La clase de los conjuntos medibles. La medida de Lebesgue

01. Clase aditiva de conjuntos. La clase de Borel

Dado un espacio E, una clase W de conjuntos de E se define como *clase aditiva de conjuntos* si verifica las tres condiciones siguientes: el espacio E pertenece a la clase W, la unión cualquiera de elementos de W es también elemento de W, y el conjunto complementario respecto al espacio E de un elemento A cualquiera de la clase W es también elemento de W. O sea:

1) $E \in W$
2) $\forall A_k \in W, k = 1,2,... \rightarrow \bigcup\limits_{k \geq 1} A_k \in W$
3) $\forall A \in W, \overline{A} = E - A \in W$

Teorema 01: La intersección de un número finito de clases aditivas sobre el espacio E es también una clase aditiva sobre E. O sea:

W_1, W_2 clases aditivas sobre $E \rightarrow W_1 \cap W_2$ clase aditiva sobre E

Demostración:
Veamos que se cumplen las tres condiciones de la definición de clase aditiva. Basta verlo para la intersección de dos clases aditivas:

1) W_1, W_2 clases aditivas sobre $E \rightarrow E \in W_1 \wedge E \in W_2 \rightarrow E \in W_1 \cap W_2$
2) $\forall A_k \in W_1 \cap W_2, k = 1,2,... \rightarrow (A_k \in W_1, k = 1,2,...) \wedge (A_k \in W_2, k = 1,2,...) \rightarrow$
$\rightarrow \bigcup\limits_{k \geq 1} A_k \in W_1 \wedge \bigcup\limits_{k \geq 1} A_k \in W_2 \rightarrow \bigcup\limits_{k \geq 1} A_k \in W_1 \cap W_2$
3) $\forall A \in W_1 \cap W_2 \rightarrow \forall A \in W_1 \wedge \forall A \in W_2 \rightarrow \overline{A} = E - A \in W_1 \wedge \overline{A} = E - A \in W_2 \rightarrow$
$\rightarrow \overline{A} = E - A \in W_1 \cap W_2$

Teorema 02: Para toda familia F de conjuntos de un espacio *E* existe siempre una clase aditiva sobre *E*, *W(F),* que contiene a la familia *F* y es la mínima clase aditiva sobre *E* que la contiene. O sea:

a) $F \subset W(F)$
b) $W(F)$ es clase aditiva sobre E
c) $W(F)$ es la mínima clase aditiva que contiene a F

Demostración:
Sea $CW(F)$ el conjunto de clases aditivas que contienen a F:

$$CW(F) = \left\{ W_i(F), i = 1,...,n \,/\, F \subset W_i(F) \wedge W_i(F) \; clase \; aditiva \; en \; E \right\}$$

del teorema anterior:

$$\bigcap_{i=1}^{n} W_i(F) \text{ es clase aditiva sobre E}$$

y obviamente, es la mínima clase aditiva que contiene a F. Se denomina *clase aditiva de conjuntos engendrada por F*.

Un ejemplo de clase aditiva engendrada por una familia de conjuntos es la llamada *clase de Borel*, que es la clase aditiva *B* sobre R, engendrada por la familia de intervalos (a,b), [a,b], (a,b], [a,b), esto es, por los intervalos abiertos, cerrados y semiabiertos de R.

02. Medida sobre una familia de conjuntos de un espacio dado

Se establece una medida M sobre una familia de conjuntos F, cuando hacemos corresponder a cada conjunto de la familia un número real, esto es cuando definimos una aplicación de F en R, $M : F \to R$, tal que

$$\forall \alpha \in F, M(\alpha) \in R$$

cumpliendo las condiciones siguientes:

1) $\forall \alpha \in F, M(\alpha) \geq 0$
2) Si $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \ldots / \alpha_i \in F, i = 1,2,\ldots \to M(\alpha) = M(\alpha_1) + M(\alpha_2) + \ldots$,
   siempre que $\alpha_i \cap \alpha_j = \phi,\ si\ \ i \neq j$

