La matemática del buen orden.
Conjuntos bien ordenados

01. Orden:

01.1. Definición de relación de orden.

Una relación definida sobre los elementos de un conjunto de forma que sea reflexiva, antisimétrica y transitiva es una relación de *orden*. Tal relación permite comparar dos elementos dados y nos permite indicar cuál de ambos está "antes" en dicho orden y cuál es el que está "después".

Así, si existe una relación R entre elementos, x,y, de un conjunto que verifica que

a) Es reflexiva: $\forall x \in A,\ xRx$
b) Es antisimétrica: $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
c) Es transitiva: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Si consideramos la relación "menor o igual que" de la teoría de números, se cumple que:

- Es reflexiva: $\forall x \in A,\ x \leq x$
- Es antisimétrica: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
- Es transitiva: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Un conjunto dotado de una relación de orden es un *conjunto ordenado*. El conjunto N de los números naturales es un conjunto ordenado, o también el conjunto R de los números reales.

01.2. Orden total y orden parcial.

Si en un conjunto ordenado A hay pares de elementos, a, b, tales que no son comparables, esto es, tales que ni es $a \leq b$ ni tampoco es $b \leq a$, la relación $\leq$ se dice que es de *orden parcial* en el conjunto A. El conjunto A se dice *parcialmente ordenado* por la relación $\leq$.

Si, por el contrario, todos los pares de elementos del conjunto son comparables, la relación se denomina de *orden total*. Una relación $\leq$ de orden total en el conjunto A verifica que:

- $\forall x \in A,\ x \leq x$
- $\forall x, y \in A,\ x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
- $\forall x, y \in A,\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- $\forall x, y \in A,\ x \leq y \vee y \leq x$

Un orden parcial indica, pues, que existen pares de elementos de los que no se pueda decir cuál de los dos está "antes" que el otro en dicho orden.
El conjunto P(A) de las partes de un conjunto A, dotado de la relación de inclusión, "$\subseteq$", es un conjunto parcialmente ordenado, pues hay partes que no son comparables para la inclusión. Así, de las diferentes partes que tienen, por ejemplo, un solo elementos, $\{a\},\{b\},\ldots$, no se puede afirmar que $\{a\}\subseteq\{b\}$ ni tampoco que $\{b\}\subseteq\{a\}$... Diremos (P(A), $\subseteq$) está parcialmente ordenado.

Un determinado conjunto A, dotado de un orden cualquiera, ya sea total o parcial, puede contener subconjuntos C1,...,Ck, que con respecto al orden dado en A están totalmente ordenados. Se denominan *cadenas* contenidas en el conjunto A.

01.3. Orden estricto. Sección inicial y parte hereditaria.

Dado el conjunto ordenado $(A,\leq)$ se dice que el elemento x es *estrictamente menor* que el elemento y, $x<y$, si se verifica que $x \leq y \wedge x \neq y$. Se denomina *sección inicial estricta definida por a* al conjunto $S_a = \{x \in A / x < a\}$.

$H \subseteq A$ es *parte hereditaria* de A $\leftrightarrow \forall x \in A, x \leq s, s \in H \rightarrow x \in H.$

01.4. Cotas.

Un conjunto *B* dotado del orden $\leq$ se dice *superiormente acotado*, o *mayorado*, por el elemento *p* si todo elemento *x* de *B* verifica que $x \leq p$. Análogamente, se dice inferiormente acotado, o minorado, por el elemento *q* si todo elemento *x* de *B* verifica que $q \leq x$. Se dice que p es una *cota superior*, o un *mayorante*, del conjunto *B*, mientras que *q* se dice *cota inferior* o *minorante* del conjunto *B*.

$$p \cot a \sup de\ B \Leftrightarrow \forall x \in B, x \leq p$$
$$q \cot a \inf de\ B \Leftrightarrow \forall x \in B, q \leq x$$

01.5. Elemento maximal y minimal. Elemento máximo y elemento mínimo.

Si es *A* un conjunto al menos parcialmente ordenado, un elemento *ma* de A se dice *maximal de A* si se verifica que $\forall a \in A, no\ (ma \leq a)$. O sea, no es menor o igual que ningún otro elemento de A.

Si es A un conjunto al menos parcialmente ordenado, un elemento *mi* de A se dice *minimal de A* si se verifica que $\forall a \in A, no(a \leq mi)$. O sea, no es mayor o igual que ningún otro elemento de *A*.

