LOS NUMEROS COMPLEJOS EN EL ENTORNO MAPLE 8

Carlos Núñez Rincón[1]

$$\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$$

"El Espíritu Divino encontró una salida sublime en esa maravilla del análisis, ese portento de mundo ideal, ese anfibio entre el ser y el no ser, que llamamos la raíz imaginaria de la unidad negativa".

Gottfried Wilhelm Leibniz

El presente artículo de corte divulgativo tiene como objetivo mostrar las bondades del Sistema de Cálculo Matemático MAPLE 8, en el cálculo de las operaciones usuales en el conjunto de los números complejos.

1. Operaciones fundamentales con números complejos

Inicialmente recordemos las fórmulas para sumar, multiplicar, restar y dividir números complejos:

Adición: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Sustracción: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Multiplicación: $(a + bi)\,(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

División: $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

[1] *El autor del Artículo, es Doctor en Ciencias de la Educación, Magíster en Educación y Licenciado en Educación Mención Matemática Universidad de los Andes-ULA, Mérida-Venezuela. Actualmente, es Profesor Titular adscrito al Departamento de Matemática y Física de la Universidad Nacional Experimental del Táchira, Táchira-República Bolivariana de Venezuela.*

e-mail: cnunezr@cantv.net cnunez@unet.edu.ve

Ahora, realicemos estas operaciones con los comandos de MAPLE 8.

Ejemplo 1.1

Dados los números complejos:

$$Z_1 = 3 + 2i, \quad Z_2 = -1 + 4i \quad \text{y} \quad Z_4 = -\, i$$

Calcular:

$$Z_1 + Z_2 - Z_3, \quad Z_1(Z_2 + Z_3), \quad Z_1Z_2Z_3, \quad Z_2/Z_3.$$

Solución

```
> 3 + 2*I + (-1 + 4*I) - (-I);
```

$$2 + 7I$$

```
> (3 + 2*I) * ((-1 + 4*I) + (-I));
```

$$-9 + 7I$$

```
> (3 + 2*I) * (-1 + 4*I) * (-I);
```

$$10 + 11I$$

```
> (-1 + 4*I)/(-I);
```

$$-4 - I$$

Ejemplo 1.2

Dados los números complejos:

$$Z_1 = 2 - 3i, \quad Z_2 = 2 + 3_i \quad \text{y} \quad Z_3 = i^{209}$$

Calcular:

$$Z_2 + Z_3, \quad Z_1Z_2Z_3 \quad \text{y} \quad Z_1/Z_3$$

Solución

> 2 + 3*I+I^209;

$$2 + 4I$$

> (2 - 3*I)*(2 + 3*I)*I^209;

$$13I$$

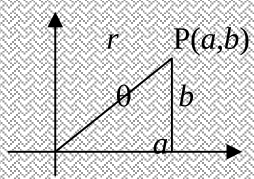
> (2 - 3*I)/I^209;

$$-3 - 2I$$

2. Representación polar de los números complejos

El valor absoluto o módulo de un número complejo
z = $a + bi$, se define como

$$r = mod\ z = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$a = r\cos\theta,\ \ b = r sen\theta$$

Forma Polar: $z = r(\cos\theta + i sen\theta) = r cis\theta$

El argumento o amplitud, es el ángulo θ y se denota arg z.

Ejemplo 2.1

En los números complejos dados, determinar su módulo, argumento y dar su forma polar.

a) $Z_1 = -3$, b) $Z_2 = 3i$, c) $Z_3 = 2 - 2i$ y d) $Z_4 = 2\sqrt{3} + 3i$.

