GEODÉSICAS-I
La curvatura geodésica

Mostramos en este artículo la idea de curvatura geodésica, de su carácter de invariante por flexiones y asimismo la curvatura geodésica de las líneas paramétricas, dejando para una próxima segunda parte el estudio de las ecuaciones, de las coordenadas geodésicas y el carácter de curvas de longitud mínima.

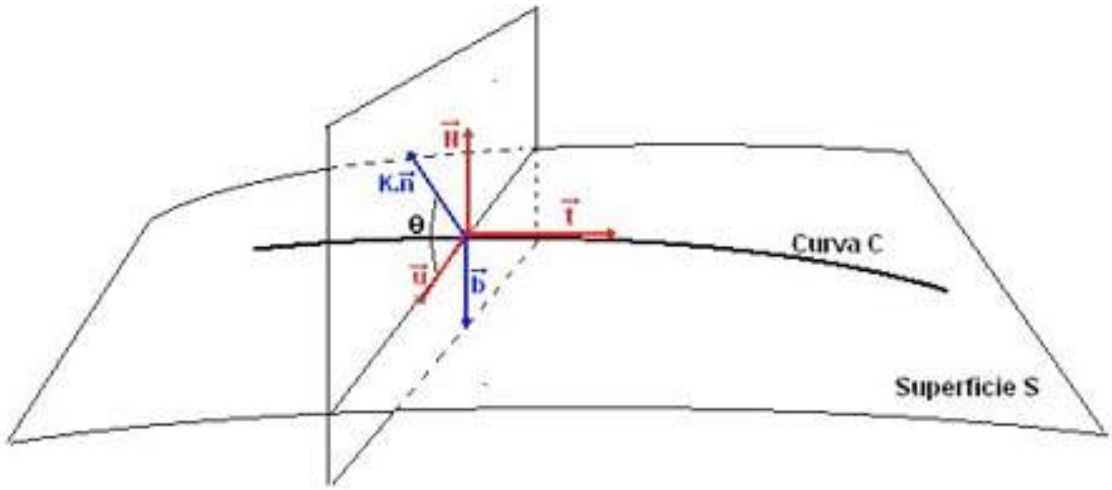
Curvatura, curvatura normal, curvatura geodésica

Analizando la curvatura que presenta una curva cualquiera contenida en una superficie dada, encontramos que existen casos de curvas en las que el vector de curvatura tiene dirección normal a la superficie que la contiene. Los tres vectores del triedro de Frenet de una curva en un punto dado P de la misma, son, el vector unitario tangente, $\vec{t}$, que también es tangente a la superficie que contiene a la curva en dicho punto, el vector de curvatura $\vec{k} = K.\vec{n}$, perpendicular al anterior y cuyo módulo *K* es lo que llamamos curvatura, y el vector unitario binormal $\vec{b}$, perpendicular a ambos.

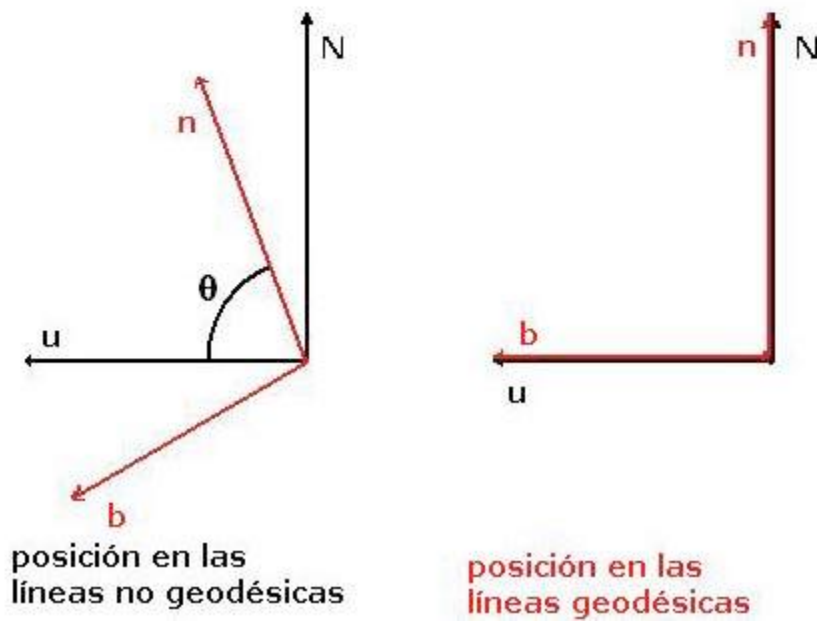
Si la curva está contenida en una superficie S, sabemos que en cada punto P, de vector tangente a la curva $\vec{t}$, podemos considerar también el triedro natural formado por $\vec{t}$ y por los vectores normal $\vec{N}$ a la superficie en P y binormal $\vec{u}$ (normal a $\vec{t}$ y a $\vec{N}$).