Si el conjunto A está totalmente ordenado, entonces el elemento maximal, si existe, es único y se denomina *elemento máximo* del conjunto A.

Si el conjunto A está totalmente ordenado, entonces el elemento minimal, si existe, es único, y se denominan *elemento mínimo* del conjunto A.

01.6. Supremo e ínfimo.

Si el conjunto de las cotas superiores de A estuviera totalmente ordenado, su elemento mínimal, caso de existir, sería único y elemento mínimo de dicho conjunto de cotas superiores, el cual se dice que es el *supremo del conjunto A*, y, si perteneciera al conjunto A, sería también el máximo de A.

Por analogía, si el conjunto de las cotas inferiores de *A* estuviera totalmente ordenado, su elemento maximal, caso de existir, sería único y elemento máximo de dicho conjunto de cotas inferiores, el cual se dice que es el *ínfimo del conjunto A*, y, si perteneciera al conjunto A, sería también el mínimo de A.

Se dice que un conjunto ordenado A por la relación de orden $\leq$ es un *conjunto inductivo* si toda cadena contenida en A está mayorada. Si toda cadena admite un mayorante mínimo o supremo, el conjunto A se dice que es *fuertemente inductivo.*

02. Buen orden:

02.1. Definición.

Un conjunto se dice bien ordenado, o, simplemente, dotado de un buen orden, si toda parte no vacía del mismo admite primer elemento. Es inmediato que si un conjunto está bien ordenado, también está totalmente ordenado, pues bastará tomar una parte de solo dos elementos y uno de ellos, por el buen orden existente, será el primer elemento, es decir, el que está "antes" en dicho orden. Ambos elementos son, pues, comparables y el orden es total.

Proposición 02.1:
Un conjunto *A* bien ordenado por O_A verifica siempre que tiene primer elemento y todo subconjunto *B* de *A* está también bien ordenado por O_A.
En efecto:

1) Si el conjunto *A* está bien ordenado, todo subconjunto del mismo tiene, por definición, elemento mínimo. Como *A* es también subconjunto de *A*, el mismo *A* tendrá elemento mínimo.
2) Si *B* es subconjunto de *A* se cumple que todo subconjunto de *B* es también subconjunto de *A*, y siendo *A* bien ordenado por el orden O_A tal subconjunto tendrá elemento mínimo. Luego *B* está bien ordenado por el orden O_A inducido por *A*.

Proposición 02.2:
Todo conjunto *A* totalmente ordenado y finito está bien ordenado.
Efectivamente:
Si A es totalmente ordenado y finito, todo subconjunto B de A es finito. Probemos mediante recurrencia que está bien ordenado. Si tomamos un subconjunto B_2 de A que tenga dos elementos, a_1 y a_2, entonces como ambos son comparables por estar A totalmente ordenado, uno de ellos, el menor, sería el elemento mínimo de tal subconjunto.
Supongamos que esto sea cierto para n-1 elementos, es decir, si el subconjunto $B_{n-1} = \{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ tiene elemento mínimo, sea por ejemplo a_1. Al añadirle un elemento más, a_n, la parte $\{a_1, a_n\}$ también tendrá elemento mínimo, que es el elemento mínimo de $B_n = \{a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n\}$. Luego todo subconjunto de A tiene elemento mínimo. Está bien ordenado.

Proposición 02.3:
Si es $(A, \leq)$ un conjunto bien ordenado, entonces toda parte hereditaria de A, distinta de A, es una sección inicial estricta.
Demostración:
Sea $(A, \leq)$ bien ordenado y sea H parte hereditaria de A/ $H \neq A$. Entonces:

$$A - H \neq \phi \rightarrow A - H \subseteq A \wedge (A, \leq)\ bien\ ord \rightarrow \exists a \in A / a\ primer\ elem\ de\ A - H$$

Para todo elemento x de A se verifica:
Si $x \geq a \rightarrow x \in A - H \rightarrow x \notin H$
Si $x < a \rightarrow x \in H\ (pues\ si\ x \notin H \rightarrow x \in A - H \rightarrow a\ no\ es\ primer\ elem\ de\ A - H)$
Por tanto, la parte hereditaria es $H = \{x \in A / x < a\}$ que coincide con la sección inicial S_a definida por el elemento a, por definición de sección inicial estricta.

