Sobre la cifra terminal de una potencia

1. **Introducción**
2. **El problema propuesto**
3. **La solución**
4. **Regularidades en el cálculo de cifras terminales en potencias**
5. **Conclusión**

Gustavo YANES YANES
U.E."Prof Boris Bossio Vivas"

Introducción

Ocasionalmente, para distraerme un rato, tomo alguna publicación que tenga a mano y la hojeo hasta encontrar algo que, de repente, me despierte el interés; entre las publicaciones de que dispongo tengo un par de compendios de problemas propuestos en diferentes Olimpíadas Matemáticas. En cada problema que me interese reviso el enunciado y realizo las adaptaciones que se requieran en cuanto a sistemas monetarios o de medición, nombres de objetos o ciudades, para utilizarlos en mis clases; los resuelvo de las maneras que me sean posibles y reviso los procedimientos y soluciones del autor, o los autores. Pocas veces son necesarias las adaptaciones y es casi seguro que quedo conforme con las soluciones y procedimientos propuestos. Rara vez hay discordancia entre mis soluciones y las propuestas, o en los procedimientos, o en ambos; no obstante, eso sucedió y es, en principio, lo que motivó este trabajo.

El problema propuesto

En un compendio de problemas propuestos en Olimpíadas Matemática aparece el siguiente:

"¿Cuál es la cifra de la unidades de $17^{1992} + 11^{1992} + 7^{1992}$?"

Seguido de estas alternativas para el resultado: a) 7; b) 1; c) 9; d)2.
Me pareció que repetir el exponente en las potencias como también las cifras terminales en dos de las bases, hacen el problema bastante elemental, por lo que lo plantearía a mis discípulos sin repetir exponentes ni cifras terminales en las bases.

La solución

Resolví el problema obteniendo como resultado 3 (tres); lo que me sorprendió, porque no aparece dentro de las alternativas de solución. Revisé tanto mis puntos de vista como mis cálculos y obtuve el mismo resultado; pasé a revisar el procedimiento de solución propuesto, que dice:

"Observemos que 1992 = 4. 498. Si calculamos los términos

17^0 y 7^0, 17^1 y 7^1, 17^2 y 7^2, 17^3 y 7^3

Estos terminan en 1, 7, 9 y 3 respectivamente. Si continuamos calculando de potencia en potencia, cada ciclo de cuatro se repite la secuencia 1, 7, 9 y 3. Por otra parte cualquier potencia de 11 termina en 1.

Escribamos $17^{1992} = (17^{498})^4 = \ldots.3$

$11^{1992} = (11^{498})^4 = \ldots.1$

$7^{1992} = (7^{498})^4 = \ldots.3$

Luego, la cifra de las unidades de $17^{1992}+11^{1992}+7^{1992}$ es $3 + 1 + 3 = 7$."[1]

El procedimiento que utilicé fue semejante al descrito; salvo que, en los casos de las bases 17 y 7 tomé en cuenta los restos de la división entera del exponente entre la longitud de la secuencia para determinar la cifra terminal correspondiente. En el caso de la base 11 utilicé el criterio citado en la publicación.
Luego:

Escribamos $17^{1992} = 17^{1992 \text{ mod } 4} = 17^0$ termina en 1

$11^{1992} = 11^{1992}$ termina en 1

$7^{1992} = 7^{1992 \text{ mod } 4} = 17^0$ termina en 1

Luego, la cifra de las unidades de $17^{1992}+11^{1992}+7^{1992}$ es $1 + 1 + 1 = 3$.

El autor, o los autores, del problema no tomaron en cuenta que cuando se trata de secuencias periódicas: el enésimo término coincide con el que ocupa el lugar igual al resto de la división entera de n entre la longitud de la secuencia que se repite.
Al revisar el procedimiento utilizado por mí, observé que para identificar la serie no debe comenzarse con la potencia nula; ya que, el primer término de todas las secuencias sería siempre 1, que no es cifra terminal de ninguna potencia entera positiva de base par.

Véase, por ejemplo que a $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ le siguen $2^5 = 32$, $2^6 = 64$ etc.