En cada punto P de la curva C con vector tangente $\vec{t}$ y contenida en S hay, pues, dos triedros en los que coincide el vector tangente $\vec{t}$. Uno es el triedro de Frenet formado por $\vec{t}$, el vector unitario $\vec{n}$ de dirección de la curvatura de C y el vector $\vec{b}$ perpendicular a ambos, y el otro triedro es el triedro natural formado también por $\vec{t}$, y ahora por los vectores normales $\vec{N}$ a la superficie en P y $\vec{u}$ perpendicular a ambos. Obviamente, el plano perpendicular al vector tangente común $\vec{t}$ contiene siempre a los otros dos vectores de cada triedro ($\vec{n}$ y $\vec{b}$ del triedro de Frenet, y $\vec{N}$ y $\vec{u}$ del triedro natural).

Cuando los vectores de ambos triedros, triedro natural y triedro de Frenet, coinciden, es decir cuando la curvatura de la curva C tiene la misma dirección $\vec{n}$ que la curvatura normal, de dirección $\vec{N}$, a la superficie S que la contiene, es cuando decimos que la curva C es geodésica, o que se trata de una línea geodésica en la superficie S.



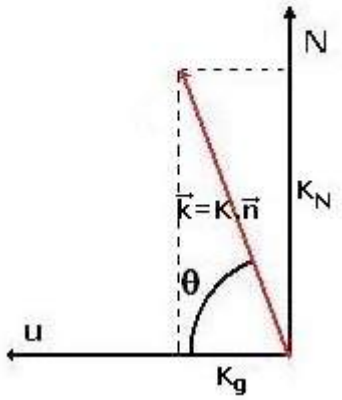
Si consideramos el plano perpendicular al vector tangente $\vec{t}$, se tiene la siguiente figura en donde se visualiza la posición relativa de los otros dos vectores unitarios en el caso de líneas no geodésicas y en el caso de líneas geodésicas en la superficie S:



En el caso general de líneas no geodésicas los vectores unitarios de dirección de las curvaturas, $\vec{n}$ (curva) y $\vec{N}$ (normal respecto a la superficie) forman un cierto ángulo no nulo. En la figura se ha representado el complementario θ, esto es, el ángulo que forman los vectores $\vec{n}$ y $\vec{u}$.

Para estudiar las líneas geodésicas y sus propiedades hemos de tener en cuenta algunas relaciones matemáticas entre los vectores tangentes, normal, la métrica y los símbolos de Christoffel, lo cual permitirá probar fácilmente las propiedades básicas y obtener las ecuaciones de las líneas geodésicas. Estas relaciones matemáticas previas las mostramos en el Anexo, páginas 23-25 de este trabajo.

Si en cada punto P descomponemos el vector de curvatura de la curva C, contenida en S, en las direcciones $\vec{N}$ (normal a la superficie) y $\vec{u}$ (binormal del triedro natural), se tienen las componentes K_n y k_g respectivamente.