Toda sección inicial de una sección inicial de A es también, obviamente, sección inicial de A.

Proposición 02.4:

La familia M de las secciones iniciales de un conjunto bien ordenado $(A,\leq)$ es un conjunto bien ordenado respecto a la relación de inclusión de conjuntos, es decir, $(M,\subseteq)$ es conjunto bien ordenado.
En efecto:
Sea $N\subseteq M$ un subconjunto cualquiera de la familia M de las secciones iniciales de A y sea φ_N el subconjunto de A formado por los elementos que generan la subfamilia N de secciones iniciales:

$$\varphi_N=\{n\in A/S_n\in N\}$$

Como A es bien ordenado, al ser φ_N subconjunto de A tendrá un primer elemento. Sea φ el primer elemento de φ_N y sea S_φ la sección inicial que genera φ.
La sección inicial $S_\varphi\in N$ es el primer elemento de N, pues de existir otra $S_k\in N$ tal que $S_k\subseteq S_\varphi$ entonces $k\leq\varphi$ y no sería φ primer elemento de φ_N.
Puesto que A no es sección inicial de A, se tiene que $A\notin M$, por lo que si existe un elemento u máximo de A, $u=\max A$, entonces

$$\forall x\in A, x\leq u\rightarrow S_x\subseteq S_u\rightarrow S_u=\max M.$$

Proposición 02.5:
La aplicación $f:A\rightarrow M$, de un conjunto ordenado A en el conjunto M de sus secciones iniciales definida por la condición de que $\forall x\in A, f(x)=s_x\in M$, es un isomorfismo entre los conjuntos bien ordenados $(A,\leq)$ y $(M,\subseteq)$.
Demostración:
Obviamente es f biyectiva, ya que cada sección inicial está definida por un único elemento de A, y, recíprocamente, cada elemento de A define una sección inicial. Por otra parte, se tiene que

$$\forall x,y\in A, x\leq y\rightarrow S_x\subseteq S_y\rightarrow f(x)\subseteq f(y)$$

Por tanto f es un isomorfismo de conjuntos ordenados.

Proposición 02.6:
Si un conjunto bien ordenado A no posee elemento máximo m, entonces se verifica que $A=\bigcup_{x\in A}S_x$. Caso contrario es $A-\{m\}=\bigcup_{x\in A}S_x$.
Demostración:

- Si A no tiene máximo $\forall y\in A,\exists z\in A/y<z\rightarrow y\in S_z\rightarrow y\in\bigcup_{x\in A}S_x\rightarrow A=\bigcup_{x\in A}S_x$
- Si A tiene máximo $m\in A\rightarrow\forall y\in A, y\leq m\wedge m\notin\bigcup_{x\in A}S_x=S_m=A-\{m\}$

03. Isomorfismos de orden. Semejanza. Continuaciones:

03.1. Isomormismos de orden.

Dados dos conjuntos ordenados, A y B, donde O_A es el orden de A y O_B es el orden de B, es decir, dados (A,O_A) y (B,O_B), se define el isomorfismo de orden entre A y B como una aplicación biyectiva, $f : A \rightarrow B$, que sea estable con respecto al orden definido en ambos conjuntos. Esto es:

$$f : A \rightarrow B \text{ biyectiva}$$
$$\forall x, y \in A,\ xO_A y \Rightarrow f(x)O_B f(y)$$

Si se trata del orden usual, ≤, de los conjuntos numéricos, se tiene que un isomorfismo f cumplirá que

$$f : A \rightarrow B \text{ biyectiva}$$
$$\forall x, y \in A,\ x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$$

03.2. Semejanza de orden.

Dos conjuntos ordenados, $(A,\le)$ y $(B,\le)$, se dicen semejantes sii existe un isomorfismo de orden $f : A \rightarrow B$. Es decir:

$$(A,\le) \cong (B,\le) \Leftrightarrow \exists f : A \rightarrow B / f \text{ biyectiva} \wedge \forall x, y \in A, x \le y \rightarrow f(x) \le f(y)$$

Proposición 03.1:
La relación de semejanza de orden es de equivalencia.
Demostración:

a) Es reflexiva:
$$\forall (A,\le), (A,\le) \cong (A,\le)$$
Pues, por ejemplo, la identidad es un isomorfismo de orden en A.

b) Es simétrica:
$$\forall (A,\le),(B,\le), (A,\le) \cong (B,\le) \Rightarrow (B,\le) \cong (A,\le)$$
Pues si f es isomorfismo de orden de A en B, entonces f^{1} es también isomorfismo de orden de B en A.

c) Es transitiva:
$$\forall (A,\le),(B,\le),(C,\le)/$$
$$\begin{cases}(A,\le) \cong (B,\le) \\ (B,\le) \cong (C,\le)\end{cases} \Rightarrow (A,\le) \cong (C,\le)$$
Esto es así por la transitividad del isomorfismo de orden.