Ejemplo de definición de una medida sobre la familia I de los intervalos de R:

$$L : I \to R$$

Le hacemos corresponder a cada intervalo su longitud:

$$\forall (a,b) \in I, L\big((a,b)\big) = b - a \in R$$
$$\forall (a,b) \in I, L\big([a,b]\big) = b - a \in R$$
$$\forall (a,b) \in I, L\big((a,b]\big) = b - a \in R$$
$$\forall (a,b) \in I, L\big([a,b)\big) = b - a \in R$$

y se cumple:

1) $\forall i \in I, L(i) \geq 0$, siendo $L(i) = 0 \leftrightarrow a = b$
2) Si $i = i_1 \cup i_2 \cup \ldots$ con $i_k = (a_k, b_k)$ y $i_k \cap i_j = \phi$ si $i \neq j$, es: $L(i) = L(i_1) + L(i_2) + \ldots$

Si queremos definir una medida sobre la familia *H* de los conjuntos de R que pueden expresarse como una sucesión de intervalos hemos de tener en cuenta que $I \subset H$, por lo que al definir una medida en *H*, $L : H \to R$, ha de ser de manera que al aplicarla a un intervalo cualquiera, elemento de I, coincida con la medida antes definida para la familia I de intervalos de R, y será de modo que si $h \in H$ entonces $L(h) \geq 0$ y si se verifica que es $h = h_1 \cup h_2 \cup \ldots$ con $h_i \cap h_j = \phi$ si $i \neq j$, entonces $L(h) = L(h_1) + L(h_2) + \ldots$

Para extender la medida a una clase más general de conjuntos hemos de considerar dos funciones auxiliares que se denominan *medida interior* y *medida exterior*, y que se definen para cualquier conjunto acotado de R.

03. Medida sobre conjuntos generales de R

Consideremos sobre la recta R un espacio E constituido por el intervalo abierto $E=(a,b)$ y consideremos los puntos y conjuntos de dicho intervalo. Esto quiere decir que el complementario $\overline{A}$ de un conjunto A de (a,b) hemos de entenderlo respecto al espacio $E=(a,b)$: $\overline{A}=(a,b)-A$.

Consideremos la antedicha familia H de conjuntos de R que pueden expresarse como una sucesión de intervalos de R y sean $A\subset(a,b)$ y $h\in H$ de modo que $A\subset h\subset(a,b)$. El conjunto h, que llamaremos conjunto soporte, tiene una medida en H, tal como hemos indicado antes y que hemos representado por $L(h)$.

Se definen:

- Medida exterior $\overline{L}(A)$ del conjunto A es el extremo inferior o ínfimo del conjunto de números reales $\left\{L(h)/A\subset h\subset(a,b), h\; soporte\right\}$.
- Medida interior $\underline{L}(A)$ del conjunto A está dada por $\underline{L}(A)=b-a-\overline{L}(\overline{A})$.

Un conjunto acotado A es medible si coinciden sus medidas exterior e interior.

El valor común de las medidas exterior e interior de un conjunto medible A se denomina *medida de Lebesgue* del conjunto A:

Medida de Lebesgue de A: $L(A)=\overline{L}(A)=\underline{L}(A)$

Un conjunto no acotado A es medible si la intersección, $\left[-x,x\right]\cap A$*, de A con el intervalo* $i_x=\left[-x,x\right]$ es medible $\forall x>0$.

Definimos entonces la medida en la forma

$$L(A)=\lim_{x\to\infty}L\left(\left[-x,x\right]\cap A\right)$$

definición que es válida para conjuntos A acotados y no acotados. Con ello logramos definir una medida única en una clase aditiva L que llamaremos *clase aditiva de los conjuntos medibles* y que es una clase más general que la clase de Borel.

