GEODÉSICAS-II
Las coordenadas geodésicas

Estudiamos en esta segunda parte de las Geodésicas sus ecuaciones, coordenadas geodésicas y curvas de longitud mínima, como continuación del artículo *GEODÉSICAS-I. La curvatura geodésica*, donde exponemos las ideas básicas que definen el concepto. Se añade al final un pequeño anexo sobre las relaciones básicas entre los vectores tangente, normal, la métrica y los símbolos de Christoffel.

Ecuación de las geodésicas

Las líneas geodésicas son aquellas curvas contenidas en la superficie en las que la curvatura geodésica es nula. Por ello el vector normal $\vec{n}$ a la curva en el triedro de Frenet tiene la misma dirección que el vector $\vec{N}$ normal a la superficie en cada punto. Por consiguiente, se verifica que

$$\vec{n}.\vec{r}_i = 0, \ \ i = 1,2$$

o bien

$$\frac{d\vec{t}}{ds}.\vec{r}_i = 0, \ \ i = 1,2$$

De ser

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_1 \frac{du_1}{ds} + \vec{r}_2 \frac{du_2}{ds} = \vec{r}_1 u_1^{'} + \vec{r}_2 u_2^{'},$$

se tiene que es:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{r}_{11}u'^2_1 + \vec{r}_{22}u'^2_2 + 2\vec{r}_{12}u'_1\, u'_2 + \vec{r}_1 u''_1 + \vec{r}_2 u''_2 = \sum_{j,k} \vec{r}_{jk} u'_j\, u'_k + \vec{r}_h u''_h$$

por lo cual:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{t}}{ds}.\vec{r}_1 &= (\vec{r}_{11}.\vec{r}_1)u'^2_1 + (\vec{r}_{22}.\vec{r}_1)u'^2_2 + 2(\vec{r}_{12}.\vec{r}_1)u'_1\, u'_2 + (\vec{r}_1.\vec{r}_1)u''_1 + (\vec{r}_2.\vec{r}_1)u''_2 = (11,1)u'^2_1 + (22,1)u'^2_2 + \\
&+ 2(12,1)u'_1\, u'_2 + g_{11}u''_1 + g_{12}u''_2 = \Gamma^m_{11} g_{m1} u'^2_1 + \Gamma^m_{22} g_{m1} u'^2_2 + 2\Gamma^m_{12} g_{m1} u'_1\, u'_2 + g_{11}u''_1 + g_{12}u''_2 = \\
&= \left(\Gamma^1_{11} g_{11} + \Gamma^2_{11} g_{21}\right)u'^2_1 + \left(\Gamma^1_{22} g_{11} + \Gamma^2_{22} g_{21}\right)u'^2_2 + 2\left(\Gamma^1_{12} g_{11} + \Gamma^2_{12} g_{21}\right)u'_1\, u'_2 + g_{11}u''_1 + g_{12}u''_2 = \\
&= g_{11}\left[\left(\Gamma^1_{11}u'^2_1 + \Gamma^1_{22}u'^2_2 + 2\Gamma^1_{12}u'_1\, u'_2\right) + u_1^{''}\right] + g_{12}\left[\left(\Gamma^2_{11}u'^2_1 + \Gamma^2_{22}u'^2_2 + \Gamma^2_{12}u'_1\, u'_2\right) + u_2^{''}\right] = 0
\end{aligned}$$

[2.1a]

$$\frac{d\vec{t}}{ds}.\vec{r}_2 = (\vec{r}_{11}.\vec{r}_2)u'^2_1 + (\vec{r}_{22}.\vec{r}_2)u'^2_2 + 2(\vec{r}_{12}.\vec{r}_2)u'_1 u'_2 + (\vec{r}_1.\vec{r}_2)u''_1 + (\vec{r}_2.\vec{r}_2)u''_2 = (11,2)u'^2_1 + (22,2)u'^2_2 +$$
$$+ 2(12,2)u'_1 u'_2 + g_{12}u''_1 + g_{22}u''_2 = \Gamma^m_{11}g_{m2}u'^2_1 + \Gamma^m_{22}g_{m2}u'^2_2 + 2\Gamma^m_{12}g_{m2}u'_1 u'_2 + g_{12}u''_1 + g_{22}u''_2 =$$
$$= (\Gamma^1_{11}g_{12} + \Gamma^2_{11}g_{22})u'^2_1 + (\Gamma^1_{22}g_{12} + \Gamma^2_{22}g_{22})u'^2_2 + 2(\Gamma^1_{12}g_{12} + \Gamma^2_{12}g_{22})u'_1 u'_2 + g_{12}u''_1 + g_{22}u''_2 =$$
$$= g_{12}\left[\left(\Gamma^1_{11}u'^2_1 + \Gamma^1_{22}u'^2_2 + 2\Gamma^1_{12}u'_1 u'_2\right) + u''_1\right] + g_{22}\left[\left(\Gamma^2_{11}u'^2_1 + \Gamma^2_{22}u'^2_2 + \Gamma^2_{12}u'_1 u'_2\right) + u''_2\right] = 0$$

[2.1b]

puesto que los g_{11}, g_{12}, g_{22} son independientes, se tiene, anulando coeficientes:

de [2.1a]:
$$\left(\Gamma^1_{11}u'^2_1 + \Gamma^1_{22}u'^2_2 + 2\Gamma^1_{12}u'_1 u'_2\right) + u''_1 = 0$$
$$\left(\Gamma^2_{11}u'^2_1 + \Gamma^2_{22}u'^2_2 + \Gamma^2_{12}u'_1 u'_2\right) + u''_2 = 0$$

de [2.1b]:
$$\left(\Gamma^1_{11}u'^2_1 + \Gamma^1_{22}u'^2_2 + 2\Gamma^1_{12}u'_1 u'_2\right) + u''_1 = 0$$
$$\left(\Gamma^2_{11}u'^2_1 + \Gamma^2_{22}u'^2_2 + \Gamma^2_{12}u'_1 u'_2\right) + u''_2 = 0$$

En definitiva:

$$\sum_{j,k} \Gamma^m_{jk}u'_j\, u'_k + u''_m = 0, \quad m = 1,2 \qquad [2.1c]$$

(ecuación de las geodésicas)

estas expresiones representan, por simetría de índices, una sola ecuación.