En definitiva, se tiene:

- Vector curvatura de C en cada punto P: $\vec{k} = K.\vec{n} = \dfrac{d\vec{t}}{ds}$

Las proyecciones ortogonales del módulo K de este vector sobre la dirección normal $\vec{N}$ a la superficie y sobre el vector $\vec{u}$ binormal a $\vec{N}$ y a $\vec{t}$ son:

$$K_N = K.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \vec{N}.\vec{k} = \vec{N}.\frac{d\vec{t}}{ds}$$
$$K_g = K.\cos\theta = \vec{u}.\vec{k} = \vec{u}.\frac{d\vec{t}}{ds}$$

- Vector curvatura normal de C respecto a la superficie S: $\vec{k}_n = K_n.\vec{N}$

Así, pues, se denomina vector de **curvatura normal** de una curva C en un punto P, con respecto a la superficie S que la contiene, a la componente normal respecto del triedro natural en dicha superficie, o, dicho de otro modo, a la proyección ortogonal sobre el vector normal N, de la curvatura de C en dicho punto:

Vector de Curvatura normal: $\vec{k}_n = K_n.\vec{N}$

El módulo de este vector es $K_N = \vec{N}.\vec{k} = \vec{N}.\dfrac{d\vec{t}}{ds} = K.sen\theta$

- Vector curvatura geodésica de C en la dirección binormal respecto a la superficie S: $\vec{k}_g = K_g.\vec{u}$

Así, pues, se denomina vector de **curvatura geodésica** de una curva C en un punto P, con respecto a la superficie S que la contiene, a la componente binormal respecto del triedro natural en dicha superficie, o, dicho de otro modo, a la proyección ortogonal sobre el vector binormal u, de la curvatura de C en dicho punto:

Vector de Curvatura geodésica: $\vec{k}_g = K_g.\vec{u}$

El módulo de este vector es :

$$K_g = \vec{u}.\vec{k} = \vec{u}.\frac{d\vec{t}}{ds} = K.\cos\theta$$

Teorema 01: La curvatura geodésica es un invariante por flexiones (isométrico), es decir, depende únicamente de los coeficientes de la primera forma fundamental y de sus derivadas.

Demostración:

$$k_g = \vec{k}.\vec{u} = \vec{t}\,'.\vec{u} = \vec{t}\,'.(\vec{N} \wedge \vec{t}) = \left[\vec{t}, \vec{t}\,', \vec{N}\right], \quad (\vec{t}\,' = \frac{d\vec{t}}{ds}, \; s \text{ parámetro longitud de arco})$$

siendo:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\frac{du_1}{ds} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\frac{du_2}{ds} = \vec{r}_1.u_1^{'} + \vec{r}_2.u_2^{'}$$

$$\vec{t}\,' = \frac{d}{ds}\left(\vec{r}_1.u_1^{'} + \vec{r}_2.u_2^{'}\right) = \left(\vec{r}_{11}u_1^{'} + \vec{r}_{12}u_2^{'}\right)u_1^{'} + \vec{r}_1 u_1^{''} + \left(\vec{r}_{21}u_1^{'} + \vec{r}_{22}u_2^{'}\right)u_1^{'} + \vec{r}_2 u_2^{''} =$$
$$= \vec{r}_{11}u'^2_1 + 2\vec{r}_{12}u_1^{'}u_2^{'} + \vec{r}_{22}u'^2_2 + \vec{r}_1 u_1^{''} + \vec{r}_2 u_2^{''}$$

