CLAUSURA ALGEBRAICA Y NÚMEROS COMPLEJOS

00. Introducción

Nos preguntamos ¿Porqué no podemos resolver ciertas ecuaciones polinómicas en un determinado campo de números?. Generalmente, decimos aquello de que "no tiene solución racional", o bien, "no tiene solución real", si se trata de ecuaciones polinómicas con coeficientes racionales o con coeficientes reales, respectivamente.

En cambio decimos que "toda ecuación polinómica con coeficientes complejos, tiene solución en el campo de los números complejos" (teorema fundamental del álgebra). ¿porqué existen estos comportamientos diferentes entre unos campos y otros?. Qué es lo que tienen de distinto los cuerpos en los que se pueden resolver todas las ecuaciones y los cuerpos en donde hay que apelar al "no tiene solución"?

El estudio de estos resultados dispares necesita del concepto de clausura algebraica de un campo.

01. Campos algebraicamente cerrados

Elementos algebraicos sobre un cuerpo:
Dado un cuerpo cualquiera *K*, se dice que otro cuerpo *L* es extensión de *K*, si *L* contiene un subcuerpo *K** isomorfo a *K*.

Dado un cuerpo *L* que es extensión de *K*, si dice que un elemento $t \in L$ es algebráico sobre *K* sii existen coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n \in K$ tales que el polinomio $a_0 + a_1.t + a_2.t^2 + ... + a_n.t^n$ se anula para dicho valor de *t*.

Si no existe ningún polinomio con coeficientes en *K* que se anule para un $t^* \in L$, es decir, si $a_0 + a_1.t + a_2.t^2 + ... + a_n.t^n,\ n \geq 1,$ es no nulo para cualesquiera que sean los coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n \in K$, entonces diremos que $t^* \in L$ es trascendente sobre *K*.

Extensión algebraica y clausura algebraica:
Un cuerpo *L* se denomina *extensión algebraica* de *K* si es extensión de *K* y todo elemento de *L* es algebraico sobre *K*.

Si existe algún elemento de *L* que no es algebraico sobre *K*, diremos que *L* es una *extensión trascendente* sobre *K*.

Sea *L* una extensión algebraica sobre *K*, es decir, *L* es una extensión de *K* cuyos elementos son todos algebraicos sobre *K*, esto es, para todo elemento *t* de *L* siempre existe un polinomio con coeficientes en *K* que se anula para el valor de *t*. Cuando, además, todo polinomio con coeficientes en *K* admite una raíz en *L*, entonces diremos que la extensión algebraica *L* es, además, *clausura algebraica* de *K*.

Dado el cuerpo *K*, la extensión de *L* obtenida adjuntando a *K* un número finito de elementos, $a_1,...,a_n$, algebraicos sobre *K*, esto es, $L(a_1,...,a_n)$, es una extensión algebraica sobre k.

Cuando un cuerpo *K* es clausura algebraica de si mismo, es decir, cuando todo polinomio con coeficientes en *K* tiene una raíz en *K*, entonces diremos que *K* es un cuerpo *algebraicamente cerrado*.

Ejemplos:

a) El número real $t=\sqrt{2}$ es algebraico sobre *Q*, cuerpo de los números racionales, porque existe un polinomio $a_0+a_1t+...+a_n.t^n$ con coeficientes en *Q* que se anula para dicho número real. Por ejemplo, $2-t^2$ tiene coeficientes en Q y se anula para $t=\sqrt{2}$.
b) *R* no es extensión algebraica de *Q*, pues existen elementos de *R* que no son algebraicos sobre *Q*, por ejemplo $t^*=\pi$ es trascendente sobre *Q*, ya que no hay ningún polinomio con coeficientes racionales que tenga por raíz al número π .
c) El cuerpo $L=Q(\sqrt{2})$ obtenido adjuntando al cuerpo *Q* de los números racionales el numero real $\sqrt{2}$, que es algebraico sobre *Q*, es una extensión algebraica de *Q*, pues todo elemento de *L* es algebraico sobre *Q*.
d) El cuerpo *R* de los números reales no es algebraicamente cerrado, pues no se cumple que todo polinomio con coeficientes reales tiene una raíz real. El polinomio $1+t^2$ no tiene raíz en *R*.

02. El campo complejo

Repasando las nociones básicas:
El conjunto *C* de los números complejos queda definido como el conjunto de los pares ordenados de números reales, componentes real e imaginaria, de modo que las operaciones de suma y multiplicación le dan estructura de campo o cuerpo.

