# Sobre el Teorema de la Integral de Cauchy-Goursat

El Teorema de la Integral de Cauchy fue descubierto en 1825 por Agustin Louis de Cauchy (1789-1857), siendo desarrollado por Edouard Goursat (1858-1936) en su famoso *Cours d'Analyse Mathématique*, a principios del siglo XX.

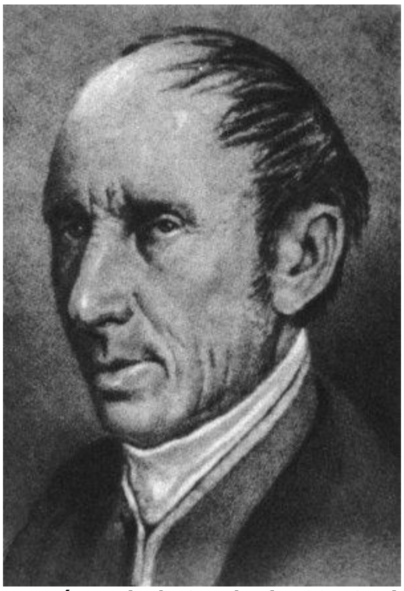
Afirma el teorema que

$$\oint_{\gamma} f(z).dz = 0$$

cuando la integral se establece sobre una curva cerrada contenida en un dominio simplemente conexo D.

Si bien en la primera formulación de Cauchy se exigía como hipótesis para el cumplimiento del teorema que la función *f(z)* fuera analítica en el dominio *D*, con derivada continua, las investigaciones de Goursat permitirían probar que no es necesario que la derivada fuera continua para que el valor de la integral sea cero. Probó que el teorema sigue siendo válido cuando el dominio *D* contiene un número finito de puntos singulares.

Hoy podemos probar el teorema de la integral de Cauchy de forma rápida y sencilla usando las Ecuaciones de Cauchy-Riemann y el Teorema de Green (lo que haremos al final de este trabajo), sin embargo en los dos siguientes apartados estudiamos el teorema en las situaciones en que la curva sobre la que se extiende la integral es rectangular o triangular, considerando el caso de existencia de puntos singulares al objeto de emplear como método de demostración el mismo que utilizó Edouard Goursat, y que consiste en sucesivas bisecciones del recinto delimitado por la curva cerrada.



**Agustín Louis de Cauchy (1789-1857)**
**Imagen de Wikipedia**

**Edouard Goursat (1858-1936)**
**Imagen de Wikipedia**

## 00.Introducción

### 00.1. La integral de línea:

Se trata de integrales cuya función se evalúa sobre una curva $\Gamma$. Cuando tal curva es cerrada se dice que la integral es de contorno.

Si consideramos una curva plana

$$\Gamma: \ z(t) = x(t) + iy(t), \quad dz(t) = dx(t) + idy(t), \quad a \leq t \leq b, \ b > a$$

y una función compleja $f(z(t)) = u(t) + iv(t) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$, llamamos integral de línea en el plano complejo a la expresión

$$\int_\Gamma f(z).dz = \int_a^b f(z(t)).z'(t).dt$$

donde es $dz = z'(t)dt = dx(t) + idy(t)$.

### 00.2. Propiedades elementales:

a) $\forall a \in C, \ \int_\Gamma a.f(z).dz = \int_a^b af(z(t)).z'(t).dt = a\int_a^b f(z(t)).z'(t).dt = a\int_\Gamma f(z).dz$

b) $\forall f(z), g(z)$funciones complejas, $\int_\Gamma (f(z) + g(z)).dz = \int_a^b (f(z(t)) + g(z(t))).z'(t).dt =$

$$= \int_a^b f(z(t)).z'(t).dt + \int_a^b g(z(t)).z'(t).dt = \int_\Gamma f(z).dz + \int_\Gamma g(z).dz$$

c) Sea $\Gamma$ la curva desde $\alpha$ hasta $\beta$ y sean las curvas $\Gamma_1$desde $\alpha$ hasta $\beta_1$, y $\Gamma_2$desde $\alpha_2 = \beta_1$ hasta $\beta$. Se tiene:

