

Continuidad, derivabilidad e integración de sucesiones y series uniformemente convergentes

Introducción. La convergencia uniforme:

Una sucesión $\{f_n\}$ de funciones se dice que *converge uniformemente hacia la función f en un conjunto T* si se verifica que

$$\forall x \in T, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) / |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$$

Se puede expresar simbólicamente mediante la expresión

$$f_n \rightarrow f \text{ uniformemente en } T$$

Siendo $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ equivalente a $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$ para todo $n > N(\varepsilon)$, y para todo $x \in T$

Una sucesión $\{f_n\}$ se dice uniformemente acotada en T si existe una constante M tal que

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in T, \quad n = 1, 2, \dots$$

El número M se denomina *cota uniforme* para la sucesión $\{f_n\}$.

Consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas en un conjunto T , y consideremos

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \forall x \in T$$

La serie $\sum_1^\infty f_n(x)$ converge uniformemente en T si existe una función f tal que $s_n \rightarrow f$ uniformemente en T y podemos escribir

$$\sum_{n=1}^\infty f_n(x) = f(x) \text{ (uniformemente en } T)$$

Se verifica la llamada *Condición de Cauchy para la convergencia uniforme de sucesiones*:

Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas en el conjunto T , se verifica que existe una función f tal que

$$f_n \rightarrow f \text{ uniformemente en } T$$

si y solamente si se verifica la condición de que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) / \forall m, n > N(\varepsilon), |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in T$$

Asimismo, también se cumple la Condición de Cauchy para la convergencia uniforme de series:

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en T si, y únicamente si, se verifica la condición de que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) / \forall n > N(\varepsilon), \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon, \quad p = 1, 2, \dots, \quad \forall x \in T$$

También resulta de gran utilidad el Criterio M de Weierstrass:

Consideremos la sucesión $\{M_n\}$, donde los M_n son números no negativos tales que se verifica que

$$0 \leq |f_n(x)| \leq M_n, \text{ para } n = 1, 2, \dots, \quad \forall x \in T$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en T si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge.

Para ver la demostración de la condición de Cauchy para convergencia uniforme de sucesiones y series, así como del Criterio M de Weierstrass, véase el artículo anterior, del mes de noviembre 2018, en esta misma web, titulado "Acerca de la definición de convergencia uniforme" (<http://casanchi.com/mat/deficu01.htm>).

La convergencia uniforme y la continuidad:

Teorema 01: Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas f_n , $n = 1, \dots$, que converge uniformemente a f en el punto $x_0 \in T$, entonces f es continua en $x_0 \in T$.

Si x_0 es punto de acumulación de T , entonces se verifica además que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)$$

Demostración:

El punto $x_0 \in T$ puede ser un punto discreto o bien puede ser un punto de acumulación en T .

Si se trata de un punto discreto y la sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas en x_0 converge uniformemente a f , es obvio que la función f es automáticamente continua en x_0 .

Si x_0 es un punto de acumulación, entonces para la sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas que converge uniformemente a f se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in T$$

Al ser cada f_n continua en $x_0 \in T$ existirá un entorno $E(x_0)$ tal que

$\forall x \in E(x_0) \cap T$ es $|f_n(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, y como es

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

se tiene, en definitiva, que $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E(x_0) \cap T, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, es decir, f es continua en x_0 .

La convergencia uniforme es, en definitiva, condición suficiente para que sea continua la función a la que converge una sucesión de funciones continuas, aunque es obvio que no es una condición necesaria, ya que una sucesión de funciones continuas puede converger, aunque sea solo puntualmente, a una función continua, sin necesidad de que la convergencia sea uniforme.

Teorema 02: Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es una serie de funciones continuas f_n , $n=1, \dots$, que converge uniformemente a f en el punto $x_0 \in T$, entonces f es continua en $x_0 \in T$.

Si x_0 es punto de acumulación de T , entonces se verifica además que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)$$

Demostración:

Construyamos la sucesión $\{s_n\}$, donde $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, $\forall x \in T$. Si cada función

$f_k(x)$ es continua en $x_0 \in T$, entonces la función $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ es también

continua en x_0 , por ser suma finita de funciones continuas en tal punto. Se trata entonces $\{s_n\}$ de una sucesión de funciones continuas en $x_0 \in T$ que converge uniformemente a la función $f(x)$. Aplicando el teorema anterior, $f(x)$ es continua en $x_0 \in T$.

La convergencia uniforme y la derivabilidad:

Aunque podríamos pensar que, por analogía con los teoremas 01 y 02, si una sucesión $\{f_n\}$ de funciones derivables converge uniformemente a una función f

entonces la sucesión $\{f'_n\}$ de sus funciones derivadas habría de converger a la función derivada f' , realmente esta afirmación no se verifica, pudiendo converger la sucesión $\{f_n\}$ a la función f uniformemente en $\mathbb{R}$, sin que la sucesión $\{f'_n\}$ de sus derivadas converja, ni siquiera puntualmente, a la derivada f' .