Existencia de geodésicas

A la vista de lo anterior, nos podemos preguntar si existen sobre una superficie cualquiera curvas en las que la curvatura geodésica k_g es nula. ¿En un punto cualquiera P de una superficie regular S existe siempre alguna geodésica? ¿en qué casos?. Veremos a continuación que sí existen siempre estas líneas, mediante el teorema de existencia de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

Teorema 02: La ecuación de las geodésicas puede expresarse como una ecuación diferencial ordinaria de 2º orden de la forma

$$y'' = Ay'^3 + By'^2 + y' + C \qquad [2.2a]$$

Demostración:

Basta hacer un cambio de parámetros en la ecuación de las geodésicas [2.1c]:

$$u'_2 = \frac{du_2}{ds} = \frac{du_2}{du_1}\frac{du_1}{ds} = \dot{u}_2 u'_1,$$
$$u''_2 = \frac{d}{ds}\left(\frac{du_2}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\dot{u}_2 u'_1\right) = \frac{d\dot{u}_2}{ds}u'_1 + \dot{u}_2 u'_1 = \frac{d\dot{u}_2}{du_1}\frac{du_1}{ds}u'_1 + \dot{u}_2 u'_1 = \ddot{u}_2 u'^2_1 + \dot{u}_2 u'_1$$

sustituyendo en [2.1c] para m=2:

$$\Gamma_{11}^{2}u_{1}'^{2}+\Gamma_{22}^{2}\dot{u}_{2}^{2}u_{1}'^{2}+2\Gamma_{12}^{2}\dot{u}_{2}u_{1}'^{2}+\ddot{u}_{2}u_{1}'^{2}+\dot{u}_{2}u_{1}''=0$$

sustituimos ahora u_1'' por su expresión en la ecuación de las geodésicas para m=1:

$$u_{1}'^{2}\left(\Gamma_{11}^{2}+\Gamma_{22}^{2}\dot{u}_{2}^{2}+2\Gamma_{12}^{2}\dot{u}_{2}+\ddot{u}_{2}\right)+\dot{u}_{2}\left(-\Gamma_{11}^{1}u_{1}'^{2}-\Gamma_{22}^{1}u_{2}'^{2}-2\Gamma_{12}^{1}u'_{1}u'_{2}\right)=0$$

de donde resulta, sustituyendo de nuevo $u_2' = \dot{u}_2 u_1'$:

$$u_{1}'^{2}\left(\Gamma_{11}^{2}+\Gamma_{22}^{2}\dot{u}_{2}^{2}+2\Gamma_{12}^{2}\dot{u}_{2}+\ddot{u}_{2}\right)+\dot{u}_{2}\left(-\Gamma_{11}^{1}u_{1}'^{2}-\Gamma_{22}^{1}\dot{u}_{2}^{2}u_{1}'^{2}-2\Gamma_{12}^{1}\dot{u}_{2}u_{1}'^{2}\right)=0$$

y al simplificar, extrayendo el factor común:

$$u_{1}'^{2}\left[-\Gamma_{22}^{1}\dot{u}_{2}^{3}+\left(\Gamma_{22}^{2}-2\Gamma_{12}^{1}\right)\dot{u}_{2}^{2}+\left(2\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{11}^{1}\right)\dot{u}_{2}+\Gamma_{11}^{2}+\ddot{u}_{2}\right]=0$$

y se obtiene finalmente la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden de la forma indicada [2.2a]:

$$\ddot{u}_{2}=\Gamma_{22}^{1}\dot{u}_{2}^{3}+\left(-\Gamma_{22}^{1}+2\Gamma_{12}^{1}\right)\dot{u}_{2}^{2}+\left(-2\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{11}^{1}\right)\dot{u}_{2}-\Gamma_{11}^{2}$$

Corolario: Por cada uno de los puntos de una superficie y en cada dirección pasa una curva geodésica, la cual queda determinada unívocamente mediante un punto de referencia y la tangente correspondiente a su dirección.

Demostración: trivial, por ser la ecuación diferencial [2.2a] de segundo orden y por el teorema de existencia de ecuaciones diferenciales ordinarias de 2º orden.

Ejemplo:

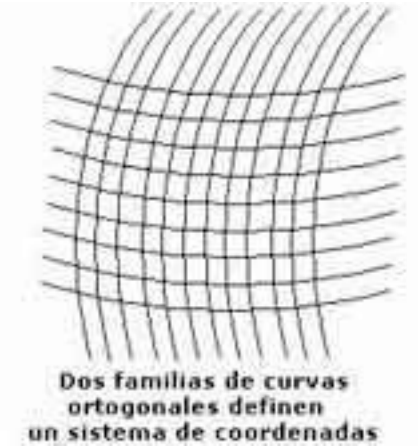
Si se trata de una superficie esférica, por cada punto P y en una dirección dada pueden ser trazadas infinitas curvas contenidas en la superficie, pero de todas esas infinitas curvas, solo una es geodésica: el círculo máximo que pasa por P en la dirección dada, ya que su curvatura es normal a la superficie (el vector de curvatura del círculo máximo tiene la dirección del centro de la esfera).

Si aproximamos el geoide terrestre por una esfera perfecta, las curvas geodésicas son tanto los meridianos (geodésicas que pasan por ambos polos en todas direcciones) como los círculos máximos que se puedan trazar en cualesquiera otros puntos y direcciones. El ecuador terrestre sería, en esta aproximación, una geodésica, pero no los restantes paralelos, cuyo vector de curvatura no estaría dirigido nunca en la dirección del centro de la esfera.

Vemos, además, que en el sistema de coordenadas terrestre, latitud (norte-sur), y longitud (este-oeste), las líneas coordenadas ortogonales a las geodésicas son los paralelos, que usamos para medir la latitud, y los meridianos, curvas geodésicas, para medir la longitud. Es decir, una de las dos familias de curvas coordenadas, en este caso los meridianos, está formada por líneas geodésicas.

Con esta idea, podemos definir sistemas de coordenadas en una superficie S cualquiera, es decir, procurando fijar dos familias de curvas de modo que una de ellas esté formada por geodésicas y la otra por sus curvas ortogonales .