$$\int_\Gamma f(z).dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)).z'(t).dt = \int_\alpha^{\beta_1} f(z(t)).z'(t).dt + \int_{\alpha_2}^\beta f(z(t)).z'(t).dt =$$

$$= \int_{\Gamma_1} f(z).dz + \int_{\Gamma_2} f(z).dz$$

d) $\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t)).z'(t).dt\right| \leq \int_a^b |f(z(t)).z'(t).dt| = \int_\Gamma |f(z)dz|$

e) $\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t)).z'(t).dt = -\int_b^a f(z(t)).z'(t).dt = -\int_{-\Gamma} f(z)dz$

Propiedad de independencia del camino:

Sea D un dominio simplemente conexo y $\gamma$ una curva regular a trozos definida en el intervalo [a,b] y contenida en D. Si $\varphi(z)$ y $\phi(z)$ son funciones complejas holomorfas en D y tales que $\phi'(z) = \varphi(z)$, entonces se verifica que

$$\int_\gamma \varphi(z)dz = \phi(z(b)) - \phi(z(a))$$

$$\int_\gamma \varphi(z)dz = \int_a^b \varphi(z(t)).z'(t).dt = \int_a^b \phi'(z(t)).dt = \int_a^b \phi_r^{'}(z(t)).dt + i\int_a^b \phi_i^{'}(z(t)).dt =$$

$$= \phi_r(z(t))\Big|_a^b + i\,\phi_i(z(t))\Big|_a^b = (\phi_r(z(b)) + i\phi_i(z(b))) - (\phi_r(z(a)) + i\phi_i(z(a))) =$$

$= \phi(z(b)) - \phi(z(b))$

Consecuencia: Si en tales condiciones la curva $\gamma$ es cerrada, entonces la integral de contorno es nula, pues siempre se verifica que

$$\oint_{\gamma} \phi(z).dz = \int_{\gamma_{ab}} \phi(z)dz + \int_{\gamma_{ba}} \phi(z)dz = \varphi(z(b)) - \varphi(z(a)) + \varphi(z(a)) - \varphi(z(b)) = 0$$

## 01.El Teorema de Cauchy para un rectángulo

### 01.1. Caso en el que no hay puntos singulares rodeados por el contorno:

Sea D un abierto simplemente conexo y sea $\gamma$ una curva cerrada de clase $C^1$ definida a trozos y contenida en D. Si $f(z)$ es función holomorfa en D, entonces se verifica que

$$\oint_{\gamma} f(z).dz = 0$$

Veamos la demostración para el caso de que la curva $\gamma$ sea el borde $bR$ de un rectángulo R contenido en D ($\gamma \equiv bR$).

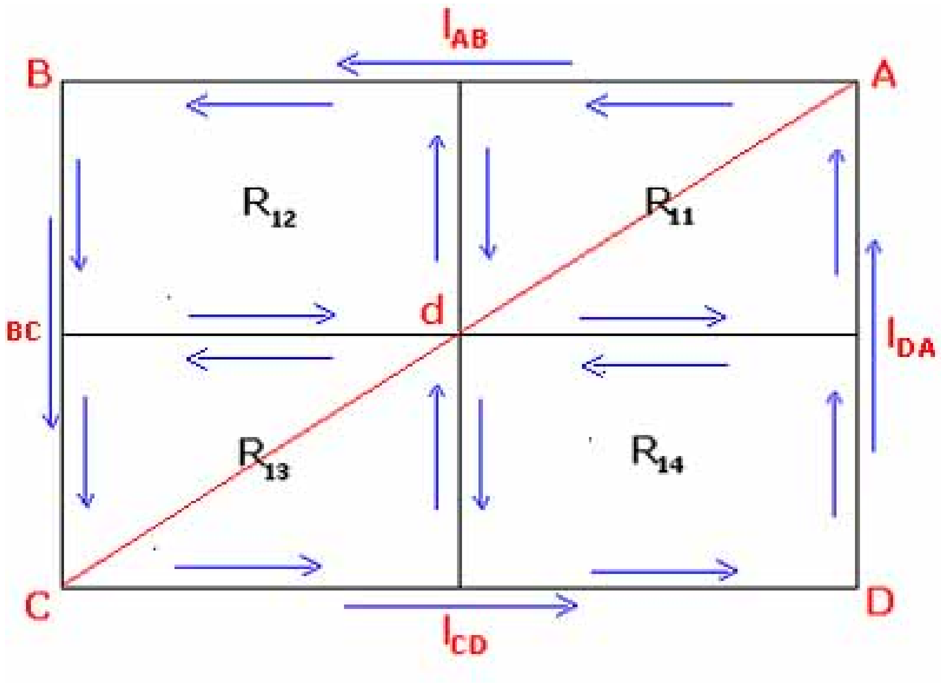
Demostración:

Veamos la demostración por reducción al absurdo, esto es, supongamos que no se verifica el teorema, es decir, que

$$\oint_{\gamma} f(z).dz \neq 0 \qquad [1]$$

y comprobemos que, en tal caso, se llegaría a un resultado contradictorio.

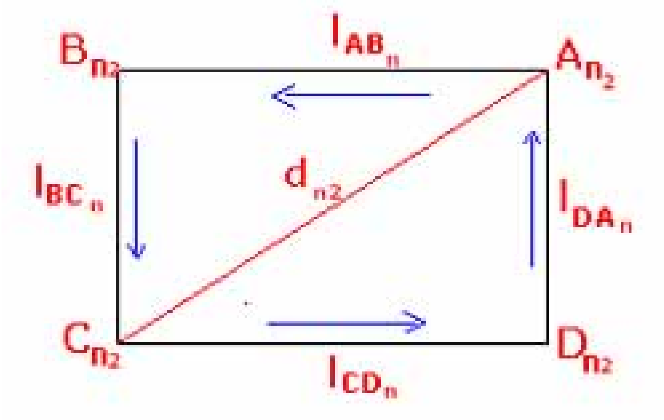
- Si $\oint_{\gamma} f(z).dz \neq 0$ entonces existirá algún número real $r$ tal que $\left|\oint_{\gamma} f(z).dz\right| \geq r > 0$ [2]
- Si dividimos el rectángulo R en cuatro subrectángulos, $R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}$, tal como se indica en la figura, se tiene que
  $$\oint_{bR} f(z).dz = \oint_{bR11} f(z).dz + \oint_{bR12} f(z).dz + \oint_{bR13} f(z).dz + \oint_{bR14} f(z).dz$$
  pues las integrales sobre los caminos que constituyen la "cruz interna" se cancelan.
- De ser $\left|\oint_{\gamma} f(z).dz\right| \geq r$ , se deduce que uno, al menos, de los cuatro subrectángulos , por ejemplo R12, verifica que $\left|\oint_{bR12} f(z).dz\right| \geq r/4$.




**Rectángulo *R* dividido en cuatro subrectángulos**

Asimismo, la diagonal $d_1$ de cada subrectángulo es la mitad de la diagonal $d$ del rectángulo R, $d_1 = d/2$, y la longitud $l_1$, del perímetro de cada subrectangulo es también la mitad de la longitud del perímetro de R, $l_1 = l/2$.

- Si aplicamos la misma división al subrectangulo R12, encontramos que uno de los subrectangulos del mismo, R21, R22, R23, R24, por ejemplo R22, verificará que $\left|\oint_{bR22} f(z).dz\right| \geq r/4^2$.
- Si continuamos dividiendo subrectángulos reiteradamente encontramos que en la n-sima división hay al menos un subrectángulo, por ejemplo *Rn2*, tal que $\left|\oint_{bRn2} f(z).dz\right| \geq r/4^n$.




**Subrectángulo Rn2**

Longitud de la diagonal: $d_{n2} = d/2^n$

Longitud del perímetro: $l_{n2} = l/2^n$

- De lo anterior se tiene que existe una sucesión de rectángulos $R \supseteq R12 \supseteq ... \supseteq Rn2 \supseteq ...$ , que al ser compactos y decrecientes, su intersección es no vacía: $\bigcap_{n=0}^{\infty} Rn2 = \{z_0\}, \quad z_0 \in D$ (puesto que las diagonales de los subrectángulos de la sucesión tienden a cero, la intersección es un conjunto con un solo punto $z_0$).
- Si definimos una función

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) & si\ z \neq z_0 \\ 0 & si\ z = z_0 \end{cases}$$

entonces podemos escribir

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$$

donde $|g(z)| \to 0$ cuando $z \to z_0$

(pues, por definición de derivada, es $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0}\left((f(z) - f(z_0)/(z - z_0)\right)$).