Solución

a) > abs(-3);

$$3$$

> argument(-3);

$$\pi$$

> convert(-3,polar);

$$\text{polar}(3,\pi)$$

b) > abs(3*I);

$$3$$

> argument(3*I);

$$\frac{1}{2}\pi$$

> convert(3*I,polar);

$$\boldsymbol{polar}\left(3,\frac{1}{2}\pi\right)$$

c) > abs(2-2*I);

$$2\sqrt{2}$$

> argument(2-2*I);

$$-\frac{1}{4}\pi$$

> convert(2-2*I,polar);

$$\boldsymbol{polar}\left(2\sqrt{2},-\frac{1}{4}\pi\right)$$

d) > abs(2*sqrt(2)+3*I);

$$\sqrt{17}$$

> argument(2*sqrt(2)+3*I);

$$\mathbf{arctan}\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)$$

Para aproximar el resultado utilizamos el comando evalf.

```
> evalf(argument(2*sqrt(2)+3*I));
```

$$.8148269165$$

```
> convert(2*sqrt(2)+3*I,polar);
```

$$\mathbf{polar}\left(\sqrt{17}\mathbf{,arctan}\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)\right)$$

Ejemplo 2.2

Expresar en forma binómica o cartesiana el complejo $3\left(cos\,\frac{3}{2}\pi + isen\,\frac{3}{2}\pi\right)$

Solución

```
> convert(3*cos(3*Pi/2)+3*I*sin(3*Pi/2),trig);
```

$$-3I$$

3. Potencias y raíces de los números complejos

Sabemos que la *n-ésima* potencia del número complejo $r(cos\theta + isen\theta)$, donde n es un número entero positivo, viene dada por

$$[r(cos\theta + isen\theta)]^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

Para $r = 1$, se tiene el teorema de De Moivre.

El número u se denomina raíz *n-ésima* del número complejo z si $u^n = z$, y se escribe $u = z^{1/n}$. Por el teorema de De Moivre, se obtiene para n entero positivo, que

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \therefore k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

Si $u \neq 0$, entonces existen n raíces *n-ésimas* diferentes, $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, de z.

Ejemplo 3.1

Realizar las operaciones indicadas:

a) $\left(2+\sqrt{2}i\right)^{7}$

Solución

> evalc((2+I*sqrt(2))^7);

$$-208-344\boldsymbol{I}\sqrt{2}$$

b) $\left[2\left(cos\frac{\pi}{3}-isen\frac{\pi}{3}\right)\right]^{5}$

Solución

> evalc((2*(cos(Pi/3)-I*sin(Pi/3)))^5);

$$16+16\boldsymbol{I}\sqrt{3}$$

c) $\left[3\left(cos\frac{\pi}{6}-isen\frac{\pi}{6}\right)\right]^{6}$

Solución

> evalc((3*(cos(Pi/6)-I*sin(Pi/6)))^6);

$$-729$$

d) $\left(1-\sqrt{2}i\right)^{1+i}$

Solución

> evalc((1-I*sqrt(2))^(1+I));

$$e^{\left(1/2\ln(3)+\arctan\left(\sqrt{2}\right)\right)}\cos\left(-\frac{1}{2}\ln(3)+\arctan\left(\sqrt{2}\right)\right)$$
$$-Ie^{\left(1/2\ln(3)+\arctan\left(\sqrt{2}\right)\right)}\sin\left(-\frac{1}{2}\ln(3)+\arctan\left(\sqrt{2}\right)\right)$$

> evalf((1-I*sqrt(2))^(1+I));

$$4.136422267 - 1.778232318I$$

e) i^i

Solución

> evalc(I^I);

$$e^{(-1/2\pi)}$$

f) $(3 - \ln i)^{1/i}$

Solución

> evalc((3-ln(I))^(1/I));

$$e^{(-\arctan(1/6\pi))}\cos\left(\frac{1}{2}\ln\left(9+\frac{1}{4}\pi^2\right)\right)$$
$$-Ie^{(-\arctan(1/6\pi))}\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(9+\frac{1}{4}\pi^2\right)\right)$$

g) $i^{\cos(1\ +\ i)}$

Solución

> evalc(I^(cos(2+I)));

$$e^{(1/2\sin(2)\sinh(1)\pi)}\cos\left(\frac{1}{2}\cos(2)\cosh(1)\pi\right)$$

$$+Ie^{(1/2\sin(2)\sinh(1)\pi)}\sin\left(\frac{1}{2}\cos(2)\cosh(1)\pi\right)$$

h) $i^{log(a\,+\,i)}$, a un número real cualquiera.