Por tanto el teorema sobre derivabilidad análogo a los teoremas 01 y 02 ha de tomar una forma diferente.

Teorema 03: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones derivables tal que las funciones f_n , $n=1, \dots$ tienen derivada finita f'_n , $n=1, \dots$ en cada punto del intervalo abierto (a, b) . Si al menos en un punto $x_0 \in (a, b)$ la sucesión $\{f_n(x_0)\}$ converge y existe una función g tal que la sucesión $\{f'_n\}$ de las derivadas converge uniformemente a g , entonces :

- a) Existe una función f tal que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en (a, b) .
- b) $\forall x \in (a, b)$, existe la derivada $f'(x)$ y coincide con $g(x)$.

Demostración:

Sea $c \in (a, b)$ un punto arbitrario del intervalo, y definamos para $n=1, 2, \dots$ la función

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}, & \text{si } x \neq c \\ f'_n(c), & \text{si } x = c \end{cases}$$

como es $g_n(c) = f'_n(c)$ y $f'_n \rightarrow g$ uniform en (a, b) , se tiene que la sucesión $\{g_n(c)\}$ converge al menos puntualmente en (a, b) .

- Veamos que $\{g_n\}$ converge uniformemente en (a, b) :

$$\begin{aligned} \text{Si } x \neq c: g_n(x) &= \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}, \quad g_m(x) = \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} \rightarrow g_n(x) - g_m(x) = \\ &= \frac{[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(c) - f_m(c)]}{x - c} = \frac{h(x) - h(c)}{x - c}, \text{ donde } h(x) = f_n(x) - f_m(x) \end{aligned}$$

Si aplicamos el teorema de valor medio a $h(x)$:

$$\exists x_1 \in (x, c) \subset (a, b) / h'(x_1) = \frac{h(x) - h(c)}{x - c} \rightarrow f'_n(x_1) - f'_m(x_1) = g_n(x) - g_m(x)$$

y como $\{f'_n\}$ converge uniformemente en (a, b) se tiene, por la condición de Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n, m \geq n_0, |f'_n(x) - f'_m(x)| = |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon \rightarrow \{g_n(x)\} \text{ conv. uniformemente en } (a, b).$$

- Veamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en (a, b) :

Si es $x_0 \in (a, b)$ el punto donde por hipótesis converge la sucesión $\{f_n(x_0)\}$, construyamos de nuevo las funciones $g_n(x)$ ahora para $c = x_0$:

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, & \text{si } x \neq x_0 \\ f'_n(x_0), & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Se tendrá entonces que para $x \neq x_0$ es:

$x \neq x_0$:

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f_n(x) - f_n(x_0) = (x - x_0) \cdot g_n(x) \rightarrow f'_n(x) = f'_n(x_0) + (x - x_0) \cdot g'_n(x)$$

$$g_m(x) = \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f_m(x) - f_m(x_0) = (x - x_0) \cdot g_m(x) \rightarrow f'_m(x) = f'_m(x_0) + (x - x_0) \cdot g'_m(x)$$

Por tanto, se cumple que

$$f'_n(x) - f'_m(x) = f'_n(x_0) - f'_m(x_0) + (x - x_0)[g'_n(x) - g'_m(x)]$$

y como $\{f'_n(x_0)\}$ converge en $x = x_0$ y $\{g'_n\}$ converge uniformemente en (a, b) , aplicando la condición de Cauchy se tendrá:

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| \leq |f'_n(x_0) - f'_m(x_0)| + |(x - x_0)[g'_n(x) - g'_m(x)]| < \frac{\varepsilon}{2} + |x - x_0| \frac{\varepsilon}{2|x - x_0|} = \varepsilon$$

por lo que $\{f'_n\}$ converge uniformemente en (a, b) .

- Veamos finalmente que si $\{f'_n\}$ converge uniformemente a f' en (a, b) entonces ha de ser $f' = g$, donde g es la función a la que converge uniformemente la sucesión $\{g'_n\}$:

Sea $G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$, puesto que existe la derivada f'_n , será: $\lim_{x \rightarrow c} g'_n(x) = g'_n(c)$.

Es decir, cada función de la sucesión es continua en $x = c$, y puesto que $\{g'_n\}$ converge uniformemente en (a, b) también será G continua en $x = c$. Esto nos indica que $G(c) = \lim_{x \rightarrow c} g'_n(x)$.

Y para $x \neq c$ será:

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'_n(x) - f'_n(c)}{x - c} = \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}$$

La continuidad de G en $x = c$ establece la existencia de la derivada $f'(c)$ y su coincidencia con $G(c)$.