Los sistemas de coordenadas geodésicas

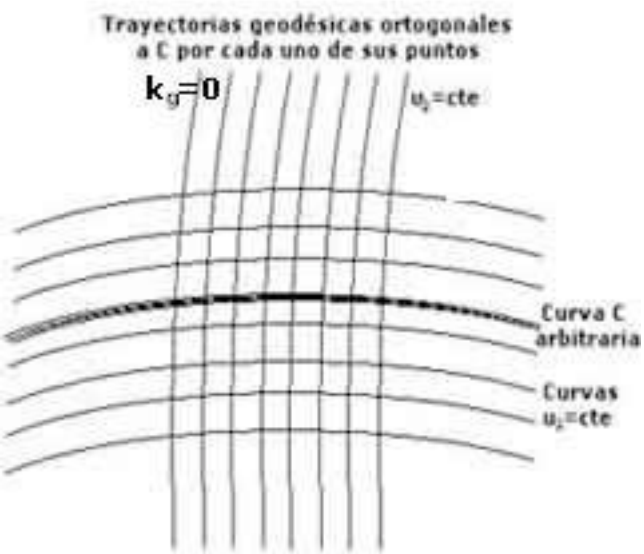


En forma paramétrica, la descripción de los puntos de una superficie puede hacerse mediante dos familias de curvas entre sí ortogonales

El estudio de las geodésicas se simplifica extraordinariamente si elegimos sistemas de coordenadas en los que una de las dos familias entre sí ortogonales son geodésicas.

Un sistema de coordenadas geodésicas para una superficie S está formado por un conjunto de curvas geodésicas (en las que, por ejemplo, u_2=cte) y un conjunto de trayectorias ortogonales a las mismas (en las que u_1=cte).

Construcción de un sistema de coordenadas geodésicas para una superficie S dada:



Dada una curva arbitraria C, geodésica o no, contenida en la superficie S, sabemos que por cada uno de sus puntos y en dirección ortogonal a la misma pasa una geodésica. Por tanto, podemos obtener una familia de curvas geodésicas a partir de la curva C, que llamaremos curvas en las que u_2=cte. A partir de esta familia de geodésicas u_2=cte podemos obtener por todos sus puntos las trayectorias ortogonales, que serán las curvas u_1=cte, una de ellas es la misma curva C.

En el caso particular de que las geodésicas u_2=cte pasen por un mismo punto O se le denominaría *Sistema de coordenadas geodésicas polares,* de polo el punto O.

En el caso de un sistema de coordenadas geodésicas polares, las trayectorias ortogonales a las geodésicas son curvas cerradas que podemos llamar “circunferencias geodésicas” y que, en el caso de una superficie esférica, son realmente circunferencias ordinarias concéntricas.

Un ejemplo clásico de coordenadas geodésicas polares nos lo ofrece la superficie esférica. Eligiendo un punto cualquiera P de la superficie de la esfera, las geodésicas que pasa por tal punto son círculos máximos, mientras que las trayectorias perpendiculares son circunferencias contenidas en la superficie esférica concéntricas en P.

Podemos obtener un ejemplo más cercano imaginando que la superficie de nuestro planeta, el geoide terrestre, es una esfera perfecta. Entonces, todos los círculos máximos que pasan por el polo norte son geodésicas que también pasan por el polo sur, y las trayectorias ortogonales son los círculos paralelos, que no son círculos máximos, salvo el círculo ecuatorial. Este es el sistema de coordenadas geográficas terrestres, en el que los meridianos, geodésicas, sirven para medir la longitud geográfica, y los paralelos, trayectorias ortogonales, miden la latitud.

La longitud de un arco de curva en coordenadas geodésicas

La primera forma fundamental de la teoría de superficies admite una expresión muy sencilla en coordenadas geodésicas, puesto que se elimina el coeficiente g_{12}, ya que es nulo, por ser ortogonales las dos familias de trayectorias, y también se puede eliminar el término g_{11} mediante un cambio sencillo de parámetros, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 03: En un sistema de coordenadas geodésicas, donde la familia de las geodésicas son las curvas en que u_2=constante, la longitud de arco viene dada por

$$ds^2 = du_1^2 + g_{22} du_2^2$$

Demostración:

De ser $ds^2 = g_{11} du_1^2 + 2g_{12} du_1 du_2 + g_{22} du_2^2$, y tratándose de trayectorias perpendi-culares, será $g_{12} = 0$, por lo cual $ds^2 = g_{11} du_1^2 + g_{22} du_2^2$.

Por otra parte, como las trayectorias u_2 = constante son geodésicas, la correspon-diente curvatura geodésica será nula, por lo que, usando la expresión [1.2d]

$$(k_g)_{u_2=ct} = -\frac{1}{2g_{11}\sqrt{g_{22}}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\right)$$

tenemos

$$(k_g)_{u_2=ct} = -\frac{1}{2g_{11}\sqrt{g_{22}}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\right) = 0$$

por lo cual es

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} = 0 \Rightarrow g_{11} \neq g_{11}(u_2) \Rightarrow g_{11} = g_{11}(u_1)$$

o sea, el coeficiente g_{11} solo depende de u_1. Por lo cual, haciendo un cambio de parámetro de la forma

$$u_1^* = \int_0^{u_1} \sqrt{g_{11}}.du_1$$

será:

$$ds^2 = du_1^{*2} + g_{22}^* du_2^2$$

por tanto, podemos asumir en adelante que, en un sistema de coordenadas geodésicas la longitud de arco sobre la superficie puede expresarse por

$$ds^2 = du_1^2 + g_{22}du_2^2$$

donde las curvas geodésicas del sistema de coordenadas corresponden a que u_2=constante.

Teorema 04: En un sistema de coordenadas geodésicas se verifica:

1) Los arcos de todas las geodésicas comprendidos entre dos trayectorias ortogonales dadas tienen la misma longitud.
2) Si se trazan geodésicas normales a una determinada curva C, y se trazan sobre ellas arcos de igual longitud a partir de C, el lugar de los extremos de estos arcos se encuentra en una trayectoria ortogonal a las geodésicas.