Además, el cuerpo *C* puede ser considerado un espacio vectorial sobre sí mismo, existiendo una métrica o norma dada por $\forall z,u\in C,\ d(z,u)=|z-u|$, que le convierte en una espacio normalizado. Es también completo porque toda sucesión de Cauchy de elementos del espacio tiene límite en el espacio. En definitiva, C es un espacio de Banach, o sea, un espacio normalizado y completo.

Las funciones complejas de variable compleja son las aplicaciones de C en C, cumpliéndose en particular que el conjunto *L(C,C)* de las funciones lineales y continuas de C en C es también un espacio de Banach.

Las funciones de clase C^∞ son las funciones complejas de variable compleja infinitamente derivables con continuidad. Las funciones continuas en cada punto z_0 del espacio, *Con*(z_0), son un C-álgebra, un álgebra sobre el cuerpo C de los números complejos, y la familia *D*(z_0) de las funciones diferenciables en z_0 son también un C-álgebra, subálgebra de *Con*(z_0), verificándose para la diferenciación y derivación de las funciones complejas las mismas reglas que en el caso de las funciones reales.

El plano complejo es la representación del espacio de Banach de los números complejos. Las funciones complejo-diferenciables en un conjunto abierto U del plano complejo se dicen holomorfas u analíticas, denominándose funciones enteras a aquellas que son holomorfas en todo el plano complejo. En realidad, el ser holomorfa en un punto significa ser holomorfa en un entorno del punto e infinitamente diferenciable. Una función entera es, en definitiva, una función desarrollable en serie en cada punto del espacio C.

Un disco *D* con centro en z_0 y radio *r*, en el espacio C, es el conjunto de los puntos cuya distancia a z_0 es menor o igual a *r*. Su frontera es la circunferencia constituida por los puntos que distan exactamente *r* del punto z_0, y su longitud es, obviamente, $2\pi r$.

Disco $D(z_0,r)$: $D(z_0,r):|z-z_0|<r$, Frontera de $D(z_0,r):F(z_0,r):|z-z_0|=r$

La fórmula de la integral de Cauchy es hoy la fundamental en el cálculo de variable compleja: Sea *f(z)* una función analítica en un disco *D* o bien en un recinto cualquiera simplemente conexo del espacio C, entonces, para cualquier punto z_0 del interior de *D* y para cualquier curva o camino *E* cerrado simple contenido en su interior que rodee al punto, se verifica que

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_E \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

(para ver una forma de deducción de esta expresión puede consultarse en esta misma web http://casanchi.com/mat/cauchy02.pdf)

La fórmula anterior se extiende a la n-sima derivada de la función:

$$f^{n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_E \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

El Teorema de Liouville

El *Teorema de Liouville*, también conocido como *Teorema de acotación de Liouville,* afirma que toda función entera y acotada en C es constante.

Se puede probar de diversos modos. En la prueba siguiente empleamos la fórmula de la integral de Cauchy para la primera derivada.

- Si *f(z)* está acotada, $\forall z\in C$, sea *M* una cota. Se tiene entonces que:

$$\forall z\in C, |f(z)|<M$$

- Si *f(z)* es entera, pude aplicarse la fórmula de la integral de Cauchy, que para la primera derivada en $z\in C$ será

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|u-z|=r}\frac{f(u)}{(u-z)^2}du$$

(siendo $|u-z|=r$ una curva de centro en z y radio arbitrario)

- Calculemos la norma de la función derivada:

$$|f'(z)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|u-z|=r}\frac{f(u)}{(u-z)^2}du\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\right|\cdot\left|\oint_{|u-z|=r}\frac{f(u)}{(u-z)^2}du\right|<\frac{1}{2\pi}\left|\oint_{|u-z|=r}\frac{M}{|z-u|^2}du\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_{|u-z|=r}\frac{M}{r^2}du\right|=\frac{M}{2\pi r^2}\oint_{|u-z|=r}dz=\frac{M}{2\pi r^2}2\pi r=\frac{M}{r}$$

Es decir, $\left|f'(z)\right| < \frac{M}{r}$, y como *r* es arbitrariamente grande, $\left|f'(z)\right| = 0$, con lo cual, al ser $-\left|f'(z)\right| \leq f'(z) \leq \left|f'(z)\right|$, se tiene que $f'(z) = 0, \forall z \in C$, es decir, tal como afirma el teorema, $f(z) = const, \forall z \in C$

El teorema Fundamental del Álgebra
Este teorema permite establecer la clausura algebraica de los campos de nuestra aritmética ordinaria:
Todo polinomio con coeficientes complejos tiene sus ceros en C, o dicho de otro modo: *Todo polinomio tiene en C tantos ceros como indica su grado.*