Entonces:

$$k_g = \left[\vec{t}, \vec{t}\,', \vec{N}\right] = \left(\vec{t} \wedge \vec{t}\,'\right)\vec{N} = \begin{bmatrix} (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_{11}).u'^3_1 + (\vec{r}_2 \wedge \vec{r}_{22}).u'^3_2 + (2\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_{12} + \vec{r}_2 \wedge \vec{r}_{11}).u'^2_1.u'_2 + \\ + (2\vec{r}_2 \wedge \vec{r}_{12} + \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_{22}).u'^2_1.u'_2 + (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)(u_1^{'}u_2^{''} - u_2^{'}u_1^{''}) \end{bmatrix}.\vec{N} =$$
$$= (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_{11}).\vec{N}.u'^3_1 + (\vec{r}_2 \wedge \vec{r}_{22}).\vec{N}.u'^3_2 + (2\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_{12} + \vec{r}_2 \wedge \vec{r}_{11}).\vec{N}.u'^2_1.u'_2 +$$
$$+ (2\vec{r}_2 \wedge \vec{r}_{12} + \vec{r}_1 \wedge \vec{r}_{22})\vec{N}.u'^2_1.u'_2 + (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)\vec{N}(u_1^{'}u_2^{''} - u_2^{'}u_1^{''})$$

Sustituyendo la relaciones [A.1], [A.2] y [A.3] del Anexo, introducimos los símbolos de Christoffel de 2ª especie:

$$k_g = \sqrt{g}.\Gamma^2_{11}.u'^3_1 - \sqrt{g}\Gamma^1_{22}.u'^3_2 + (2\sqrt{g}\Gamma^2_{12}{}' - \sqrt{g}\Gamma^1_{11}).u'^2_1.u'_2 + (-2\sqrt{g}\Gamma^1_{12} + \sqrt{g}\Gamma^2_{22}).u'^2_1\,u'_2 +$$
$$+ \sqrt{g}(u'_1\,u_2^{''} - u'_2\,u_1^{''}) =$$
$$= \left[\Gamma^2_{11}.u'^3_1 - \Gamma^1_{22}.u'^3_2 + (2\Gamma^2_{12}{}' - \Gamma^1_{11}).u'^2_1.u'_2 + (-2\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22}).u'^2_1\,u'_2 + (u'_1\,u_2^{''} - u'_2\,u_1^{''})\right]\sqrt{g}$$

$$k_g = \sqrt{g}\left[\Gamma^2_{11}.u'^3_1 - \Gamma^1_{22}.u'^3_2 + (2\Gamma^2_{12}{}' - \Gamma^1_{11}).u'^2_1.u'_2 + (-2\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22}).u'^2_1\,u'_2 + (u'_1\,u_2^{''} - u'_2\,u_1^{''})\right]$$

[1.1]

Curvatura geodésica de las líneas paramétricas

Vamos a determinar la curvatura geodésica de aquellas líneas contenidas en la superficie S, en las que $u_1 = cte$ y en las que $u_2 = cte$.

Sabemos que el cuadrado de la diferencial de la longitud de arco viene dado por $ds^2 = d\vec{r}.d\vec{r} \rightarrow \frac{d\vec{r}}{ds}.\frac{d\vec{r}}{ds} = 1 \rightarrow \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2 = 1$, y llamando $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_1.\frac{du_1}{ds} + \vec{r}_2.\frac{du_2}{ds} = \vec{r}_1 u'_1 + \vec{r}_2 u'_2$

Se tendrá entonces que

$$1 = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2 = \vec{r}_1\vec{r}_1 u'^2_1 + \vec{r}_2\vec{r}_2 u'^2_2 + 2\vec{r}_1\vec{r}_2.u'_1\, u'_2 = g_{11}u'^2_1 + g_{22}u'^2_2 + g_{12}.u'_1\, u'_2 \qquad [1.2a]$$

para $u'_1 = 0$: $1 = g_{22}.u'^2_2 \rightarrow u'_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}$, y para $u'_2 = 0$: $1 = g_{11}.u'^2_1 \rightarrow u'_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}$

Veamos la curvatura geodésica de las curvas en las que es $u_1 = cte$ y en las que $u_2 = cte$

- Curvatura geodésica de la curva paramétrica $u_1 = cte$:

De la relación [1.1], se tiene, para $u_1' = 0$:

$$(k_g)_{u_1=ct} = -\Gamma^1_{22}\sqrt{g}.u'^3_2 = -\Gamma^1_{22}\sqrt{g}.\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\right)^3 = -\Gamma^1_{22}\frac{\sqrt{g}}{g_{22}\sqrt{g_{22}}}$$