Solución

> evalc(I^log(a+I));

$$e^{(-1/2\arctan(1,a)\pi)}\cos\left(\frac{1}{4}\ln\left(a^2+1\right)\pi\right)$$
$$+Ie^{(-1/2\arctan(1,a)\pi)}\sin\left(\frac{1}{4}\ln\left(a^2+1\right)\pi\right)$$

i) $(2+i)^{sen\left(\sqrt{3}+i\right)}$

Solución

> evalc((2+I)^sin(sqrt(3)+I));

$$e^{\left(1/2\sin\left(\sqrt{3}\right)\cosh(1)\ln(5)-\cos\left(\sqrt{3}\right)\sinh(1)\arctan(1/2)\right)}$$
$$\cos\left(\frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{3}\right)\sinh(1)\ln(5)+\sin\left(\sqrt{3}\right)\cosh(1)\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$+Ie^{\left(1/2\sin\left(\sqrt{3}\right)\cosh(1)\ln(5)-\cos\left(\sqrt{3}\right)\sinh(1)\arctan(1/2)\right)}$$
$$\sin\left(\frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{3}\right)\sinh(1)\ln(5)+\sin\left(\sqrt{3}\right)\cosh(1)\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

j) Hallar las raíces séptimas de $3-\sqrt{3}i$.

Solución

> solve(u^7-3+sqrt(3)*I=0);

$$u_o=\left(3-I\sqrt{3}\right)^{1/7},$$

$$u_1 = \left(\cos\left(\frac{2}{7}\pi\right) + I\cos\left(\frac{3}{14}\pi\right)\right)\left(3 - I\sqrt{3}\right)^{1/7},$$

k) Hallar las raíces quintas de i.

Solución

> evalc([solve(u^5-I=0)]);

$$\left[-\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}} + I\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}\right),\ -\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}} + I\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}} + I\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{5}\right),\ \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}} + I\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{5}\right),\ I\right]$$

l) Hallar las raíces cuartas de $z = -23$, es decir, resolver $u = -23^{1/4}$.

Solución

> solve(u^4+23=0);

$$\frac{1}{2}23^{(1/4)}\sqrt{2} + \frac{1}{2}I\,23^{(1/4)}\sqrt{2},\quad \frac{1}{2}I\,23^{(1/4)}\sqrt{2} - \frac{1}{2}23^{(1/4)}\sqrt{2},$$
$$-\frac{1}{2}23^{(1/4)}\sqrt{2} - \frac{1}{2}I\,23^{(1/4)}\sqrt{2},\quad -\frac{1}{2}I\,23^{(1/4)}\sqrt{2} + \frac{1}{2}23^{(1/4)}\sqrt{2}.$$

m) Resolver $\dfrac{i^6 - i^{-6}}{1+2i} - i.$

Solución

> (I^6-I^(-6))/(1+2*I)-1;

$$-1$$

4. Fórmula de Euler

La expresión $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$, se conoce como la fórmula de Euler. De manera general, se define

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(cosb + isenb).$$

Del teorema de De Moivre, se obtiene

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Ejemplo 4.1

Expresar en forma binómica y polar el número complejo $2e^{i\pi/3}$.

Solución

> convert(3*exp(Pi*I/3),exp);

$$\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\boldsymbol{I}\sqrt{3}$$

> convert(3*exp(Pi*I/3),polar);

$$\boldsymbol{polar}\left(3,\frac{1}{3}\pi\right)$$

5. Ecuaciones polinómicas

Una ecuación del tipo $a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0$, donde $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ son números complejos y n es un entero positivo denominado grado de la ecuación, se denomina ecuación polinómica. El teorema fundamental del álgebra establece que una ecuación de este tipo tiene por lo menos una raíz compleja. En realidad, tiene n raíces complejas, que pueden ser algunas o todas idénticas.