Demostración: Probemos que cualquier polinomio $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ de grado $n \geq 1$ tiene un cero en C.
Veamos que si suponemos lo contrario, es decir, si suponemos que $p_n(z)$ no tiene ceros en C, entonces llegaríamos a una contradicción con la hipótesis de que $p_n(z)$ es un polinomio.
Así, si $p_n(z)$ no tiene ceros en C, entonces $f(z) = 1/p_n(z)$ es analítica, $\forall z \in C$, ya que el denominador no se anula para ningún $z \in C$.
Se tiene:

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = z^n \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{z^{n-k}} \rightarrow \left|p_n(z)\right| = \left|z^n\right| . \left|\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{z^{n-k}}\right| \rightarrow \lim_{|z|\to+\infty} \left|p_n(z)\right| =$$

$$= \lim_{|z|\to+\infty} \left|z^n\right| . \lim_{|z|\to+\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{z^{n-k}}\right| = \lim_{|z|\to+\infty} \left|z^n\right| . \left|\sum_{k=0}^{n} \lim_{|z|\to+\infty} \left(a_k \frac{1}{z^{n-k}}\right)\right| = \lim_{|z|\to+\infty} \left|z^n\right| . \left|\lim_{|z|\to+\infty} \frac{a_0}{z^n} + \ldots + \lim_{|z|\to+\infty} \frac{a_n}{z^0}\right| =$$

$$= +\infty . \left|0 + \ldots + a_n\right| = +\infty . \left|a_n\right| = +\infty$$

por tanto, $\lim_{|z|\to\infty} \left|p_n(z)\right| = +\infty$.

De esto se deduce que $\lim_{|z|\to\infty} \left|f(z)\right| = \lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{1}{p_n(z)}\right| = \frac{1}{+\infty} = 0$

Y siendo $-\lim_{|z|\to\infty} \left|f(z)\right| \leq \lim_{|z|\to\infty} f(z) \leq \lim_{|z|\to\infty} \left|f(z)\right|$, será: $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$
Ahora bien, por definición de límite:

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0 \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \delta > |z| \rightarrow \left|f(z)\right| < \varepsilon$$

y de ser $-\left|f(z)\right| \leq f(z) \leq \left|f(z)\right|$ se tiene que la función $f(z)$ está acotada, $\forall z \in C$.
Finalmente, si la función $f(z)$ está acotada, $\forall z \in C$, al aplicar el Teorema de acotación de Liouville, encontramos que $f(z)$ ha de ser constante. Es decir, se tiene que $p_n(z) = 1/f(z)$ es constante, contra la hipótesis de que $p_n(z)$ es un polinomio en z, y por tanto no podría ser constante.

Así, pues, la suposición de que $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ no tiene ceros en C resulta ser falsa, y concluimos por tanto, que el polinomio tiene un cero en C.

Esto quiere decir en realidad que el polinomio $p_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ tiene tantas raíces en C como indica su grado, pues repitiendo el razonamiento con los sucesivos cocientes van apareciendo todas las raíces del polinomio de partida:

$$p_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k=(z-z_n)\sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k=(z-z_n)(z-z_{n-1})\sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k=(z-z_n)(z-z_{n-1})...(z-z_1)z_0$$

En definitiva, todo polinomio de grado n con coeficientes en C tiene tantos ceros en C como indica su grado. La clausura algebraica del cuerpo de los números complejos es el mismo cuerpo C, que, por consiguiente es algebraicamente cerrado.

03. Conclusión

La clausura algebraica del campo C de los números complejos es el mismo C, es decir, C es un cuerpo algebraicamente cerrado.
Es clausura algebraica del cuerpo R de los números reales. Todo polinomio con coeficientes en R tiene sus ceros en C.

04. Bibliografía

Ahlfors, L. V.; Complex Analysis, Ed. McGraw-Hill, Londres, 1966
Chinea, C. S.; Cuerpos. Extensiones de un cuerpo
http://casanchi.com/casanchi_2000/04_cuerpos01.pdf
Chinea, C. S.; Extensiones algebraicas
http://casanchi.com/mat/ext_algebraicas.pdf
Chinea, C. S.; Extensiones trascendentes de un cuerpo
http://casanchi.com/mat/cuerpos02.pdf
Chinea, C. S.; La de Cauchy. Una fórmula para una integral.
http://casanchi.com/mat/cauchy02.pdf
Chinea, C. S.; Sobre la idea de función analítica de variable compleja.
http://casanchi.com/mat/analiticas01.pdf
Godement, R.; Cours d'algèbre, Hermann, Paris, 1966