \in Z / a > (m1).(n1)^{-1} > b$$

Demostración:
$a > b \rightarrow a - b > 0 \rightarrow \exists n \in N / n.(a-b) > 1 \rightarrow \exists n \in N / a - b > (n1)^{-1}$ (*)
llamemos H al conjunto $H = \{h \in Z / (h1) \leq nb\}$ y sea α el máximo de H. Se tiene:
$(\alpha.1) \leq nb \leq (\alpha + 1).1$. Si llamamos $m = \alpha + 1$, será $(m-1).1 \leq nb \leq (m.1)$, o bien:
$[(m-1).1].(n.1)^{-1} \leq b \leq (m.1).(n.1)^{-1}$ (**)
Sumando $(n.1)^{-1}$ a cada uno de los dos miembros de (**):
$[(m-1).1].(n.1)^{-1} + (n.1)^{-1} \leq b + (n.1)^{-1} \leq (m.1).(n.1)^{-1} + (n.1)^{-1}$
y teniendo en cuenta (*):
$[(m-1).1].(n.1)^{-1} + (n.1)^{-1} \leq b + (n.1)^{-1} \leq b + (a-b) = a$
o sea:
$(m.1)(n.1)^{-1} - (n.1)^{-1} + (n.1)^{-1} \leq b + (n.1)^{-1} \leq a \rightarrow (m.1)(n.1)^{-1} \leq a$
y teniendo en cuenta (**): $b \leq (m.1).(n.1)^{-1} \leq a$

Por este teorema sabemos que entre dos elementos cualesquiera, x_1, x_2, del cuerpo arquimediano K hay algún número racional, r_1, es decir, $x_1 < x_2, \exists r_1 \in Q / x_1 < r_1 < x_2$. Así, si $x_1(j) < x_2(j), j = 1,...,n,...$ esto nos permite construir una sucesión de números racionales $(r_n) = \{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$, con $r_j \in (x_1(j), x_2(j))$.

Teorema 7.3: El cuerpo Q de los racionales $\left(Q = \{(m.1).(n.1)^{-1} / m, n \in z, n \notin 0\}\right)$ es cuerpo arquimediano.
Demostración:
Se trata de probar que $\forall (m.1).(n.1)^{-1} \in Q, \exists h \in N / (h.1) > (m.1).(n.1)^{-1}$

- Si m y n son de distinto signo:
  $(m.1).(n.1)^{-1} < 0 < 1 \rightarrow \exists 1 \in N / 1.1 > (m.1).(n.1)^{-1}$
- Si m y n son de igual signo:
  $(m.1).(n.1)^{-1} > 0 \rightarrow (m.1) > (m.1).(n.1)^{-1} \rightarrow \exists m \in N / (m.1) > (m.1).(n.1)^{-1}$

Teorema 7.4: Todo elemento de un cuerpo ordenado arquimediano es el límite de una sucesión de números racionales.

$$\forall x \in K, \exists (x_n) \in S / \lim x_n = x$$

Demostración:

Por el teorema 7.2 sabemos que entre dos elementos cualesquiera de un cuerpo K arquimediano existe al menos un número racional. Así, dado el elemento x del cuerpo K, podemos considerar los intervalos $\left(x-(n.1)^{-1}, x+(n.1)^{-1}\right)$, en donde hay un número racional para cada valor de n, lo que nos indica que existe una sucesión racional (x_n), que al tender al límite, para $n \to \infty$, converge en x, puesto que la sucesión $(n.1)^{-1}$ es nula.

Teorema 7.5: Todo cuerpo arquimediano es conmutativo.

$$\forall x, y \in K,\ x.y = y.x$$

Demostración:

Sean $(x_n),(y_n)$ las sucesiones de números racionales tales que $\lim x_n = x$ y $\lim x_n = x$. Como es $x_n.y_n = y_n.x_n$, se tiene, tomando límites, que

$$x.y = \lim x_n.\lim y_n = \lim y_n \lim x_n = y.x$$

8. Arquimedianismo sobre un subcuerpo

Sea el cuerpo ordenado *(K,P)* y el subcuerpo F de K con el orden inducido por K.

- Se dice que $\beta \in K$ es *infinitamente grande* sobre *F* sii $\forall x \in F,\ x < |\beta|$.
- Se dice que $\beta \in K$ es *infinitamente pequeño* sobre *F* sii $\forall x \in F,\ x > |\beta| > 0$

K se dice que es *arquimediano sobre* F si K no posee elementos infinitamente grandes sobre F.

