Sobre la consistencia de la lógica de proposiciones

00. Introducción. El programa finitista de Hilbert

Las paradojas y antinomias aparecidas a finales del siglo XIX mostraron la necesidad de fundamentar la matemática sobre bases más sólidas que las entonces existentes y que pudieran evitar estas situaciones.

David Hilbert (1862-1943), catedrático de Matemática en la Universidad de Göttingen, propondría en 1920 un programa de fundamentación de la matemática en el que mediante un sistema de axiomas finito y completo pudiera fundamentarse cualquier cálculo. Sus objetivos más generales podrían resumirse en:

- Formalismo. Construir toda la matemática mediante un lenguaje formalizado cuya manipulación se haría mediante reglas claramente definidas.
- Completitud. Todas las afirmaciones ciertas habrían de ser probadas dentro del formalismo.
- Conservación. Ningún resultado sobre objetos reales obtenido mediante razonamientos sobre objetos ideales podría ser obtenido sin usar en la derivación objetos ideales.
- Decibilidad. Ha de existir siempre algún algoritmo que permita la obtención de cualquier resultado cierto en la Matemática.

Sin embargo, los Teoremas de Gödel de 1931 (Kurt Gödel, 1906-1978), sobre la completitud y la consistencia de los axiomas, desbarataría la mayor parte del programa finitista de Hilbert, haciéndole inalcanzable para cualquier sistema formal que contenga a la aritmética ordinaria. Probaría la incompletitud de estos sistemas.

David Hilbert en 1926

Kurt Gödel en 1925

Pero, no obstante, en algunas partes menos complejas de la matemática como la lógica básica de proposiciones y en general la lógica cuantificacional de primer orden, se puede establecer de forma inmediata su consistencia y completitud. En estas breves notas mostramos algunos de los argumentos básicos para justificar la consistencia y completitud de la lógica elemental de proposiciones.

01. Formalización del sistema

a) Signos del cálculo:

a.1) Variables:

- proposicionales (p, q, r, ...), que representan enunciados verbales
- predicativas (P, Q, R, ...), que representan predicados concretos.

a.2) Signos constantes, o conectores ($\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \ldots$), que sirven para conectar las variables proposicionales.

b) Reglas de Formación:

b.1) Las fórmulas son las combinaciones de signos elementales.

b.2) Cada variable proposicional es también una fórmula.

b.3) El enlace mediante conectores proposicionales de cualesquiera fórmulas es también una fórmula.

c) Reglas de Transformación:

c.1) La Regla de Sustitución:

- De una fórmula que contenga variables proposicionales puede siempre derivarse otra fórmula sustituyendo uniformemente las variables con nuevas fórmulas.

c.2) La Regla de Separación:

- Dos fórmulas que tengan la forma F_1 y $F_1 \rightarrow F_2$ derivan siempre la fórmula F_2 (si se verifica F_1, y F_1 implica F_2, entonces se verifica F_2):

$$\left.\begin{array}{l} F_1 \\ F_1 \rightarrow F_2 \end{array}\right\} \rightarrow F_2$$

d) Los Axiomas:

Consideremos los cuatro axiomas que fueron expuestos por Russell y Whitehead en los "Principia Mathematica":

$$p \vee p \rightarrow p$$

$$p \rightarrow p \vee q$$

$$p \vee q \rightarrow q \vee p$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow \left[(r \vee p) \rightarrow (r \vee q) \right]$$

Como se observa, solo figuran los conectores "disyunción" y "implica".

Estas son las cuatro proposiciones que sirvieron de base en los Principia, es decir, las proposiciones inicialmente declaradas con valor de certeza para todo valor de certeza o falsedad de las variables que en ellas intervienen. Al declarar su valor de certeza, al considerarlas tautologías, en realidad se declaran las tablas siguientes:

p	$p \vee p$	$p \vee p \to p$
c	c	c
f	f	c

p	q	$p \vee q$	$p \to p \vee q$
c	c	c	c
c	f	c	c
f	c	c	c
f	f	f	c

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$p \vee q \to q \vee p$
c	c	c	c	c
c	f	c	c	c
f	c	c	c	c
f	f	f	f	c

p	q	r	$p \to q$	$r \vee p$	$r \vee q$	$r \vee p \to r \vee q$	$(p \to q) \to [(r \vee p) \to (r \vee q)]$
c	c	c	c	c	c	c	c
c	c	f	c	c	c	c	c
c	f	c	f	c	c	c	c
c	f	f	f	c	f	f	c
f	c	c	c	c	c	c	c
f	c	f	c	f	c	c	c
f	f	c	c	c	c	c	c
f	f	f	c	f	f	c	c

En estas tablas se observa que una fórmula falsa o insatisfacible implica tanto una proposición cierta como una proposición falsa, esto es, es inconsistente. Por tanto, si el antecedente es falso el consecuente puede ser una fórmula falsa o una fórmula cierta. La tabla correspondiente a la implicación sería:

p	q	$p \to q$
c	c	c
c	f	f
f	c	c
f	f	c

Asimismo, la disyunción solamente será falsa si ambas fórmulas lo son:

p	q	$p \vee q$
c	c	c
c	f	c
f	c	c
f	f	f

Y la negación de una fórmula será falsa cuando la fórmula sea cierta:

p	$\neg p$
c	f
f	c

02. La consistencia

a) Una propiedad general

Teorema:

Si el cálculo proposicional fuera inconsistente, es decir, si desde los axiomas pudiera derivarse una fórmula, F, y también su negación, -F, entonces toda fórmula q del cálculo sería también un teorema, esto es, seria también derivable desde los axiomas.