Demostración:

1) Sea un sistema de coordenadas geodésicas en el que la familia de las geodésicas sean las curvas u_2=constante. Se tiene entonces para la longitud del arco de geodésica:

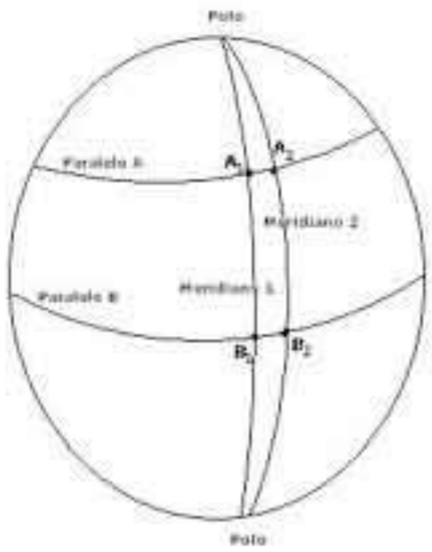
$$ds^2 = du_1^2 + g_{22}.du_2^2 = du_1^2 + 0 = du_1^2$$

O sea, $ds = du_1$, por lo que la longitud del arco de geodésica $a \leq u_1 \leq b$ es:

$$s\Big|_a^b = \int_a^b ds = \int_a^b du_1 = b - a$$

Por lo que, para cualquier trayectoria geodésica u_2=constante, $s\Big|_a^b = b - a$

2) Es obvio, por 1)



En el ejemplo aproximativo del cuerpo del planeta como una esfera perfecta, se cumple, según este teorema, que la distancia entre dos paralelos dados, medida a lo largo de un meridiano cualquiera, es constante.

distancia A_1B_1 = distancia A_2B_2

La métrica y las coordenadas geodésicas

Teorema 05: Dado el sistema de coordenadas geodésicas

$$\begin{cases} u_2 = cte \ \ (geodésicas) \\ u_1 = cte \ \ (tray.\ ortogonales) \end{cases}$$

si tomamos como parámetro u_2 la longitud de arco a lo largo de la curva $u_1=0$, geodésica, se verifica que

$$\sqrt{g_{22}(0,u_2)} = 1$$
$$\left(\frac{\partial\sqrt{g_{22}(u_1,u_2)}}{\partial u_1}\right)_{u_1=0} = 0$$

Demostración:

$$du_2^2 = g_{22}(0,u_2).du_2^2 \rightarrow du_2 = \sqrt{g_{22}(0,u_2)}.du_2 \rightarrow \sqrt{g_{22}(0,u_2)} = 1$$

Si la curva $u_1 = 0$ es geodésica, será $k_g = \dfrac{1}{2g_{22}\sqrt{g_{11}}}\left(\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right) = 0$

Por tanto, es $\left(\dfrac{\partial g_{22}(u_1,u_2)}{\partial u_1}\right)_{u_1=0} = 0$

Teorema 06: Dado el sistema de coordenadas geodésicas polares

$$\begin{cases} u_2 = cte \ \ (geodésicas) \\ u_1 = cte \ \ (tray.\ ortogonales) \end{cases}$$

si tomamos como parámetro u_2 el ángulo que forma cada geodésica con la geodésica $u_2=0$, se verifica

$$\sqrt{g_{22}(0,u_2)} = 0$$
$$\left(\frac{\partial\sqrt{g_{22}(u_1,u_2)}}{\partial u_1}\right)_{u_1=0} = 1$$

Demostración:

Para cada geodésica u_2=constante, la longitud de un arco sobre la misma a partir del polo es $ds=du_1$. Los puntos u_1=constante "equidistan", por tanto, del polo, a lo largo de cada geodésica, por lo que estas trayectorias se pueden llamar "circunferencias geodésicas", y que en el caso particular de una superficie esférica son circunferencias ordinarias.

Si u_2 es el ángulo que forma la geodésica dada con la geodésica $u_2=0$, entonces cuando u_1 tiende a cero, las circunferencias geodésicas tienden a ser circunferencias ordinarias, por lo que el arco s correspondiente al ángulo u_2 tiende a aproximarse al producto del ángulo por el radio: $u_2.u_1$.

$$s \to u_1.u_2 \quad si \quad u_1 \to 0$$

$$s = \int_0^{u_2}\sqrt{g_{22}(0,u_2)}.du_2 \to u_1u_2 \Rightarrow \lim_{u_1\to 0}\frac{\int_0^{u_2}\sqrt{g_{22}(u_1,u_2)}.du_2}{u_1u_2} = 1$$

usando la regla de L´Hôpital para el cálculo del límite:

$$\lim_{u_1\to 0}\frac{\int_0^{u_2}\frac{\partial}{\partial u_1}\sqrt{g_{22}(u_1,u_2)}.du_2}{u_2} = 1$$

o bien

$$\lim_{u_1\to 0}\int_0^{u_2}\frac{\partial}{\partial u_1}\sqrt{g_{22}(u_1,u_2)}.du_2 = u_2$$

ahora bien, para que sea cierto ese resultado, ha de ser $\frac{\partial}{\partial u_1}\sqrt{g_{22}(0,u_2)} = 1$

Los símbolos de Christoffel en coordenadas geodésicas

Supongamos un sistema de coordenadas geodésicas, Sg, formado por dos familias de curvas ortogonales sobre una superficie regular S, u_2= cte (geodésicas) y u_1= cte (trayectorias ortogonales a las geodésicas). Se verifican entonces los dos teoremas siguientes para las expresiones de los símbolos de Christoffel.