Proposición 03.2:
Un conjunto bien ordenado, $(A,\le)$, no es semejante a ninguna de sus secciones iniciales.
Demostración:
Suponer lo contrario implicaría una contradicción, pues si suponemos que se cumple que $\exists a \in A / f : A \rightarrow S_a$ es isomorfismo, entonces, puesto que $f(a) \in S_a$ será $f(a) < a$, por lo que el conjunto $M = \{x \in A / f(x) < x\}$ no es vacío. Llamemos m al elemento mínimo de M. Se tiene que $f(m) < m$. Y como f es isomorfismo, se cumple que $f(f(m)) < f(m)$, por lo que también $f(m)$ pertenece al conjunto M,

pero si $f(m)$ es elemento de M, como sabemos que $f(m) < m$, entonces no puede ser m elemento mínimo de M, lo que manifiesta la contradicción.

Proposición 03.3:
Dados dos conjuntos bien ordenados y semejantes, $(A,\leq)$y $(B,\leq)$, se cumple que si admiten dos isomorfismos de orden, f y g, ambos coinciden.
Demostración:
Si son f,g isomorfismos de A en B, entonces $h = f^{-1}og$ o $k = g^{-1}of$ son también isomorfismos de A en A. Se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l}\forall a \in A,\, a \leq h(a) = f^{-1}g(a) \to a \leq f^{-1}g(a) \to f(a) \leq g(a) \\ \forall a \in A,\, a \leq k(a) = g^{-1}f(a) \to a \leq g^{-1}f(a) \to g(a) \leq f(a)\end{array}\right\} \to f = g$$

Proposición 03.4:
Sea A un conjunto bien ordenado y sean S_a y S_b secciones iniciales de A. Ambas secciones iniciales no son semejantes.
Demostración:
Si $a \neq b \to a < b \vee b < a \to S_a \subset S_b \vee S_b \subset S_a$
Sea, por ejemplo, $a<b$, y sea $f : S_a \to S_b$un isomorfismo. Se tiene que S_a es sección inicial de S_b y f sería un isomorfismo de S_a en una de sus secciones iniciales, lo cual es imposible, por la proposición 03.2.

Proposición 03.5:
Sean $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$ dos conjuntos bien ordenados. Se cumple que o bien ambos $(A,\leq)$ y $(B,\leq)$, son semejantes, o bien $(B,\leq)$ es semejante a una sección inicial de $(A,\leq)$, o bien $(A,\leq)$ es semejante a una sección inicial de $(B,\leq)$.
Demostración:
Llamemos S_{xA} a la sección inicial de A determinada por el elemento $x \in A$, y sea asimismo, S_{yB} a la sección inicial de B determinada por el elemento $y \in B$.
Sea X el conjunto de elementos de A que determinan secciones iniciales semejantes a secciones iniciales de B:

$$X = \{x \in A / \exists y \in B, S_{xA} \cong S_{yB}\}$$

Sea Y el conjunto de elementos de B que determinan secciones iniciales semejantes a secciones iniciales de A:

$$Y = \{y \in B / \exists x \in A, S_{xA} \cong S_{yB}\}$$

Puesto que A y B son conjuntos ordenados, tienen elemento mínimo. Si es m el mínimo de A y es n el mínimo de B, las secciones iniciales, vacías, determinadas por ambos son semejantes, por lo cual, $m \in X$ y $n \in Y$, resultando que no son vacíos tales conjuntos:

$$X \neq \phi, Y \neq \phi$$

$\forall x \in X, \exists! y \in Y / S_{xA} \cong S_{yB}$.Podemos indicar esto por $y = f(x)$, y llamar también $f(X)$ al conjunto Y.