- Curvatura geodésica de la curva paramétrica $u_2 = cte$:

De la relación [1.1], se tiene, para $u_2' = 0$:

$$(k_g)_{u_2=ct} = \Gamma^1_{11}\sqrt{g}.u'^3_1 = \Gamma^2_{11}\sqrt{g}.\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\right)^3 = \Gamma^2_{11}\frac{\sqrt{g}}{g_{11}\sqrt{g_{11}}}$$

Curvatura geodésica de líneas paramétricas ortogonales:

En este caso los vectores de dirección de ambas líneas, $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son ortogonales, por lo que es es $g_{12} = \vec{r}_1.\vec{r}_2 = 0$, por lo cual:

$$(k_g)_{u_1=ct} = -\Gamma^1_{22}\frac{\sqrt{g}}{g_{22}\sqrt{g_{22}}} = -\Gamma^1_{22}\frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{g_{22}\sqrt{g_{22}}} = -\Gamma^1_{22}\frac{\sqrt{g_{11}}}{g_{22}} \qquad [1.2b]$$

$$(k_g)_{u_2=ct} = \Gamma_{11}^2 \frac{\sqrt{g}}{g_{11}\sqrt{g_{11}}} = \Gamma_{11}^2 \frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{g_{11}\sqrt{g_{11}}} = \Gamma_{11}^2 \frac{\sqrt{g_{22}}}{g_{11}} \qquad [1.2c]$$

teniendo en cuenta las expresiones [A.5] del Anexo (páginas 24 y 25), introducimos la métrica en sustitución del símbolo de Christoffel:

$$(k_g)_{u_1=ct} = -\Gamma_{22}^1 \frac{\sqrt{g_{11}}}{g_{22}} = -\left[-\frac{1}{2g_{11}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right)\right]\frac{\sqrt{g_{11}}}{g_{22}} = \frac{1}{2g_{22}\sqrt{g_{11}}}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left(\frac{\partial(Ln\sqrt{g_{22}})}{\partial u_1}\right)$$

$$(k_g)_{u_2=ct} = \Gamma_{11}^2 \frac{\sqrt{g_{22}}}{g_{11}} = \left[-\frac{1}{2g_{22}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\right)\right]\frac{\sqrt{g_{22}}}{g_{11}} = -\frac{1}{2g_{11}\sqrt{g_{22}}}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\left(\frac{\partial(Ln\sqrt{g_{11}})}{\partial u_2}\right) \qquad [1.2d]$$

Si llamamos s_1 y s_2 a la longitud de arco tomado a lo largo de las curvas paramétricas ($u_2 = cte$ y $u_1 = cte$, respectivamente):

$$\begin{matrix} ds_1^2 = g_{11}du_1^2 \\ ds_2^2 = g_{22}du_2^2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} ds_1 = \sqrt{g_{11}}du_1 \\ ds_2 = \sqrt{g_{22}}du_2 \end{matrix}$$

, y al sustituir, se obtiene finalmente:

$$(k_g)_{u_1=ct} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left(\frac{\partial(Ln\sqrt{g_{22}})}{\partial u_1}\right) = \left(\frac{\partial(Ln\sqrt{g_{22}})}{\partial s_1}\right)$$

$$(k_g)_{u_2=ct} = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\left(\frac{\partial(Ln\sqrt{g_{11}})}{\partial u_2}\right) = -\left(\frac{\partial(Ln\sqrt{g_{11}})}{\partial s_2}\right) \qquad [1.2e]$$