Teorema 07:

a) Para los símbolos de Christoffel de primera especie se verifican, las siguientes expresiones

$$(ij,i)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial u_j},\qquad (ii,j)=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_i}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial u_j}$$

b) En coordenadas geodésicas, se tienen los siguientes valores:

$$(11,1)=0\qquad (12,1)=0\qquad (22,1)=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}$$
$$(11,2)=0\quad (12,2)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\quad (22,2)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_2}$$

Demostración:

a) De ser $\vec{r}_i.\vec{r}_i = g_{ii}$, se tiene:

$$\frac{\partial g_{ii}}{\partial u_j}=\frac{\partial}{\partial u_j}(\vec{r}_i.\vec{r}_i)=\vec{r}_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial u_j}+\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial u_j}.\vec{r}_i=2.\vec{r}_i.\vec{r}_{ij}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (ij,i)=\vec{r}_i.\vec{r}_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial u_j}$$

b) De ser $\vec{r}_i.\vec{r}_j = g_{ij}$, se tiene:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_i}=\frac{\partial}{\partial u_i}(\vec{r}_i.\vec{r}_j)=\vec{r}_i\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial u_i}+\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial u_i}.\vec{r}_j=\vec{r}_i.\vec{r}_{ij}+\vec{r}_j.\vec{r}_{ii}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (ij,i)+(ii,j)=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_i}$$

$$(ii,j)=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_i}-(ij,i)=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_i}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial u_j}$$

- Desglosando para valores i,j =1,2:

$$(11,1)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_1}\qquad (12,1)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\qquad (22,1)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{12}}{\partial u_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}$$
$$(11,2)=\frac{\partial g_{12}}{\partial u_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\qquad (12,2)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\qquad (22,2)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_2}$$

- Finalmente, como en coordenadas geodésicas es $g_{12}=0,\ g_{11}=1$, será:

$$(11,1)=0\qquad (12,1)=0\qquad (22,1)=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}$$
$$(11,2)=0\quad (12,2)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\quad (22,2)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_2}$$

Teorema 08:

Para los símbolos de Christoffel de segunda especie se verifican, en coordenadas geodésicas, las siguientes expresiones

$$\Gamma_{11}^{1} = 0 \qquad \Gamma_{11}^{2} = 0 \qquad \Gamma_{12}^{1} = 0$$
$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \quad \Gamma_{22}^{1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \quad \Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_2}$$

Demostración:

Usaremos la definición de símbolos de segunda especie, y los valores obtenidos en el teorema anterior para los símbolos de primera especie.

Por definición $\Gamma_{ij}^{k} = (ij,k).g^{hk}$, donde son $g^{11} = \frac{g_{22}}{g}$, $g^{22} = \frac{g_{11}}{g}$, $g^{12} = -\frac{g_{12}}{g}$ los elementos de la matriz inversa de gramm (matriz (g_{ij})).

Se tiene, entonces:

$$\Gamma_{11}^{1} = (11,1).g^{11} + (11,2).g^{12} = (11,1).\frac{g_{22}}{g} - (11,2).\frac{g_{12}}{g} = 0 - 0 = 0$$
$$\Gamma_{11}^{2} = (11,1).g^{12} + (11,2).g^{22} = -(11,1).\frac{g_{12}}{g} + (11,2).\frac{g_{11}}{g} = -0 + 0 = 0$$
$$\Gamma_{12}^{1} = (12,1).g^{11} + (12,2).g^{12} = (12,1).\frac{g_{22}}{g} - (12,2).\frac{g_{12}}{g} = 0 - 0 = 0$$

$$\Gamma_{12}^{2} = (12,1).g^{12} + (12,2).g^{22} = -(12,1).\frac{g_{12}}{g} + (12,2).\frac{g_{11}}{g} = -0 + (12,2).\frac{g_{11}}{g} = \frac{(12,2)}{g_{22}} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}$$
$$\Gamma_{22}^{1} = (22,1).g^{11} + (22,2).g^{12} = (22,1).\frac{g_{22}}{g} - (22,2).\frac{g_{12}}{g} = (22,1).\frac{g_{22}}{g} - 0 = \frac{(22,1)}{g_{22}} = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}$$
$$\Gamma_{22}^{2} = (22,1).g^{12} + (22,2).g^{22} = -(22,1).\frac{g_{12}}{g} + (22,2).\frac{g_{11}}{g} = 0 + (22,2).\frac{g_{22}}{g} = \frac{(22,2)}{g_{22}} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_2}$$

La curvatura total de Gauss en coordenadas geodésicas

Teorema 09: La curvatura total de Gauss en coordenadas geodésicas viene dada por

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{\partial u_1^2}$$

expresada en un sistema de coordenadas geodésicas en las que las geodésicas son las curvas u_2=cte, y las trayectorias ortogonales son las curvas u_1=cte.

Demostración:

El Teorema Egregium de Gauss, nos permite expresar la curvatura total de Gauss en función de los símbolos de Christoffel de la manera siguiente

$$K = -\frac{1}{g_{11}}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\Gamma_{12}^2 - \frac{\partial}{\partial u_2}\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2\right]$$

se tiene entonces, usando el teorema 08 anterior y haciendo $g_{11}=1$ (por tratarse de coordenadas geodésicas):

$$K = -\frac{1}{1}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right) - 0 + 0 - 0 + \left(\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right)^2 - 0\right]$$

o sea:

$$K = -\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right) + \frac{1}{4g_{22}^2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right)^2\right] = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u_1^2} + \frac{1}{2g_{22}^2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right)^2 - \frac{1}{4g_{22}^2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u_1^2} + \frac{1}{4g_{22}^2}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right)^2 = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\left[\frac{1}{2\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u_1^2} - \frac{1}{4g_{22}\sqrt{g_{22}}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{2\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right) = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial^2\sqrt{g_{22}}}{\partial u_1^2}$$

Las curvas de longitud mínima. Una condición necesaria

En los primeros estudios sobre curvas geodésicas se definía a la curva geodésica como una curva tal que la longitud de arco sobre ella entre dos puntos dados de la misma es mínimo. Sin embargo, esta definición no resulta precisa si tenemos en cuenta que, por ejemplo, en la superficie esférica, dos puntos dividen al circulo máximo que los contiene en dos arcos, y solo uno es el que da la distancia mínima entre ambos puntos sobre la esfera (salvo, claro, que los dos puntos elegidos sean extremos de un mismo diámetro).