Si en la expresión anterior llamamos $\alpha = f(z_0) - f'(z_0)(z_0), \beta = f'(z_0)$ , se tiene que $f(z) = \alpha + \beta z + g(z)(z - z_0)$, con lo que

$$\oint_{bRn2} f(z).dz = \oint_{bRn2} (\alpha + \beta z).dz + \oint_{bRn2} [g(z)(z - z_0)]dz$$

ahora bien, la integral de la derivada de una función a lo largo de una curva cerrada es cero, y vemos que el primer sumando es la integral de una función, $\alpha + \beta z$, que es la derivada de $\alpha z + \frac{1}{2}\beta z^2$, luego es $\oint_{bRn2} (\alpha + \beta z).dz = 0$

y queda:

$$\oint_{bRn2} f(z).dz = \oint_{bRn2} [g(z)(z - z_0)]dz$$

como es $|g(z)| \to 0$ cuando $z \to z_0$, se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |z - z_0| < \delta \to |g(z)| < \varepsilon$$

Si es $d_{Rn2} = diagonal(Rn2)$, será $|z - z_0| < d_{Rn2}$, y por otra parte, llamando $l_{Rn2}$ a la longitud del perímetro del rectángulo *Rn2*, es $\oint_{bRn2} |dz| = l_{Rn2}$ , con lo cual

$$\left| \oint_{bRn2} f(z).dz \right| \leq \oint_{bRn2} |g(z)|.|z - z_0|.|dz| < \varepsilon.d_{Rn2}. \oint_{bRn2} |dz| = \varepsilon.d_{Rn2}.l_{Rn2} = \varepsilon \frac{d}{2^n}.\frac{l}{2^n} = \varepsilon \frac{d.l}{4^n}$$

y como $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente pequeño, $\left| \oint_{bRn2} f(z).dz \right|$ tenderá a cero, esto es, $\left| \oint_{bRn2} f(z).dz \right| < r, \forall r > 0$, contra la hipótesis [2].

En definitiva, es contradictorio suponer [1], luego $\oint_{bRn2} f(z).dz = 0$

**01.2. Caso en el que existe un número finito de puntos singulares rodeados por el contorno:**

Sea D un abierto simplemente conexo y sea $\gamma$ una curva cerrada de clase C[1] definida a trozos y contenida en D. Si $f(z)$ es función holomorfa en D, salvo en un número finito de puntos, $p_j$, $j=1,...,n$, tales que $\lim_{z\to p_j}(z-p_j)f(z)=0$, entonces se verifica que

$$\oint_\gamma f(z).dz=0$$

Siendo $\gamma$ el borde $bR$ de un rectángulo R que contiene a los puntos $p_j$.

Demostración:

Bastará considerar el caso de un solo punto singular p, pues siempre es posible dividir el rectángulo R en subrectángulos conteniendo cada uno de ellos un solo punto singular.

Si dividimos R en 9 subrectángulos, como indicamos en la figura, y llamamos $R_0$ al subrectángulo que contiene al punto p, se tiene que

$$\oint_{bR} f(z).dz=\oint_{bR_0} f(z).dz$$

Dado un $\varepsilon$ cualquiera, siempre será posible elegir un subrectángulo $R_0$ tan pequeño que

$$|f(z)|\le\frac{\varepsilon}{|z-p|}$$

de lo cual, se tiene que $\left|\oint_{bR} f(z).dz\right|=\left|\oint_{bR_0} f(z).dz\right|\le\oint_{bR_0}|f(z).dz|=\oint_{bR_0}|f(z)||dz|\le$