- Veamos que ambos conjuntos, X y $f(X)$, son partes hereditarias de A y B, respectivamente:

Por definición, sabemos que X será parte hereditaria de A si se verifica que

$$\forall x \in A, x^* \le x, x \in X \Rightarrow x^* \in X$$

Sea entonces $x \in X$ y sea $x^* \le x$, con lo que S_{x^*A} es sección inicial de S_{xA}. Esto quiere decir que

$$\left.\begin{matrix} S_{x^*A} \sec c\ inic\ de\ S_{xA} \\ S_{xA} \cong S_{f(x)B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists y^* \in S_{f(x)B} / S_{x^*A} \cong S_{y^*B} \Rightarrow x^* \in X$$

Con lo que X resulta ser parte hereditaria de A.
Repitiendo el mismo razonamiento, encontramos que también $f(X)$ es parte hereditaria de B, es decir, encontramos que también

$$\forall f(x^*) \in B, f(x^*) \le f(x), f(x) \in f(X) \Rightarrow f(x^*) \in f(X)$$

- Veamos ahora que los conjuntos X y $f(X)$ son semejantes:

Puesto que por construcción, $\forall y \in f(X), \exists! x \in X / f(x) = y$, f es isomorfismo. Y comprobamos fácilmente que es estable respecto al orden, pues:

$$x^* \le x \rightarrow S_{x^*A} \sec c\ inic\ de\ S_{xA} \rightarrow \exists y^* \in S_{f(x)B} / S_{y^*B} \cong S_{x^*A} \rightarrow y^* = f(x^*) \le f(x)$$

En definitiva, se verifica la semejanza: $X \cong f(X)$

- Finalmente, veamos que ha de ser $X = A$ o bien $f(X) = B$, pues si ocurriera lo contrario, es decir, si fuera $X \ne A, f(X) \ne B$, llegaríamos a una contradicción:

Al ser X y f(X) partes hereditarias de A y B, respectivamente, serán secciones iniciales de ambos conjuntos, con lo que existirán elementos a, de A, y b, de B, que las determinen:

$$\exists a \in A, b \in B / X = S_{aA}, f(X) = S_{bB} \text{ y } SaA \cong SbB$$

y siendo $X = \{x \in A / \exists y \in B, S_{xA} \cong S_{yB}\}$, se tiene que $a \in X$, esto es, $a \in S_{aA}$, con lo cual a<a, lo cual es absurdo.

Proposición 03.6: (Inducción transfinita)
Sea $(A, \le)$ un conjunto bien ordenado y sea A* un subconjunto de A que cumple que para toda sección inicial Sx de A* generada por x, el elemento x pertenece a A*. El subconjunto A* coincide entonces con el conjunto A.

$$\{A^* \subseteq A / S_x \subseteq A^* \rightarrow x \in A^*\} \Rightarrow A = A^*$$

Demostración:
Si es $A^* \ne A$ llegaríamos a una contradicción, pues se tendría:

- <u>Por una parte, al ser $\underline{A - A^* \ne \phi}$</u>, el conjunto $\overline{A - A^*}$ tendrá primer elemento m, o sea, $\exists m \in A / m = \min(A - A^*) \rightarrow m \notin A^*$ [1]

- Por otra parte, si es S_m la sección inicial de A determinada por m, se tiene que $\forall x \in S_m, x < m \to x < m \wedge m = \min(A - A^*) \to x \notin A - A^* \to x \in A^*$ [2]

Obviamente, los resultados [1] y [2] son contradictorios, por lo que $A = A^*$.

Proposición 03.7: (Inducción completa)
Dado el conjunto bien ordenado de los números naturales, $(N, \leq)$. Se cumple que si para un subconjunto N* de N es $0 \in N^* \ y \ (\forall n \in N)(n-1 \in N^* \to n \in N^*)$ entonces el subconjunto N* coincide con el conjunto N.

$$\{N^* \subseteq N / 0 \in N^* \wedge (\forall n \in N)(n-1 \in N^* \to n \in N^*)\} \Rightarrow N = N^*$$

Demostración:
Una sección inicial de N^* determinada por n es $S_n = \{x \in N^* / x < n\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
Por tanto, si se cumple que para N^* es $0 \in N^* \ y \ (\forall n \in N)(n-1 \in N^* \to n \in N^*)$, esto es lo mismo que decir que $S_n \subseteq N^* \to n \in N^*$, por lo que, aplicando inducción transfinita, se tiene que $N = N^*$.