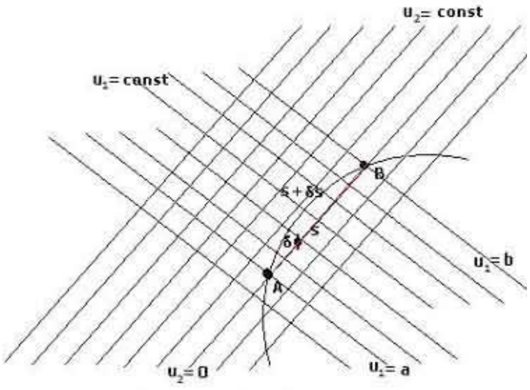
La geodésica, pues, no es equivalente a la curva de longitud mínima. Para serlo tendría que verificarse tanto la condición necesaria (*si la longitud sobre un arco dado entre dos de sus puntos es mínima, entonces la curva que contiene a tal arco es una geodésica),* como la condición suficiente *(si la curva que contiene a dos puntos dados es una geodésica, entonces ello es suficiente para afirmar que la longitud del arco entre ambos puntos, medido sobre ella, es de longitud mínima).*

La condición suficiente no se verifica. Sin embargo, podemos probar un teorema por el cual sí es posible afirmar que si el arco de curva entre dos puntos es de longitud mínima, entonces necesariamente la curva es una geodésica.

Condición necesaria:

Teorema 10: Si el arco de curva contenida en una superficie es de longitud mínima entre dos puntos de la misma, entonces tal arco está contenido en una geodésica.

Demostración:



La longitud de arco mínima s corresponde a una línea geodésica

Consideremos dos familias de curvas ortogonales, u_2=constante y u_1=constante. Consideremos la curva $u_2=0$ y fijemos sobre ella dos puntos A y B, que corresponderán, respectivamente a $u_1=a$ y $u_1=b$, verificándose, por consiguiente, que $u_2(a)=0$, y $u_2(b)=0$.

Llamemos s a la longitud del arco de curva C sobre $u_2=0$, comprendido entre A y B, y consideremos otra curva C' que pase también por los puntos A y B, obtenida desde C mediante una variación infinitesimal $\delta\phi$, que hace que el arco de de curva entre A y B medido sobre C' tenga la longitud $s+\delta s$, cuya ecuación es $u_2=u_2(u_1)$.

Puesto que la diferencial de la longitud de arco en general es $ds^2 = g_{11}(u_1,u_2).du_1^2 + g_{22}(u_1,u_2).du_2^2$, ya que $g_{12}=0$ por ser curvas ortogonales, se tiene:

Arco de curva entre A y B, sobre C: $s = \int_a^b \sqrt{g_{11}(u_1,0)}.du_1$

Arco de curva entre A y B, sobre C': $s+\delta s = \int_a^b \sqrt{g_{11}(u_1,u_2).du_1^2 + g_{22}(u_1,u_2).du_2^2}$

Simplifiquemos esta última expresión:

$$s+\delta s = \int_a^b \sqrt{g_{11}(u_1,u_2) + g_{22}(u_1,u_2).\left(\frac{du_2}{du_1}\right)^2}.du_1 = \int_a^b \left(g_{11}(u_1,u_2) + g_{22}(u_1,u_2).\dot{u}_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.du_1$$

A fin de reducirla a la curva $u_2=0$, y teniendo en cuenta el desarrollo

$$g_{11}(u_1,u_2) = g_{11}(u_1,0) + \delta u_2\left(\frac{\partial g_{11}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\right)_{u_2=0} + \ldots, \text{ y que } \lim_{u_1\to 0} \dot{u}_2(u_1) = 0$$

se tiene:

haciendo $g_{11} = g_{11}(u_1,0)$, y también la aproximación $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$, para $x \to 0$. Resulta:

$$\delta s=\int_a^b\sqrt{g_{11}}\left(1+\frac{\delta u_2}{2g_{11}}\left(\frac{\partial g_{11}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\right)_{u_2=0}\right).du_1-\int_a^b\sqrt{g_{11}}.du_1=$$

$$=\int_a^b\sqrt{g_{11}}\left(1+\frac{\delta u_2}{2g_{11}}\left(\frac{\partial g_{11}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\right)_{u_2=0}-\sqrt{g_{11}}\right).du_1=$$

$$=\int_a^b\left(\sqrt{g_{11}}+\frac{\delta u_2}{2\sqrt{g_{11}}}\left(\frac{\partial g_{11}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\right)_{u_2=0}-\sqrt{g_{11}}\right).du_1=$$

$$=\int_a^b\frac{\delta u_2}{2\sqrt{g_{11}}}\left(\frac{\partial g_{11}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\right)_{u_2=0}du_1$$

si sustituimos ahora $\delta u_2=\dfrac{\delta\phi}{\sqrt{g_{22}}}$ y $du_1=\dfrac{ds}{\sqrt{g_{11}}}$:

$$\delta s=\int_a^b\frac{1}{2g_{11}\sqrt{g_{22}}}\left(\frac{\partial g_{11}(u_1,u_2)}{\partial u_2}\right)_{u_2=0}\delta\phi.ds=\int_a^b\left(K_g\right)_{u_2=0}\delta\phi.ds$$

Si s es mínima, entonces $\delta s=0$: $\delta s=\int_a^b\left(K_g\right)_{u_2=0}\delta\phi.ds=0$, es decir: $(K_g)_{u_2=0}=0$, lo que indica que la longitud s mínima corresponde a una curva con curvatura geodésica nula, esto es, a una línea geodésica.

En definitiva, si el arco de curva entre dos puntos es de longitud mínima, entonces la curva que lo contiene es un geodésica.

Las geodésicas como curvas autoparalelas

Sea la superficie S de ecuación vectorial $\vec{r}=\vec{r}(u_1,u_2)$, esto es:

$$\begin{cases}x=x(u_1,u_2)\\y=y(u_1,u_2)\\z=z(u_1,u_2)\end{cases}$$

y sea la curva C contenida en S cuyo vector tangente en cada punto viene dado por

$$\vec{t}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{r}_1.\frac{du_1}{ds}+\vec{r}_2.\frac{du_2}{ds}=\vec{r}_1.u_1^{'}+\vec{r}_2.u_2^{'}$$

donde es s la longitud de arco a lo largo de la curva C.

Consideremos un vector cualquiera $\vec{v}(s)$ perteneciente al plano tangente a la curva en cada punto, es decir, que se pueda expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$. O sea:

$$\vec{v}(s)=\vec{r}_1.v_1(s)+\vec{r}_2.v_2(s)$$

$v_1(s)$ y $v_2(s)$ son, por consiguiente, las componentes del vector con respecto a $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$.