$$\le\oint_{bR_0}\frac{\varepsilon}{|z-p|}|dz|=\varepsilon\oint_{bR_0}\frac{1}{|z-p|}|dz|$$

siempre es posible elegir el subrectángulo $R_0$ tal que sea un cuadrado de lado l, con lo que $|z-p|=l/2$, quedando, finalmente:

$$\left|\oint_{bR} f(z).dz\right|\le\frac{\varepsilon}{l/2}\oint_{bR_0}|dz|=\frac{\varepsilon}{l/2}4l=8\varepsilon$$

como $\varepsilon$ es arbitrariamente pequeño, tal valor tiende a cero, luego

$$\oint_{bR} f(z).dz=0$$

## 02.El Teorema de Cauchy para un triángulo

**02.1. Caso en el que no hay puntos singulares rodeados por el contorno:**

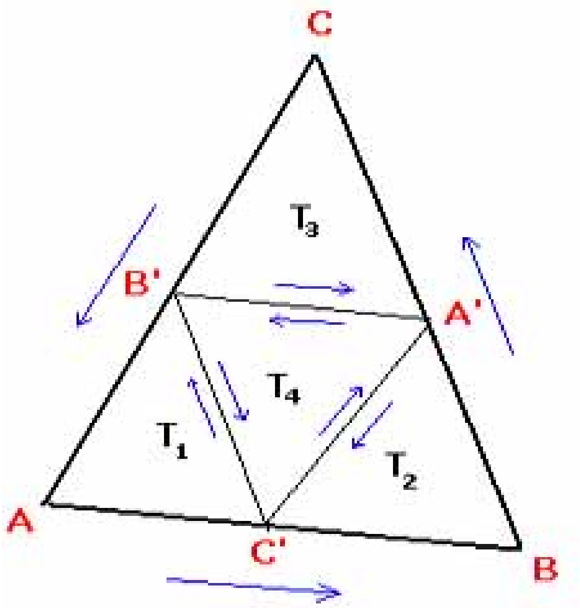
Sea D un abierto simplemente conexo y sea $\gamma$ una curva cerrada de clase C[1] definida a trozos y contenida en D. Si $f(z)$ es función holomorfa en D, entonces se verifica que

$$\oint_\gamma f(z).dz=0$$

Veamos la demostración para el caso de que la curva $\gamma$ sea el borde $bT$ de un triángulo T contenido en D ( $\gamma \equiv bT$ ).

Demostración:

Sea el triángulo T de vértices A, B y C, que representaremos por $T(A,B,C)$ y descompongamos en cuatro subtriángulos uniendo los puntos medios de sus lados.




Se obtienen los cuatro triángulos $T_1(A,C',B'),\ T_2(B,A',C'),\ T_3(C,B',A'),\ T_4(A',B',C')$.

Es claro que $\oint\limits_{bT} f(z).dz = \oint\limits_{bT_1} f(z).dz + \oint\limits_{bT_3} f(z).dz + \oint\limits_{bT_3} f(z).dz + \oint\limits_{bT_4} f(z).dz$ , pues al igual que ocurría en el caso del rectángulo, las integrales a lo largo de los tramos interiores se cancelan, siendo el perímetro de cada subtriángulo la mitad del perímetro del triángulo original: $long(bT_j) = \frac{1}{2} long(bT),\ j = 1,2,3,4.$

Al menos uno de los cuatro subtriángulos, por ejemplo $T_1(A,C',B')$ cumple que

$$\left| \oint\limits_{bT_1} f(z).dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \oint\limits_{bT} f(z).dz \right| \text{, con } long(bT_1) = \frac{1}{2} long(bT)$$

Si ahora descomponemos igualmente el subtriángulo $T_1(A,C',B')$ encontramos de forma análoga que uno de los cuatro nuevos subtriángulos, llamémosle por ejemplo $T_{12}$ verifica también que

$$\left| \oint\limits_{bT_{12}} f(z).dz \right| \geq \frac{1}{4^2} \left| \oint\limits_{bT} f(z).dz \right| \text{, con } long(bT_{12}) = \frac{1}{2^2} long(bT)$$