Generalización:

Se puede generalizar la definición de medida introduciendo la idea de *función de conjunto no negativa y aditiva* como una aplicación de la clase de Borel en R:

$$p : B \to R$$

por las condiciones:

a) $\forall A \in B, p(A) \geq 0$
b) $\forall A_1, A_2, ... \in B / A_i \cap A_j = \phi \ \ si\ i \neq j, \ \ p(A_1 \cup A_2 \cup ...) = p(A_1) + p(A_2) + ...$
c) $\forall A \in B / A\ acotado, \ \ p(A)\ finita$

A tal función de conjunto o p-medida se le puede hacer corresponder una función de puntos, definida, para cualquier constante $k \in R$, por

$$F(x;k) = \begin{cases} p(k < \varepsilon \leq x), \ \ si\ x > k \\ 0, \ \ si\ x = k \\ -p(x < \varepsilon \leq k), \ \ si\ x \leq k \end{cases}$$

Obviamente, si es $k_1 < k_2$ obtenemos $F(x;k_1) - F(x;k_2) = p(k_1 < \varepsilon \leq k_2)$, por lo que, si tomamos un valor arbitrario k_0 y llamando $F(x) = F(x;k_0)$ se obtiene

$$F(x;k) = F(x) + constante$$

luego, para cualquier p-medida queda determinada una función de puntos $F(x)$, salvo en una constante, finita y no decreciente para todo valor finito de la variable x, de modo que la relación

$$F(b) - F(a) = p(a < \varepsilon \leq b)$$

se verifica para todo intervalo finito (a,b) .

04. Integral de una función acotada sobre un conjunto de p-medida finita

Sea B la clase aditiva de Borel, con una p-medida, ya sea mediante una función de conjuntos $p(A)$ o mediante la correspondiente función de puntos no decreciente $F(x)$.

Sea también $g(x)$ una función definida y acotada en un conjunto $A \in B$ de p-medida finita. Existen, por tanto dos números reales, m y M, que son cotas de la función en tal conjunto:

$$\forall x \in A, \ \ m \leq g(x) \leq M$$

Si dividimos el conjunto A en n partes disjuntas, $A_1, A_2, ..., A_n$. En cada una de estas partes la función $g(x)$ tiene supremo e ínfimo, $M_i, m_i, \ i = 1,2,...,n$, cumpliéndose como es obvio que

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M, \ \ \forall i \in \{1,2,...,n\}$$

Si llamamos $\alpha(A)$ a la familia de las particiones disjuntas del conjunto A, se tiene que si para dos particiones cualesquiera $\alpha_1,\alpha_2 \in \alpha(A)$ es α_2 una subdivisión de las partes de α_1, representaremos esto mediante la inclusión $\alpha_1 \subset \alpha_2$.

Sumas:
Se llama *suma superior de Darboux* correspondiente a la partición disjunta $\alpha = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ del conjunto A con respecto a la función $g(x)$, a la expresión

$$D_s(\alpha, g(x) = \sum_{j=1}^{n} M_j . p(A_j)$$

Se llama *suma inferior de Darboux* correspondiente a la partición disjunta $\alpha = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ del conjunto A con respecto a la función $g(x)$, a la expresión

$$D_i(\alpha, g(x) = \sum_{j=1}^{n} m_j . p(A_j)$$

El siguiente teorema nos permite acotar las sumas de Darboux y además establecer la existencia de supremo del conjunto de las sumas inferiores, e ínfimo del conjunto de las sumas superiores.