Pero $G(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} g'_n(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(c) = g(c)$, y, en definitiva, es $f'(c) = g(c)$, y como c es un punto cualquiera de (a, b) , esto completa la prueba del teorema.

Teorema 04: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones derivables tal que las funciones f_n , $n = 1, \dots$ tienen derivada finita f'_n , $n = 1, \dots$ en cada punto del intervalo abierto

(a, b) . Si al menos en el punto $x_0 \in (a, b)$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge y existe una

función g tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = g(x)$ uniformemente en (a, b) , entonces :

a) Existe una función f tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ uniformemente en (a, b) .

b) $\forall x \in (a, b)$, existe la derivada $f'(x)$ y coincide con $g(x)$.

Demostración:

La prueba de este teorema consiste en construir, como ya hicimos en la prueba del teorema 02, las sumas parciales

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), \forall x \in T$$

y aplicar a la sucesión $\{s_n\}$ el teorema 03.

Convergencia uniforme e integración de Riemann-Stieltjes

Teorema 05: Sea h una función de variación acotada en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Sea también la sucesión $\{f_n\}$ de funciones integrables respecto de h en el intervalo $[a, b]$ ($f_n \in R(h)$, $n = 1, 2, \dots$ en $[a, b]$).

Si tal sucesión converge uniformemente a la función f en $[a, b]$ ($f_n \rightarrow f$ unif en $[a, b]$) y llamamos $g_n(x) = \int_a^x f_n(t).dh(t)$, se verifica que:

a) $f \in R(h)$ en $[a, b]$.

b) La sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a la función g en $[a, b]$ ($g_n \rightarrow g$ unif en $[a, b]$), siendo $g(x) = \int_a^x f(t).dh(t)$.

Demostración:

a) Veamos que para la función f se ha de verificar la condición de Riemann:

$\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon$ de $[a, b]$ / $\forall P$ de $[a, b]$ más fina que P_ϵ : $S(P, f, h) - s(P, f, h) < \epsilon$

- Como $\{f_n\}$ converge a f , elegimos un ϵ de forma que para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ es

$$|f(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\epsilon}{3[h(b) - h(a)]}$$

de donde, para toda partición P del intervalo es

$$|S(P, f - f_{n_0}, h)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad |s(P, f - f_{n_0}, h)| < \frac{\epsilon}{3}$$

- Como cada f_n es integrable, para este $n_0 \in \mathbb{N}$ elegimos una partición P_ϵ de manera que para otra partición P más fina que P_ϵ es $S(P, f_{n_0}, h) - s(P, f_{n_0}, h) < \epsilon$

Se tendrá, entonces, que

$$\begin{aligned}
S(P, f_{n_0}, h) - s(P, f_{n_0}, h) &\leq S(P, f - f_{n_0}, h) - s(P, f - f_{n_0}, h) + S(P, f_{n_0}, h) - s(P, f_{n_0}, h) \leq \\
&\leq |S(P, f - f_{n_0}, h)| + |s(P, f - f_{n_0}, h)| + |S(P, f_{n_0}, h) - s(P, f_{n_0}, h)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

b) Veamos ahora la convergencia de la sucesión $\{g_n\}$:

Si fijamos un $\varepsilon > 0$ y elegimos un $n_0 \in \mathcal{N}$ tal que $\forall n > n_0, \forall t \in [a, b]$ sea

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2[h(b) - h(a)]}$$

se tendrá, entonces, que

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dh(t) \leq \frac{h(x) - h(a)}{h(b) - h(a)} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Lo que prueba la convergencia $g_n \rightarrow g$ unif en $[a, b]$.

De esta conclusión se deduce obviamente que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) dh(t) = \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dh(t)$$

Teorema 06: Sea h una función de variación acotada en el intervalo cerrado $[a, b]$

y sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, que converge uniformemente a $f(x)$, $\forall x \in [a, b]$

($\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ unif en $[a, b]$). Si las funciones f_n son integrables Riemann-

Stieltjes respecto a h en $[a, b]$ ($f_n \in R(h)$, $n = 1, 2, \dots$ en $[a, b]$), entonces se verifica que:

a) f es integrable Riemann-Stieltjes respecto a h en $[a, b]$ ($f \in R(h)$ en $[a, b]$).

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t) dh(t)$ converge uniformemente a $\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) dh(t)$, $\forall x \in [a, b]$

($\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t) dh(t) = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) dh(t)$ unif en $[a, b]$).

Demostración:

Bastará construir la sucesión $\{s_n\}$ donde cada elemento de la misma es la suma parcial hasta el orden n -simo:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

y aplicar a tal sucesión el teorema anterior.

Observemos que en b) se establece que si la serie es uniformemente convergente puede ser integrada término a término. Esto es, que es condición suficiente para tal integración. En general es obvio que no es condición necesaria, es decir, que una serie puede ser integrada término a término sin que necesariamente tenga que ser uniformemente convergente.