Sin que vuelva a aparecer el 1. Más adelante veremos cómo podemos solucionar el inconveniente.
En Internet revisé algunos videos y materiales escritos referentes al caso, sin que ninguno me haya satisfecho totalmente. No mencionan algunas regularidades que pueden utilizarse para deducir rápidamente la cifra terminal de cualquier potencia de base entera. Como veremos al final, los problemas del tipo que nos ocupa dejarían de serlo si se hace uso de las regularidades que paso a comentar.

Regularidades en el cálculo de cifras terminales en potencias

Como ya se ha dicho, para determinar la secuencia periódica de las cifras terminales de las potencias comenzaremos por el exponente1; dando por sentado que se sabe que la potencia nula de cualquier base no nula es igual a la unidad. También que 0^0 no está definida.
Para los cálculos que nos ocupan basta tomar en cuenta la cifra terminal de la base, ya que la cifra terminal de la potencia está perfectamente determinada por el exponente y/o por la última cifra de la base.

Hagamos un cuadro de doble entrada con las cifras terminales de las bases en la columna identificada con asterisco y los exponentes de las potencias en la fila igualmente identificada. En los cruces de filas y columnas estarán las cifras terminales de las potencias.

EXPONENTES

CIFRAS TERMINALES DE BASES

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	..
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	..
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	..
2	2	4	8	6	2	4	8	6	2	..
3	3	9	7	1	3	9	7	1	3	..
4	4	6	4	6	4	6	4	6	4	..
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	..
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	..
7	7	9	3	1	7	9	3	1	7	..
8	8	4	2	6	8	4	2	6	8	..
9	9	1	9	1	9	1	9	1	9	..

En la tabla adjunta se observa:

A) Las cifras terminales de las potencias cuyas bases terminan en 0, 1, 5 y 6 se repiten de 1 en 1. La longitud de la secuencia es igual a 1.

B) Las cifras terminales de las potencias cuyas bases terminan en 2, 3, 7 y 8 se repiten de 4 en 4; por lo que la longitud de la secuencia es 4.

C) Las cifras terminales de las potencias cuyas bases terminan en 4 y 9 se repiten de 2 en 2; siendo 2 longitud de la secuencia.

Las longitudes de las secuencias también conforman series de cinco números a saber 1, 1, 4, 4, 2. De acuerdo a la longitud, las secuencias de las cifras terminales de las potencias se clasifican en: unitarias, cuaternarias y binarias.

Cifra terminal de la base	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
Longitud de la secuencia	1	1	4	4	2	1	1	4	4	2	1	1	…

Al observar las cifras terminales de las potencias con secuencias unitarias, vemos que son iguales a las cifras terminales de las respectivas bases. Por lo que podemos asegurar:

I. Las cifras terminales de las potencias cuyas bases terminan en 0, 1, 5, y 6 son 0, 1, 5 y 6 respectivamente.

También que las cifras terminales de las potencias con secuencias binarias, son iguales a las cifras terminales de las bases si el exponente es impar y, si es par, el complemento a diez de las cifras terminales de las bases. Así tendremos que:

II. Las cifras terminales de las potencias de bases que terminan en 4 ó 9 son: Las mismas cifras terminales de las bases en caso de exponentes impares y sus respectivos complementos a diez (6 en caso de exponentes pares y 1 en el de los exponentes impares).

Las regularidades anteriores se observan mejor en las tablas que siguen:

EXPONENTES

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	..
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	..
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	..
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	..
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	..

EXPONENTES

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	..
4	4	6	4	6	4	6	4	6	4	..
9	9	1	9	1	9	1	9	1	9	..

Veamos cómo podemos deducir las cifras terminales de las potencias con secuencias cuaternarias.

EXPONENTES

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	..
2	2	4	8	6	2	4	8	6	2	..
3	3	9	7	1	3	9	7	1	3	..
7	7	9	3	1	7	9	3	1	7	..
8	8	4	2	6	8	4	2	6	8	..

De lo anterior se puede deducir que las cifras terminales de las potencias con secuencias cuaternarias son:

D) Los números pares diferentes de cero (0) para las bases pares (cifra terminal 2 u 8).