Teorema 03: Consideremos una función $g(x)$ definida y acotada en el conjunto $A \in B$. Se verifica:

1) $m.p(A) \le D_i(\alpha, g(x)) \le D_s(\alpha, g(x)) \le M.p(A)$, $\forall \alpha \in \alpha(A)$
2) $D_s(\alpha', g(x)) \le D_s(\alpha, g(x))$ y $D_i(\alpha', g(x)) \ge D_i(\alpha, g(x))$, si $\alpha \subset \alpha'$
3) $D_i(\alpha_1, g(x)) \le D_s(\alpha_2, g(x)),\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \alpha(A)$
4) Existen los números reales supremo de las sumas inferiores e ínfimo de las sumas superiores:

$$\sup r\{D_i(\alpha, g(x)) / \alpha \in \alpha(A)\},\quad \inf i\{D_s(\alpha, g(x)) / \alpha \in \alpha(A)\}$$

Demostración:

1) $m \le m_k \le M_k \le M, k = 1,2,...,n \rightarrow mp(A_k) \le m_k p(A_k) \le M_k p(A_k) \le$

$$\le Mp(A_k), k = 1,2,...,n \rightarrow m\sum_{k=1}^{n} p(A_k) \le \sum_{k=1}^{n} m_k p(A_k) \le \sum_{k=1}^{n} M_k p(A_k) \le$$

$$\le M\sum_{k=1}^{n} p(A_k) \rightarrow m.p(A) \le D_i(\alpha, g(x)) \le D_s(\alpha, g(x)) \le M.p(A),\ \forall \alpha \in \alpha(A)$$

2) Sean las particiones $\alpha = \{A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n\}$, $\alpha' = \{A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_{n1}, A_{n2}\}$, donde las n-1 primeras partes coinciden en ambas particiones, mientras que la última parte de α, A_n, está sustituida en α' por las dos partes A_{n1} y A_{n2}, que son disjuntas y tales que su unión es A_n: $A_{n1} \cap A_{n2} = \phi$, $A_{n1} \cup A_{n2} = A_n$. Esto nos permite expresar que $\alpha \subset \alpha'$, por tanto: $m_n \le m_{ni} \wedge M_n \ge M_{ni}, i = 1,2$. Por tanto, las sumas de Darboux son:

$$D_s(\alpha', g(x)) = \sum_{k=1}^{n-1} M_k p(A_k) + M_{n1} p(A_{n1}) + M_{n2} p(A_{n2}) \le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1} M_k p(A_k) + M_n \left[p(A_{n1}) + p(A_{n2}) \right] = \sum_{k=1}^{n-1} M_k p(A_k) + M_n p(A_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M_k p(A_k) = D_s(\alpha, g(x)) \rightarrow D_s(\alpha', g(x)) \leq D_s(\alpha, g(x))$$

$$D_i(\alpha', g(x)) = \sum_{k=1}^{n-1} m_k p(A_k) + m_{n1} p(A_{n1}) + m_{n2} p(A_{n2}) \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n-1} m_k p(A_k) + m_n \left[p(A_{n1}) + p(A_{n2}) \right] = \sum_{k=1}^{n-1} m_k p(A_k) + m_n p(A_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k p(A_k) = D_i(\alpha, g(x)) \rightarrow D_i(\alpha', g(x)) \geq D_i(\alpha, g(x))$$

3) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \alpha(A)$, si es $\alpha = \left\{ A_i \cap A_j \,/\, A_i \in \alpha_1 \wedge A_j \in \alpha_2 \right\}$ será $\alpha_1 \subset \alpha,\ \alpha_2 \subset \alpha$, y aplicando los apartados anteriores:

$$D_i(\alpha, g(x)) \leq D_s(\alpha, g(x))$$

$$\alpha_1 \subset \alpha \rightarrow \begin{cases} D_s(\alpha, g(x)) \leq D_s(\alpha_1, g(x)) \\ D_i(\alpha, g(x)) \geq D_i(\alpha_1, g(x)) \end{cases}$$

$$\alpha_2 \subset \alpha \rightarrow \begin{cases} D_s(\alpha, g(x)) \leq D_s(\alpha_2, g(x)) \\ D_i(\alpha, g(x)) \geq D_i(\alpha_2, g(x)) \end{cases}$$

por tanto:

$$D_i(\alpha_1, g(x)) \leq D_i(\alpha, g(x)) \leq D_s(\alpha, g(x)) \leq D_s(\alpha_2, g(x))$$

también:

$$D_i(\alpha_2, g(x)) \leq D_i(\alpha, g(x)) \leq D_s(\alpha, g(x)) \leq D_s(\alpha_1, g(x))$$

4) La familia $\left\{ D_i(\alpha, g(x)) \,/\, \alpha \in \alpha(A) \right\}$ está superiormente acotada, por lo que admite supremo.