Definición: Se llama derivada covariante del vector $\vec{v}(s)$ a lo largo de la curva C, a la expresiones

$$\frac{Dv_i(s)}{Ds} = \frac{dv_i(s)}{ds} + \sum_{jh} \Gamma^i_{jh} v_j(s).u'_h \qquad i = 1,2$$

Definición: Se dice que $\vec{v}(s)$ se transporta paralelamente a sí mismo, a lo largo de la curva C, si la derivada covariante de $\vec{v}(s)$ a lo largo de C es nula:

$$\frac{Dv_i(s)}{Ds} = \frac{dv_i(s)}{ds} + \sum_{jh} \Gamma^i_{jh} v_j(s).u'_h = 0 \qquad i = 1,2$$

Definición: Una curva C contenida en una superficie S se dice que es autoparalela si es su propio vector tangente el que se transporta paralelamente a sí mismo a lo largo de C.

Teorema 11: Las curvas autoparalelas de una superficie S son sus geodésicas.

Demostración: Es inmediato, si tenemos en cuenta que el vector tangente es $\vec{t} = \vec{r}_1.u'_1 + \vec{r}_2.u'_2$, por lo que sus componentes respecto a $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son $u'_1(s)$ y $u'_2(s)$, lo que nos indica que la derivada covariante del vector tangente viene dada por las ecuaciones:

$$\frac{Du'_i}{Ds} = \frac{du'_i}{ds} + \sum_{jh} \Gamma^i_{jh} u'_j u'_h \qquad i = 1,2$$

Si la curva es autoparalela será $\frac{Du'_i}{Ds} = 0 \quad i = 1,2$, o bien:

$$\frac{du'_i}{ds} + \sum_{jh} \Gamma^i_{jh} u'_j u'_h = 0 \qquad i = 1,2$$

que es la ecuación de las geodésicas.

Bibliografía

ABELLANAS, P., (1961). Geometría Básica, Editorial Romo, Madrid
ABISMAN, I.: A first course in differential geometry. Marcel Dekker, 1984
CHOQUET-BRUHAT, Y. (1968). Geometrie Differentielle et systemes exterieurs. Dunod, Paris
DO CARMO, M.P., Geometría Diferencial de Curvas y Superficies. Alianza Universidad, Madrid, 1990
FEDENKO, A.S.: Problemas de Geometría Diferencial. Ed. Mir, Moscú. 1981
HICKS, N.J.: Notas sobre Geometría Diferencial. Ed. Hispano Europea, 1974
HSIUNG, C.C. (1981). A first course in differential geometry. John Wiley.
KLINGENBERG, W., Curso de Geometría diferencial, Alambra, 1978
LELONG-FERRAND, J. (1963), Geometrie Differentielle. Masson and Cie., Paris.
LIPSCHUTZ, L.M., Theory and problems of differential geometry. McGraw-Hill, 1969
MILLMAN, R.S. , Parker, G.D. (1977). Elements of differential geometry. Prentice Hall,
MONTESDEOCA, A.: Apuntes de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies. Col. Textos Universitarios, 1996
MONTIEL, S.; Ros, A.: Curvas y Superficies. 1996
O'NEILL, B.: Elementos de Geometría Diferencial. Limusa-Wiley, 1972
STOKER, J.J., Differential Geometry, Wiley Interscience, 1981
STRUICK, D.J. (1961) Geometría diferencial clásica. Aguilar Ediciones, Madrid

ANEXO: UNAS RELACIONES BÁSICAS ENTRE LOS VECTORES TANGENTE, NORMAL, LA MÉTRICA Y LOS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

Se verifican algunas relaciones que nos permiten demostrar las propiedades y relaciones básicas de la curvatura geodésica y las ecuaciones de las líneas contenidas en la superficie que presenten estas características.

A1. Se verifica que $(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2).\vec{N} = \sqrt{g}$, siendo $\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}, i = 1,2,$ $\vec{N}$ es el vector unitario normal a la superficie en el punto dado, y *g* es el determinante de la matriz que definen los coeficientes de la primera forma fundamental $(g = g_{11}.g_{22} - g_{12}^2)$.

Demostración:

$$\vec{N}^2 = \left(\frac{\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}|}\right)^2 = \frac{(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)^2}{|\vec{r}_1|^2 |\vec{r}_2|^2 sen^2\theta} = \frac{(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)^2}{|\vec{r}_1|^2 |\vec{r}_2|^2 (1-\cos^2\theta)} = \frac{(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)^2}{|\vec{r}_1|^2 |\vec{r}_2|^2 - |\vec{r}_1|^2 |\vec{r}_2|^2 \cos^2\theta} =$$

$$= \frac{(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)^2}{g} \to \vec{N} = \frac{(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)}{\sqrt{g}}$$

$$(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2).\vec{N} = (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)\frac{(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)}{\sqrt{g}} = \frac{|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2|^2}{\sqrt{g}} = \frac{|\vec{r}_1|^2 |\vec{r}_2|^2 sen^2\theta}{\sqrt{g}} = \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{\sqrt{g}} = \frac{g}{\sqrt{g}} = \sqrt{g}$$

[A1.1]

A.2. Se verifican las relaciones

$$\Gamma_{ij}^1 = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} (ij,1) & g_{12} \\ (ij,2) & g_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Gamma_{ij}^2 = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} g_{11} & (ij,1) \\ g_{21} & (ij,2) \end{vmatrix}$$

donde son $(ij,k), \Gamma_{ij}^m, \ i,j,k,m = 1,2$ los símbolos de Christoffel de 1ª y 2ª especie, respectivamente.