Teorema 8.1. Sea K un cuerpo ordenado por la clase positiva P y sea F un subcuerpo de K. Se verifica que la condición necesaria y suficiente para que $x \in K$ sea infinitamente grande sobre F es que $x^{-1} \in K$ sea infinitamente pequeño sobre F.

Demostración:

- Veamos que es condición necesaria:

  $x \in K$ infinitamente grande sobre F$\to \forall a \in F, a \neq 0 \to |x| > |a| > |a^{-1}|$.

  Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por $|x^{-1}|$ y por $|a|$:

  $|x^{-1}|.|x| > |x^{-1}|.|a^{-1}| \to 1 > |x^{-1}|.|a^{-1}| \to 1.|a| > |x^{-1}|.|a^{-1}|.|a| \to |a| > |x^{-1}| \to x^{-1} \in K$ es infinitamente pequeño sobre F
- Veamos que es condición suficiente:

  $x^{-1} \in K$ infinitamente pequeño sobre F$\to |a| > |x^{-1}|, \forall a \in F, a \neq 0$.

  Multiplicamos ambos miembros de la desigualdad por $|x|$ y por $|a^{-1}|$:

  $|a^{-1}|.|a| > |a^{-1}|.|x^{-1}| \to 1 > |a^{-1}|.|x^{-1}| \to |x| > |a^{-1}|.|x^{-1}||x| \to |x| > |a^{-1}| \to x \in K$ es infinitamente grande sobre F.

Teorema 8.2. Sea el cuerpo ordenado *(K,P),* y sea F subcuerpo de K, y G subcuerpo de F. Si K es arquimediano sobre F y F es arquimediano sobre G, entonces también K es arquimediano sobre G.

Demostración (Red. al absurdo):

Si K no fuera arquimediano sobre G, querría esto decir que posee elementos infinitamente grandes sobre G, es decir, podríamos afirmar que

$\exists x \in K$ infinitamente grande sobre G$\to \forall a \in G, a \neq 0, |x| > a$

y puesto que K es arquimediano sobre F, se tiene que $\forall x \in k, |x| \le |x_1|, x_1 \in F$, pero esto querría decir que para algún $x_1 \in F, |x_1| \ge |x| > |a| \rightarrow$ F no sería arquimediano sobre G
Luego, en definitiva, el cuerpo K ha de ser arquimediano sobre el subcuerpo G.

Teorema 8.3. Entre los subcuerpos del cuerpo ordenado K que son supercuerpos del subcuerpo F, hay al menos uno que es arquimediano maximal sobre F.
Demostración:
Basta aplicar el Lema de Zorn al conjunto U-inductivo de los cuerpos intermedios entre el cuerpo F y el cuerpo K, que son arquimedianos sobre F.

9. Los cuerpos completos

Un cuerpo ordenado *(K,P)* se dice que es completo sii todo subconjunto $A \subseteq K$, superiormente acotado, tiene supremo.

Teorema 9.1. Todo cuerpo completo es arquimediano, y por tanto, conmutativo.
Demostración (Red. al absurdo):
Sea K completo y supongamos que no es arquimediano. Se tiene:
$\forall x, \in K, y > 0, \forall n \in N, ny \le x \rightarrow H = \{ny / n \in N\} \subseteq K$ acotado superiormente $\wedge$ $K\ completo \rightarrow \exists a \in K / a = \sup r(H) \rightarrow (n+1)y \le a, \forall n \in N \rightarrow$
$\rightarrow ny \le a - y, \forall n \in N \rightarrow a \ne \sup r(H) \rightarrow contradicc$
Por tanto, $\exists n \in N / ny > x \rightarrow K\ arquimediano$

Un cuerpo ordenado y completo es, pues, arquimediano y por lo tanto conmutativo.

Un cuerpo conmutativo, ordenado y completo es lo que definimos como cuerpo de los números reales.

10. Bibliografía

ARTIN, E., "Algebre Geométrique", Editorial Gauthiers-Villards, París, 1962
BOURBAKI, "Algebre", Hermann, Paris, 1972
JACOBSON, N., "Lectures en Abstract Álgebra", Ed. Van Nostrand, Princeton, 1951
VAN DER WAERDEN, "Modern Álgebra", F. Ungar, Nueva Cork, 1953