E) Los números impares diferentes de cinco (5) para las bases impares (cifra terminal 3 ó 7).

También se puede ver lo siguiente: el primer elemento de cada secuencia coincide con la cifra terminal de la base y el cuarto, o último, de la secuencia es seis (6) si la cifra terminal indicada es par y uno (1) si tal cifra terminal es impar.
(Obsérvese que el cuarto elemento de la tabla general , independientemente de la longitud de la secuencia, siempre es 6 para bases con cifras terminales pares no nulas y 1 para bases con cifras terminales impares diferentes de cinco).
Analicemos las secuencias por separado, según sea la paridad de la cifra terminal de la base.
Cuando la cifra terminal de la base es 2 u 8:

EXPONENTES

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	..
2	2	4	8	6	2	4	8	6	2	..
8	8	4	2	6	8	4	2	6	8	..

Cuando la cifra terminal de la base es 3 ó 7:

EXPONENTES

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	..
3	3	9	7	1	3	9	7	1	3	..

7	**7**	**9**	**3**	**1**	**7**	**9**	**3**	**1**	**7**	**..**

Ya conocemos la primera y la última cifra de cada secuencia de cifras terminales, ahora podemos observar que la segunda cifra es complemento de la cuarta y la tercera es complemento de la primera.
En el cuadro superior se encuentran: 2+8=10; 4+6=10; 8+2=10 y 4+6=10 que se repite. En el cuadro inferior se encuentran: 3+7=10; 9+1=10; 7+3=10 y 9+1=10 que se repite.
Obsérvese que en las secuencias cuaternarias, las cifras terminales de las potencias que corresponden a exponentes impares cambian de posición respecto a las cifras terminales de las bases, por paridad; mientras que las correspondientes a exponentes pares permanecen fijas y tales cifras coinciden, salvo en el número de orden, con las cifras terminales de las potencias con secuencias binarias; según la paridad de la cifra terminal de la base.

EXPONENTES

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	..
4	4	6	4	6	4	6	4	6	4	..
2	2	4	8	6	2	4	8	6	2	..
8	8	4	2	6	8	4	2	6	8	..

EXPONENTES

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	..
9	9	1	9	1	9	1	9	1	9	..
3	3	9	7	1	3	9	7	1	3	..
7	7	9	3	1	7	9	3	1	7	..

Utilicemos los restos de la división entera de los exponentes entre cuatro (exponente mod 4) para determinar las cifras terminales de las potencias con secuencias cuaternarias:

III. Si exponente mod 4 = 1, la cifra terminal de la potencia será igual a la terminal de la base. (Esto se cumple para cualquier base, independientemente de la longitud del período).

IV. Si exponente mod 4 = 2, la cifras terminales de las potencias con secuencias cuaternarias, serán:
  - IV.1. 4 para las potencias con bases que terminan en 2 u 8
  - IV.2. 9 para las potencias con bases que terminan en 3 ó 7.

V. Si exponente mod 4 = 3, las cifras terminales de las potencias con secuencias cuaternarias, serán:
  - V.1. 8 para las potencias con bases que terminan en 2 y 2 para las potencias con bases que terminan en 8.
  - V.2. 7 para las potencias con bases que terminan en 3 y 7 para las potencias con bases que terminan en 3.
    Nótese en cada paridad, las cifras terminales de las potencias son complementarias entre sí.

VI. Si exponente mod 4 = 0, la cifra terminal de la potencia será igual a:
  - VI.1. 6 para las potencias con bases que terminan en cifra par no nula.
  - VI.2. 1 para las potencias con bases que terminan en cifra impar diferente de cinco.

Para calcular los restos de la división entera entre cuatro veamos lo que sigue en la próxima página.

CÁLCULO RÁPIDO DE LOS RESTOS MÓDULO CUATRO.

En la tabla de abajo aparecen los 110 primeros números naturales donde se destacan los primeros 27 múltiplos de 4. A partir del número 100 sólo se muestran las dos últimas cifras.