Ejemplo 5.1

Resolver las ecuaciones dadas:

a) $z^2 + (3 + 2i)z - 4 + i = 0$

Solución

> solve(z^2+(3 + 2*I)*z - 4 + I = 0);

$$-\frac{3}{2} - I + \frac{1}{2}\sqrt{21+8I},\quad -\frac{3}{2} - I - \frac{1}{2}\sqrt{21+8I}$$

b) $- 10 + 3x + 32x^2 - 25x^3 + 6x^4 = 0$

Solución

> solve(-10+3*x+32*x^2-25*x^3+6*x^4=0);

$$-\frac{1}{2},\quad \frac{2}{3},\quad 2+I,\quad 2-I$$

c) tan(X) = 5i/3

Solución

> solve(tan(X)=5*I/3);

$$I \operatorname{arctanh}\left(\frac{5}{3}\right)$$

una aproximación del resultado

> evalf(solve(tan(X)=5*I/3));

$$1.570796327 + .6931471804I$$

simplificando el resultado

> evalc(solve(tan(X)=5*I/3));

$$\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} I \ln(4)$$

d) *sen*(X) = *k*, *k* es un número real cualquiera

Solución

> evalc(solve(sin(X)=k,X));

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}|k+1| - \frac{1}{2}|k-1|\right)$$

$$-I\,signum(k)\ln\left(\frac{1}{2}|k+1| + \frac{1}{2}|k-1| + \sqrt{\left(\frac{1}{2}|k+1| + \frac{1}{2}|k-1|\right)^2 - 1}\right)$$

e) *sen*(X) = 5

Solución

> evalc(solve(sin(X)=5));

$$\frac{1}{2}\pi - I \ln\left(5 + 2\sqrt{6}\right)$$

f) *cos*(X) = *k*, *k* es un número real positivo

Solución

> assume(k>0):evalc(solve(cos(X)=k,X));

$$\pi - \arccos\left(-\frac{1}{2}k\sim - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(k\sim - 1)^2}\right)$$

$$+I \ln\left(\frac{1}{2}k\sim + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(k\sim - 1)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}k\sim + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(k\sim - 1)^2}\right)^2 - 1}\right)$$

El símbolo $\sim$ indica que se asumió una condición para *k*.

6. Raíces *n-ésimas* de la unidad

Las soluciones de la ecuación $z^n = 1$, n entero positivo, se denominan las raíces *n-ésimas* de la unidad, vienen dadas por

$$z = cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = e^{2k\pi i/n} \therefore k = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

Haciendo $u = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{n}\right) = e^{2\pi i/n}$, las n raíces son $1, u, u^2, \ldots, u^{n-1}$.

Ejemplo 6.1

Hallar las raíces quintas y octavas de -1 y 1, respectivamente.

Solución

> solve(z^5+1=0);

$$-1, -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} I \sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4} I \sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4} I \sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}, -\frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} I \sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}.$$

> solve(z^8-1=0);

$$-I, I, -1, 1, -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} I \sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} I \sqrt{2}, \frac{1}{2} I \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} I \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

7. Parte real e imaginaria de un número complejo

MAPLE 8, también permite determinar la parte real e imaginaria de un número complejo.

Ejemplo 7.1

Determinar la parte real e imaginaria de:

a) $tan\left(i\,ln\left(\frac{x+yi}{x-yi}\right)\right)$, donde x y y son números reales cualesquiera.

Solución

> simplify(evalc(Re(tan(I*ln((x+I*y)/(x-I*y))))));

$$-2\frac{xy}{x^2-y^2}$$

> simplify(evalc(Im(tan(I*log((x+I*y)/(x-I*y))))));

$$0$$

b) $z=(2-i)^{sen(4+i)}$

> simplify(evalc(Re((2-I)^sin(4+I))));

$$5^{(1/2\,\mathbf{sin}(4)\,\mathbf{cosh}(1))}\,e^{(\mathbf{cos}(4)\,\mathbf{sinh}(1)\,\mathbf{arctan}(1/2))}$$

$$\mathbf{cos}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{cos}(4)\,\mathbf{sinh}(1)\,\mathbf{ln}(5)+\mathbf{sin}(4)\,\mathbf{cosh}(1)\,\mathbf{arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Aproximando el resultado