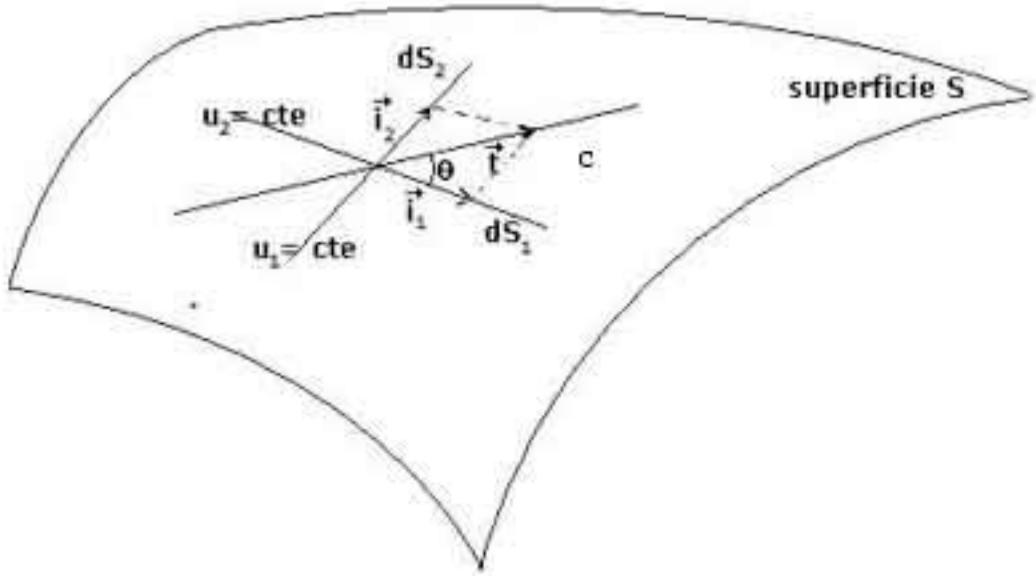
que es la fórmula que nos permite calcular la curvatura geodésica de las líneas paramétricas cuando éstas son ortogonales.

Cálculo de la curvatura geodésica de una curva C a partir de la curvatura geodésica de las líneas paramétricas ortogonales:

Sean $\vec{i}_1\ y\ \vec{i}_2$ los vectores unitarios tangentes a ambas líneas de curvatura perpendiculares, u_2=cte y u_1=cte, respectivamente.

$$\vec{i}_1 = \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} \qquad \vec{i}_2 = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}$$

siendo, pues: $\vec{i}_1.\vec{i}_2 = 0, \quad \vec{i}_1.\frac{d\vec{i}_1}{ds} = 0, \quad \vec{i}_2.\frac{d\vec{i}_2}{ds} = 0$



y las curvaturas geodésicas son:

- De la curva C: $k_g = \vec{u}.\frac{d\vec{t}}{ds}$ (s: parámetro longitud de arco a lo largo de la curva C)
- De las líneas de curvatura ortogonales:

$$\left(k_g\right)_{u_2=cte} = -\vec{i}_2.\frac{d\vec{i}_1}{ds_1}$$
$$\left(k_g\right)_{u_1=cte} = \vec{i}_1.\frac{d\vec{i}_2}{ds_2}$$

(s_1, s_2: parámetro longitud de arco a lo largo de la curva u_2=cte y u_1=cte, respectivamente)

Para relacionar estas curvaturas geodésicas veamos la relación entre los vectores tangentes $\vec{i}_1 \ y \ \vec{i}_2$ a las líneas de curvatura y el vector $\vec{t}$ tangente a la curva C y el vector binormal $\vec{u}$ del triedro natural:

$$\vec{t} = \cos\theta.\vec{i}_1 + sen\theta.\vec{i}_2$$
$$\vec{u} = sen\theta.\vec{i}_1 - \cos\theta.\vec{i}_2$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \cos\theta.\frac{d\vec{i}_1}{ds} - sen\theta.\frac{d\theta}{ds}.\vec{i}_1 + sen\theta.\frac{d\vec{i}_2}{ds} + \cos\theta.\frac{d\theta}{ds}\vec{i}_2 = \cos\theta.\frac{d\vec{i}_1}{ds} + sen\theta.\frac{d\vec{i}_2}{ds} - \\ -\left(sen\theta.\vec{i}_1 - \cos\theta.\vec{i}_2\right)\frac{d\theta}{ds} = \cos\theta.\frac{d\vec{i}_1}{ds} + sen\theta.\frac{d\vec{i}_2}{ds} - \vec{u}.\frac{d\theta}{ds} \quad [1.3a]$$