Demostración:

Consideremos el segundo de los axiomas de Russell-Whitehead:

Para dos fórmulas cualesquiera, p y q, se verifica siempre que

$$p \to p \vee q$$

(si se verifica p, entonces se verifica p o bien q, esto es. si no fuera p la proposición que se verificara, entonces habría de ser q necesariamente)

En definitiva, de forma inmediata se deriva que

$$\left[p \to p \vee q\right] \to \left[p \to \left(\neg p \to q\right)\right]$$

es decir, se obtiene por derivación la fórmula $p \to \left(\neg p \to q\right)$, que es, por consiguiente, un teorema del cálculo, ya que se deriva desde los axiomas. La tabla que le corresponde es

p	q	$\neg p$	$\neg p \to q$	$p \to (\neg p \to q)$
c	c	f	c	c
c	f	f	c	c
f	c	c	c	c
f	f	c	f	c

Supongamos que el cálculo es inconsistente, es decir, que se pueda derivar desde los axiomas una fórmula F y también su negación $\neg F$. O sea, que tanto F como $\neg F$ son demostrables dentro del cálculo de proposiciones. Entonces, usando la regla de sustitución, sustituimos F en el teorema anterior:

$$F \rightarrow (\neg F \rightarrow q)$$

y aplicamos a continuación la regla de separación:

$$\left.\begin{array}{l} \neg F \\ \neg F \rightarrow q \end{array}\right\} \rightarrow q$$

es decir, se obtiene la fórmula q como un teorema del cálculo, siendo por hipótesis q una fórmula cualquiera. En definitiva, si el cálculo proposicional es inconsistente, o sea, si puede probarse una fórmula F y también su negación $\neg F$, entonces puede probarse cualquier fórmula q. Toda fórmula es teorema.

Esto quiere decir que si encontráramos una fórmula q que no fuera un teorema, el cálculo proposicional no sería inconsistente. Sería consistente. Quedaría probada su consistencia. Quedaría probado en definitiva que nunca podría derivarse una contradicción como teorema.

b) Encontrar una fórmula q que no sea un teorema

Tratemos de encontrar una propiedad de los axiomas del sistema que sea hereditaria a todos los teoremas. Bastará ver si una fórmula dada tiene esa propiedad para saber si es teorema o no lo es.

Lo que, en resumen, se precisaría, es encontrar una sola fórmula sin esa propiedad hereditaria. Hecho esto, la consistencia del sistema quedará probada.

Elijamos la propiedad de ser tautología. Definimos tautología, o proposición tautológica, como aquella que no excluye ninguna posibilidad lógica, que sea necesariamente cierta, independientemente de si lo son o no las variables proposicionales que figuran en su fórmula representativa.

Es inmediato que los cuatro axiomas de Russell-Whitehead son tautologías. Es decir, poseen tal propiedad. Y es inmediato, asimismo, que la propiedad es hereditaria, o sea, que si los axiomas son tautologías, también lo será cualquier fórmula derivada de ellos utilizando las reglas de separación y sustitución.

Ya solo falta encontrar una fórmula que no sea tautología. Bastaría, por ejemplo, la fórmula $p \vee q$. Esta fórmula no es tautología. No es cierta siempre, independientemente de los valores de las variables que intervienen en su expresión, p y q.

Luego, $p \vee q$ no es un teorema. Por consiguiente, la lógica de proposiciones es consistente.

03. La completitud:

Para que la lógica de proposiciones sea completa es necesario que todo teorema, esto es, toda fórmula cierta, sea derivable. Si hubieran fórmulas ciertas que no se pudieran derivar desde los axiomas del sistema, el cálculo sería incompleto.

Veamos que si una fórmula p es lógicamente cierta, entonces la verificación de la fórmula p se deriva del sistema

Efectivamente:

Supongamos una formula p que sea lógicamente cierta, es decir, que sea una tautología. Si p es tautología, su negación $\neg p$ es falsa, o sea, es una proposición insatisfacible y por tanto inconsistente.

Al ser inconsistente, se tiene que $\neg p$ implica tanto una formula cualquiera q como su negación $\neg q$, por lo que se tiene que $(\neg p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$, lo que es equivalente a $(\neg p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$, de lo que se deduce, por reducción al absurdo, que no se verifica $\neg p$, es decir, que se verifica $\neg(\neg p)$, lo que implica que se verifica p.

Por tanto, si la fórmula p es lógicamente cierta, su verificación se deriva de los axiomas del sistema.

Bibliografía:

Ackermann, W.; Zur Axiomatik der Mengelehre, Mathematische Annalen 131, 1956
Bernays, P.-Fraenkel, A.; Axiomatic Set Theory, North-Holland, Amsterdam, 1958
Gödel, K.; Uber formal Unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter System I, Monatshefte fur Mathematik und Physik, 1931.
Ladriere, J.; Limitaciones internas de los formalismos, Ed. Tecnos, 1969
Nidditch, P.H.; El desarrollo de la lógica matemática, Ed. Catedra, Madrid, 1987
S. Chinea, C.; Sobre fundamentación.
Wikipedia español, Programa de Hilbert, Teoremas de incompletitud de Gödel.