Continuando con el proceso de descomposición, llegamos a la división n-sima:

$$\left| \oint\limits_{bT_{1n}} f(z).dz \right| \geq \frac{1}{4^n} \left| \oint\limits_{bT} f(z).dz \right| \text{, con } long(bT_{1n}) = \frac{1}{2^n} long(bT)$$

Como resultado obtenemos una sucesión decreciente de subtriángulos

$$T \supset T_1 \supset T_{12} \supset \ldots \supset T_{1n} \supset \ldots$$

que, al ser compactos, tienen intersección no vacía, y puesto que los perímetros de estos triángulos tienden a cero, la intersección es un conjunto de un único punto:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} T_{1n} = \{z_0\},\ z_0 \in D$$

Al igual que en el caso del rectángulo, definamos la función

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) & si\ z \neq z_0 \\ 0 & si\ z = z_0 \end{cases}$$

y escribamos $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$ (donde $|g(z)| \to 0$ cuando $z \to z_0$).

Por tanto, se tiene que

$$\oint_{bT_n} f(z)dz = \oint_{bT_n} f(z_0)dz + \oint_{bT_n} g(z)(z - z_0)dz + \oint_{bT_n} f'(z_0)(z - z_0)dz =$$
$$= f(z_0)\oint_{bT_n} dz + \oint_{bT_n} g(z)(z - z_0)dz + f'(z_0)\oint_{bT_n}(z - z_0)dz$$

Se trata de una suma en donde el primero y el tercero de los sumandos son nulos, por tratarse de la integral a lo largo de una curva cerrada de una función que es derivada de otra función:

$$f(z_0)\oint_{bT_n} dz = f(z_0).z\Big|_{bT_n} = 0,\quad f'(z_0)\oint_{bT_n}(z - z_0)dz = f'(z_0).\frac{1}{2}(z - z_0)^2\Big|_{bT_n} = 0$$

queda, finalmente

$$\oint_{bT_n} f(z)dz = \oint_{bT_n} g(z)(z - z_0)dz \to \left|\oint_{bT_n} f(z)dz\right| = \left|\oint_{bT_n} g(z)(z - z_0)dz\right| \leq \oint_{bT_n} |g(z)||(z - z_0)||dz|$$

y de ser $\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$, se tiene que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |z - z_0| < \delta \to |g(z)| < \varepsilon$

Por otra parte existe un $n \in N$ tal que $|z - z_0| < \delta, \forall z \in T_n$, por lo que también se verificará que $|z - z_0| < \dfrac{L}{2^n}, \forall z \in T_n$.

En definitiva, es $\left|\oint_{bT_n} f(z)dz\right| \leq \oint_{bT_n} |g(z)||(z - z_0)||dz| \leq \varepsilon.\dfrac{L}{2^n}.\dfrac{L}{2^n} = \dfrac{L^2}{4^n}\varepsilon$

Por lo que, finalmente:

$$\left|\oint_{bT} f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\oint_{bT_n} f(z)dz\right| = 4^n \frac{L^2}{4^n}\varepsilon = L^2\varepsilon,$$

y al ser $\varepsilon$ arbitrariamente pequeño:

$$\oint_{bT} f(z)dz = 0$$

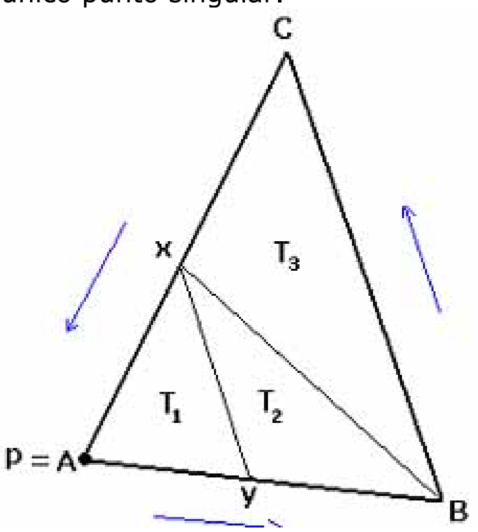
**02.2. Caso en el que existe un número finito de puntos singulares rodeados por el contorno:**

Sea D un abierto simplemente conexo y sea $\gamma$ una curva cerrada de clase $C^1$ definida a trozos y contenida en D. Si $f(z)$ es función holomorfa en D, salvo en un número finito de puntos, $p_j,\ j = 1,...,n$, tales que $\lim_{z \to p_j}(z - p_j)f(z) = 0$, entonces se verifica que

$$\oint_{\gamma} f(z).dz = 0$$

Siendo $\gamma$ el borde $bT$ de un triángulo T que contiene a los puntos $p_j$.