La familia $\left\{ D_s(\alpha, g(x)) \,/\, \alpha \in \alpha(A) \right\}$ está inferiormente acotada, por lo que admite ínfimo.

Se denomina *integral superior* de la función $g(x)$ sobre el conjunto A respecto a la p-medida al ínfimo de las sumas superiores de Darboux:

$$\overline{\int_A} g(x).dp(A) = \inf i \left\{ D_s(\alpha, g(x)) \,/\, \alpha \in \alpha(A) \right\}$$

Se denomina en forma análoga *integral inferior* de la función $g(x)$ sobre el conjunto A respecto a la p-medida al supremo de las sumas inferiores de Darboux:

$$\underline{\int_A} g(x).dp(A) = \sup r \left\{ D_i(\alpha, g(x)) \,/\, \alpha \in \alpha(A) \right\}$$

Teorema 04: Se verifica

$$\int_{-A} g(x).dp(A) \leq \overline{\int_{A}} g(x).dp(A)$$

Demostración:
Sabemos que es:

$$\overline{\int_{A}} g(x).dp(A) = \inf i\left\{D_s(\alpha, g(x)) / \alpha \in \alpha(A)\right\}$$

Si sumamos un nº real arbitrario $\varepsilon > 0$, ya la integral superior será mayor que el ínfimo de las sumas superiores de Darboux, es decir, existirá alguna partición asociada, $\alpha_\varepsilon \in \alpha(A)$, tal que la suma superior correspondiente sea menor que dicha suma

$$D_s(\alpha_\varepsilon, (x)) \leq \overline{\int_{A}} g(x).dp(A) + \varepsilon$$

Como sabemos, por el teorema anterior, que $D_i(\alpha, g(x)) \leq D_s(\alpha, g(x))$ se deduce que

$\overline{\int_{A}} g(x).dp(A) + \varepsilon$ es una cota superior de la familia de las sumas inferiores de Darboux, luego se tiene que

$$\int_{-A} g(x).dp(A) \leq \overline{\int_{A}} g(x).dp(A) + \varepsilon$$

y siendo $\varepsilon > 0$ un número arbitrario:

$$\int_{-A} g(x).dp(A) \leq \overline{\int_{A}} g(x).dp(A)$$

Si las integrales superior e inferior de Darboux coinciden se dice que la función es *integrable* en el conjunto respecto de la p-medida, y el valor común de ambas integrales es lo que denominamos *integral de Lebesgue-Stieltjes* de la función sobre el conjunto respecto a la p-medida. Se representa con una cualquiera de las expresiones siguientes

$$\int_{A} g(x).dF(x) \qquad \int_{A} g(x).dF(x)$$

Si es $F(x) = x$ entonces $p(A) = L(A)$ y la anterior definición de integral de Lebesgue-Stieltjes coincide con la de la integral de Lebesgue.

05. Bibliografía:

Cramer, Harold; Métodos matemáticos de Estadística, 1960, Ed. Aguilar, Madrid
Dieudonné, Jean: Elementos de Análisis Matemático, 1979, Ed. Reverté, Barcelona
Rudin, Walter; Principios de Análisis Matemático, 1966, Ediciones del Castillo
Puig Adam, Pedro; Cálculo Integral, 1976, Biblioteca Matemática S. L., Madrid
De la Vallée-Poussin, Charles Jean; Cours d'Analyse Infinitesimale, 1914, Ed. Louvain, Tomo II, Biblioteca Universidad de California.
Williamson, J.H.; Lebesgue Integration, 1990, Dover Publications Inc, New York