03.3. Continuaciones.

Dados dos conjuntos bien ordenados, $(A, \leq)$ y $(B, \leq)$, se dice que $(A, \leq)$ es una continuación de $(B, \leq)$ si $B \subseteq A$ es una sección inicial o parte hereditaria de A y si el orden "$\leq$" del conjunto B coincide con el orden "$\leq$" del conjunto A.

Así, si $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado, para dos elementos $a, b \in A / b < a$ se tiene que S_a es una continuación de S_b, y, obviamente, A es una continuación tanto de S_a como de S_b.

En definitiva, si es M una familia arbitraria de secciones iniciales de $(A, \leq)$, se cumple que con respecto a la continuación es una cadena:

$$\forall S_a, S_b \in M, (S_a \ continuacion \ de \ S_b) \vee (S_b \ continuacion \ de \ S_a)$$

Proposición 03.8:
Dada una familia *M* de conjuntos bien ordenados, que es una cadena con respecto a la continuación y si es Z la unión de los conjuntos de *M*, entonces existe un buen orden único tal que es Z una continuación de cada conjunto de la familia.
Demostración:
Sean $a, b \in Z$, entonces, $\exists M_a, M_b \in M / a \in M_a, b \in M_b$. Como M_a y M_b son elementos de una cadena (orden total) para la continuación, se tiene que

$$M_a = M_b \ o \ bien \ (M_a contin \ de \ M_b \vee M_b contin \ de \ M_a)$$

Es decir, existe un $M_s \in M / a, b \in M_s$, siendo M_s continuación de M_a y M_b.
Si definimos el orden "$\leq$" en Z por la condición:

$$a \leq b \Leftrightarrow M_b continuac \ de \ M_b \wedge a \in M_a \wedge b \in M_b$$

tal orden es total, pues también es total en *M* la continuación (es una cadena).
Veamos que además es un buen orden, esto es, que todo subconjunto no vacío de Z tiene un primer elemento.
Puesto que toda parte no vacía *U* de Z es realmente una parte de la unión de conjuntos de *M*, ha de tener intersección no vacía con uno o más elementos dela familia *M*:

$$\forall U \subseteq Z, \exists M_u \in M / U \cap M_u = M_u^* \neq \phi$$

Como los elementos de la familia *M* son, por hipótesis, bien ordenados, toda parte no vacía, M_u^*, ha de tener un primer elemento:

$$\exists m \in Z / m = \min M_u^*$$

y m ha de ser también el mínimo del conjunto *U*, pues de lo contrario se llegaría a una contradicción:
Supongamos que $\exists x \in Z / x < m \ y \ x \in U$.
Si $x \in U, \exists M_x \in M / x \in M_x \wedge M_x \subseteq M_u^* \vee M_u^* \subseteq M_x$,
Si $M_x \subseteq M_u^* \rightarrow x \in M_u^* \wedge x < m$, lo que es contradictorio con que $m = \min M_u^*$.
Si $M_u^* \subseteq M_x \rightarrow x \in U \wedge U \cap M_u = M_u^* \rightarrow x \in M_u^* \wedge x < m$, lo que igualmente resulta contradictorio con que $m = \min M_u^*$.

Bibliografía:

ABELLANAS, P., "Elementos de Matemáticas", Editorial Romo, Madrid, 1975
BIRKHOFF, G.;MCLANE, S., "Álgebra Moderna", Editorial Vicens Vives, Sevilla, 1970
BOURBAKI, N., "Theorie des ensembles", Editorial Hermann, París, 1966
DUBREIL,P.; DUBREIL-JACOTIN,M.L., "Lecciones de Algebra Moderna", Editorial Reverté, Barcelona, 1965
HALMOS, P., "Teoria intuitiva de los conjuntos", Editorial C.E.C.S.A., México, 1973
KELLEY, J.L., "Topología General", Editorial Eudeba, Buenos Aires, 1975
LANG, S.,"Álgebra", Ediciones Aguilar, Madrid, 1971
QUEYSANNE, M.,"Álgebra básica", Editorial Vicens Vives, Sevilla, 1990
SUPPES, P., "Axiomatic Set Theory", Editorial Dover, New York, 1972.
VAN DER WAERDEN,B.L.,"Modern Algebra", Editorial Springer, New York, 1950