> evalf(simplify(evalc(Re((2-I)^sin(4+I)))));

$$.2728431672$$

> simplify(evalc(Im((2-I)^sin(4+I))));

$$-5^{(1/2\,\mathbf{sin}(4)\,\mathbf{cosh}(1))}\,e^{(\mathbf{cos}(4)\,\mathbf{sinh}(1)\,\mathbf{arctan}(1/2))}$$

$$\mathbf{sin}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{cos}(4)\,\mathbf{sinh}(1)\,\mathbf{ln}(5)+\mathbf{sin}(4)\,\mathbf{cosh}(1)\,\mathbf{arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Aproximando el resultado

> evalf(simplify(evalc(Im((2-I)^sin(4+I)))));

$$-\ .02096932642$$

8. Gráficos de variable compleja

A través de los comandos contenidos en el paquete *plots* (*with*(*plots*)), MAPLE 7 permite efectuar representaciones de funciones de variable compleja.

Ejemplo 8.1

Representar las funciones:

a) $x e^{-i\frac{\pi}{2}x}$, en el rango $x = -\pi\,..\,\pi$.

Solución

> with(plots):complexplot(x*(-exp(I*Pi/2*x)),x= -Pi..Pi,color=blue);

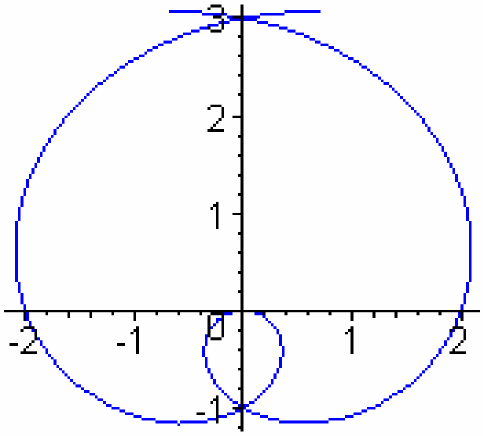


Figura 8.1

b) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, z varía en el rectángulo $[-2-2i..2+2i]\,x\,[-2-2i..2+2i]$.

Solución

> with(plots):conformal(z+1/z,z=-2-2*I..2+2*I,-2-2*I..2+2*I);

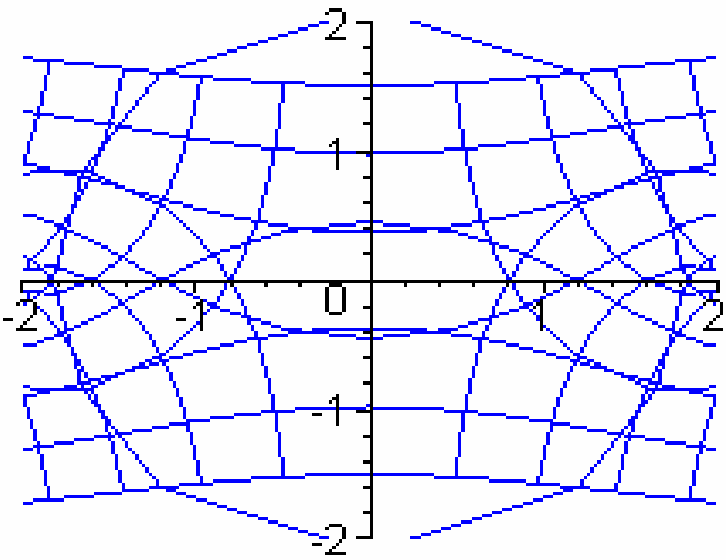


Figura 8.2

BIBLIOGRAFIA

Ainhoa Ochoa y et. al. (2002). **Aprenda Maple 8 como si estuviera en primero**. España: Escuela Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Navarra.

Churchill,B. (1974). **Complex Variables and Applications**. USA: Mc Graw Hill Book Co.

MAPLE 8 De Waterloo. (2002). **The Maple Handbook**. USA: Maple 8 Software. Inc.

Marsden, J. (1996). **Análisis Básico de Variables Compleja**. México: Trillas.

Pérez, C. (1998). **Métodos Matemáticos y Programación con MAPLE V**. Madrid: Ra-ma.

Rincón, F., García, A. y Martínez, A. (1995). **Cálculo Científico con MAPLE**. Madrid: Ra-ma.

Spiegel, M. (1991). **Complex Variables**. U.S.A.: Schaum's Outline. Mc Graw Hill Book Co.