Demostración:

De la definición de los símbolos de Christoffel: $(ij,k) = \Gamma_{ij}^h .g_{hh} \to \Gamma_{ij}^h = (ij,k).g^{hk}$
o sea:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^1 &= (ij,1)g^{11} + (ij,2)g^{21} \\ \Gamma_{ij}^2 &= (ij,1)g^{12} + (ij,2)g^{22} \end{aligned}$$

La inversa de la matriz métrica:

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \to \begin{cases} g^{11} = \dfrac{g_{22}}{g} \\ g^{12} = -\dfrac{g_{12}}{g} \\ g^{22} = \dfrac{g_{11}}{g} \end{cases}$$

por lo cual:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^1 &= \frac{1}{g}\left[(ij,1)g_{22} - (ij,2)g_{12}\right] = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} (ij,1) & g_{12} \\ (ij,2) & g_{22} \end{vmatrix} \\ \Gamma_{ij}^2 &= \frac{1}{g}\left[-(ij,1)g_{12} + (ij,2)g_{11}\right] = \frac{1}{g}\begin{vmatrix} g_{11} & (ij,1) \\ g_{12} & (ij,2) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

A.3. Siendo $\vec{r}_i = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, i = 1,2, \quad \vec{r}_{ik} = \dfrac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u_i \partial u_k}, i,k = 1,2$, se cumple $\vec{r}_{ij}.\vec{r}_k = (ij,k)$

Demostración:

De las Ecuaciones de Gauss:

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^{1}\vec{r}_1 + \Gamma_{ij}^{2}\vec{r}_2 + l_{ij}\vec{N}$$

(l_{ij}: coeficientes de la segunda forma fundamental)

multiplicamos escalarmente por $\vec{r}_1$ y por $\vec{r}_2$,con lo cual se tiene que, habida cuenta de que $\vec{r}_i.\vec{N} = 0, i = 1,2$:

$$\vec{r}_{ij}.\vec{r}_1 = \Gamma_{ij}^{1}g_{11} + \Gamma_{ij}^{2}g_{12}$$
$$\vec{r}_{ij}.\vec{r}_2 = \Gamma_{ij}^{1}g_{12} + \Gamma_{ij}^{2}g_{22}$$

o sea

$$\vec{r}_{ij}.\vec{r}_k = \Gamma_{ij}^{h}g_{kh} = (ij,k)$$

A.4. Se verifica que $\left(\vec{r}_i \wedge \vec{r}_{jk}\right).\vec{N} = (-1)^h.\sqrt{g}.\Gamma_{jk}^{h}, \quad i,j,k,h = 1,2$ de modo que sea $h = \begin{cases} 1, & si\ i = 2 \\ 2, & si\ i = 1 \end{cases}$, y $\vec{r}_i = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, i = 1,2, \quad \vec{r}_{ik} = \dfrac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u_i \partial u_k}, i,k = 1,2$ y $\Gamma_{ij}^{m},\ i,j,m = 1,2$ son los símbolos de Christoffel de 2ª especie.

.

Demostración:

Teniendo en cuenta que se verifica la igualdad vectorial

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)\left(\vec{c} \wedge \vec{d}\right) = \left(\vec{a}.\vec{c}\right)\left(\vec{b}.\vec{d}\right) - \left(\vec{b}.\vec{c}\right)\left(\vec{a}.\vec{d}\right)$$

se tiene

$$\left(\vec{r}_i \wedge \vec{r}_{jk}\right).\vec{N} = \left(\vec{r}_i \wedge \vec{r}_{jk}\right).\frac{\left(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2\right)}{\sqrt{g}} = \frac{\left(\vec{r}_i.\vec{r}_1\right)\left(\vec{r}_{jk}.\vec{r}_2\right) - \left(\vec{r}_{jk}.\vec{r}_1\right)\left(\vec{r}_i \wedge \vec{r}_2\right)}{\sqrt{g}}$$

y siendo, por el párrafo anterior

$$\begin{cases} \vec{r}_{jk}.\vec{r}_1 = (ij,1) \\ \vec{r}_{jk}.\vec{r}_2 = (ij,2) \end{cases}$$

será

$$\left(\vec{r}_i \wedge r_{jk}\right).\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(g_{i1}(jk,2) - g_{i2}(jk,1)\right) = \sqrt{g}.\frac{-1}{g}\begin{vmatrix} (jk,1) & g_{i1} \\ (jk,2) & g_{i2} \end{vmatrix}$$

si i=1, $\left(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_{jk}\right).\vec{N} = \sqrt{g}.\dfrac{1}{g}\begin{vmatrix} g_{i1} & (jk,1) \\ g_{i2} & (jk,2) \end{vmatrix} = .\sqrt{g}.\Gamma_{jk}^{2}$

si i=2, $\left(\vec{r}_2 \wedge \vec{r}_{jk}\right).\vec{N} = \sqrt{g}.\dfrac{-1}{g}\begin{vmatrix} (jk,1) & g_{21} \\ (jk,2) & g_{22} \end{vmatrix} = \sqrt{g}.\Gamma_{jk}^{1}$

En definitiva:

$$\left(\vec{r}_i \wedge \vec{r}_{jk}\right).\vec{N} = (-1)^h.\sqrt{g}.\Gamma_{jk}^{h}, \quad i,j,k,h = 1,2$$

$$h = \begin{cases} 1, & si\ i = 2 \\ 2, & si\ i = 1 \end{cases}$$

A.5. Si las líneas principales de curvatura son ortogonales, esto es, si $g_{12}=0$, se cumplen las siguientes relaciones:

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{-1}{2g_{22}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\right)$$
$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{-1}{2g_{11}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right)$$

Demostración:

De la definición de los símbolos Christoffel, $(ij,k) = \Gamma_{ij}^{h}.g_{kh} \rightarrow \Gamma_{ij}^{h} = (ij,k).g^{hk}$, se tiene:

$$\Gamma_{11}^{2} = (11,1)g^{21} + (11,2)g^{22} = (11,1)\frac{-g_{12}}{g} + (11,2)\frac{g_{11}}{g} = \frac{(11,2)}{g_{22}}$$
$$\Gamma_{22}^{1} = (22,1)g^{11} + (22,1)g^{12} = (22,1)\frac{g_{22}}{g} + (22,1)\frac{-g_{12}}{g} = \frac{(22,1)}{g_{11}}$$

Por otra parte, de ser:

$$(ij,k) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right)$$

$$(11,2) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\right)$$
$$(22,1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right)$$

por tanto:

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{-1}{2g_{22}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\right)$$
$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{-1}{2g_{11}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right) \qquad [A5.1]$$