Primeros 27 múltiplos de 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	**13**	14	**15**	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	**25**	26	**27**	28	**29**	30
31	32	**33**	34	**35**	36	**37**	38	**39**	40
41	42	**43**	44	**45**	46	**47**	48	**49**	50
51	52	**53**	54	**55**	56	**57**	58	**59**	60
61	62	**63**	64	**65**	66	**67**	68	**69**	70
71	72	**73**	74	**75**	76	**77**	78	**79**	80
81	82	**83**	84	**85**	86	**87**	88	**89**	90
91	92	**93**	94	**95**	96	**97**	98	**99**	00
01	02	**03**	04	**05**	06	**07**	08	**09**	10

Los múltiplos de 4, de una cifra, son: el mismo 4 y el 8.
Los múltiplos de 4, de dos o más cifras, son los que cumplen lo siguiente:

1. La cifra de las decenas es impar y la de las unidades es 2 ó 6.
2. La cifra de las decenas es par y la de las unidades es 0, 4 u 8.

No es necesario memorizar las reglas tal como están escritas; para la primera basta con recordar que el 12 y el 16 son múltiplos de 4 y, para la segunda que el 20, el 24 y el 28 también lo son. Las cifras terminales serán las mismas siempre que las decenas tengan, la misma paridad, en cada caso.

Para determinar el resto módulo 4 de un número de más de dos cifras, basta determinar el resto módulo 4 las dos últimas cifras; por cuanto todo número de este tipo es de la forma cdu; donde c representa la cantidad de centenas (que puede ser un número tan largo como se quiera), d la cifra de las decenas simples y u las de las unidades simples.

El número de la forma cdu se puede expresar como c00 + du. Luego, como c00 es múltiplo de 100, y consecuentemente de 4, por las propiedades de la división entera: cdu y du son congruentes módulo 4; es decir: dan el mismo resto al dividirlos entre 4.
De lo anterior, para determinar los restos exponente mod 4 se toman las dos últimas cifras del exponente (du) y se procede así:

VII.1 Si du es múltiplo de 4, el resto es 0.

VII.2 Si du no es múltiplo de 4 tomamos el número dos cifras terminales múltiplo de 4 más cercano, por defecto, a du; restamos y el valor absoluto de la diferencia es el resto buscado.

Por ejemplo determinemos 34566 mod 4.
Como 66 no es múltiplo de 4 (ya que la cifra de las decenas es par y la de las unidades no es 0, 4 u 8) tomamos 64, que es el múltiplo de 4 más cercano a 66 por defecto, y restamos 66 – 64 = 2. Luego:

34566 mod 4 = 2

Cualquier otro número terminado en 66 dará el mismo resto al dividirlo entre 4.
(Las reglas citadas en este aparte son útiles para el cálculo de las potencias de *i* en los números complejos)

VERIFICACIÓN DE LA SOLUCIÓN

Recordemos que el problema es

"¿Cuál es la cifra de la unidades de $17^{1992} + 11^{1992} + 7^{1992}$?"

Solución:

Para 11^{1992} se aplica la regla I; por lo que la cifra final de la potencia es 1.

Para 17^{1992} y 7^{1992}, aplicamos la regla VII.1 en ambos casos y luego se aplica la regla VI.2; por lo que las cifras terminales, en las dos potencias, es 1.

Como las tres cifras terminales de las potencias son iguales a la unidad, su suma es igual a 3.

Conclusión

Las reglas aquí deducidas permiten obtener en forma correcta y rápida las soluciones de "problemas" análogos al que motivó este trabajo. Como en lo sucesivo sólo se trataría de aplicar tales reglas podemos pensar que se acabó ese tipo de problemas y que ahora pasarían a ser considerados como ejercicios para memorizarlas y aplicarlas.

Espero les sea útil esta corta monografía y los invito a resolver ejercicios para memorizar las reglas, no necesariamente en el orden que aquí aparecen. Cada quien podrá ordenarlas según la importancia que les vea y les será más fácil memorizarlas. Aún más, probablemente consigan formas más fáciles de enunciarlas, como también otras reglas que complementen lo aquí expuesto.

Gustavo Yanes Yanes
gustavo_yanes@hotmail.com