calculando por separado las derivadas:

$$\frac{d\vec{i}_1}{ds} = \frac{d\vec{i}_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} + \frac{d\vec{i}_1}{ds_2}\frac{ds_2}{ds} = \frac{d\vec{i}_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \frac{d\vec{i}_1}{ds_1}\cos\theta$$

$$\frac{d\vec{i}_2}{ds} = \frac{d\vec{i}_2}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} + \frac{d\vec{i}_2}{ds_2}\frac{ds_2}{ds} = \frac{d\vec{i}_2}{ds_2}\frac{ds_2}{ds} = \frac{d\vec{i}_2}{ds_2}sen\theta$$

donde se ha hecho:

$$\frac{d\vec{i}_1}{ds_2} = 0, \qquad \frac{d\vec{i}_2}{ds_1} = 0, \qquad \frac{ds_1}{ds} = \cos\theta, \qquad \frac{ds_2}{ds} = sen\theta$$

Sustituyendo en [4.3a]:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \cos^2\theta.\frac{d\vec{i}_1}{ds_1} + sen^2\theta.\frac{d\vec{i}_2}{ds_2} - \vec{u}.\frac{d\theta}{ds}$$

Finalmente:

$$k_g = \vec{u}.\frac{d\vec{t}}{ds} = \left(sen\theta.\vec{i}_1 - \cos\theta.\vec{i}_2\right)\left(\cos^2\theta.\frac{d\vec{i}_1}{ds_1} + sen^2.\frac{d\vec{i}_2}{ds_2}\right) - \vec{u}^2.\frac{d\theta}{ds} =$$

$$= sen^3\theta.\vec{i}_1.\frac{d\vec{i}_2}{ds_2} - \cos^3\theta.\vec{i}_2.\frac{d\vec{i}_1}{ds_1} - \frac{d\theta}{ds}$$

Por tanto:

$$\boxed{k_g = \left(k_g\right)_{u_1=cte}.\cos^3\theta + \left(k_g\right)_{u_2=cte}.sen^3\theta - \frac{d\theta}{ds}}$$

Bibliografía

ABELLANAS, P., (1961). Geometría Básica, Editorial Romo, Madrid
ABISMAN, I.: A first course in differential geometry. Marcel Dekker, 1984
CHOQUET-BRUHAT, Y. (1968). Geometrie Differentielle et systemes exterieurs. Dunod, Paris
DO CARMO, M.P., Geometría Diferencial de Curvas y Superficies. Alianza Universidad, Madrid, 1990
FEDENKO, A.S.: Problemas de Geometría Diferencial. Ed. Mir, Moscú. 1981
HICKS, N.J.: Notas sobre Geometría Diferencial. Ed. Hispano Europea, 1974
HSIUNG, C.C. (1981). A first course in differential geometry. John Wiley.
KLINGENBERG, W., Curso de Geometría diferencial, Alambra, 1978
LELONG-FERRAND, J. (1963), Geometrie Differentielle. Masson and Cie., Paris.
LIPSCHUTZ, L.M., Theory and problems of differential geometry. McGraw-Hill, 1969
MILLMAN, R.S. , Parker, G.D. (1977). Elements of differential geometry. Prentice Hall,
MONTESDEOCA, A.: Apuntes de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies. Col. Textos Universitarios, 1996
MONTIEL, S.; Ros, A.: Curvas y Superficies. 1996
O'NEILL, B.: Elementos de Geometría Diferencial. Limusa-Wiley, 1972
STOKER, J.J., Differential Geometry, Wiley Interscience, 1981
STRUICK, D.J. (1961) Geometría diferencial clásica. Aguilar Ediciones, Madrid