Demostración:
Si son varios los puntos singulares contenidos en el triángulo, siempre podrá dividirse en subtriángulos de modo que cada uno de ellos contenga un único punto singular. El problema, pues, lo podemos considerar reducido a un triángulo con un único punto singular.




Si el punto singular p coincide con uno de los puntos vértices del triángulo ( $p = A$, por ejemplo) podemos dividir el triángulo en tres subtriángulos mediante dos segmentos, $[x, y]$ y $[x, B]$ donde $x$ es un punto cualquiera del lado AC y $y$ es un punto cualquiera del lado AB. Quedan definidos entonces tres subtriángulos, $T_1, T_2, T_3$, de los que $T_2$ y $T_3$ no tienen puntos singulares, y $T_1$ tiene un punto singular en el vértice A.

En definitiva, se tiene que

$$\oint_{bT} f(z)dz = \oint_{bT_1} f(z)dz + \oint_{bT_2} f(z)dz + \oint_{bT_3} f(z)dz = \oint_{bT_1} f(z)dz + 0 + 0 = \oint_{bT_1} f(z)dz$$

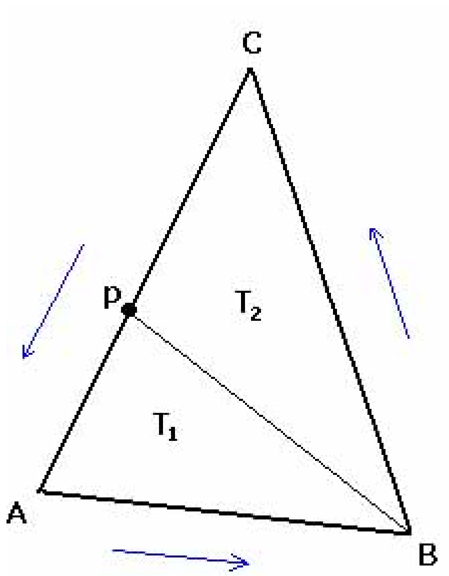
Como $f(z)$ es continua, estará acotada, luego $\exists M > 0 / \left| f(z) \right| < M, \forall z \in T$

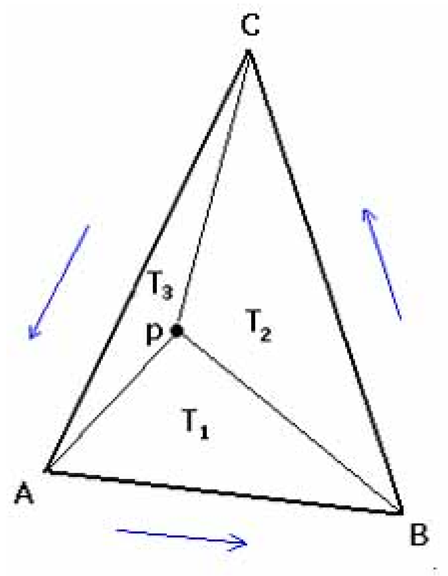
por lo que $\left| \oint_{bT} f(z)dz \right| = \left| \oint_{bT_1} f(z)dz \right| \leq \oint_{bT_1} \left| f(z) \right| \left| dz \right| \leq M.long(bT_1)$

Como tanto el punto $x \in AC$ como el punto $y \in AB$ pueden ser cualesquiera, se tiene que si $x, y \rightarrow p$ entonces $long(bT_1) \rightarrow 0$, con lo cual

$$\left| \oint_{bT} f(z)dz \right| \leq M.long(bT_1) \rightarrow 0 \text{ de lo cual: } \oint_{bT} f(z).dz = 0$$

Si el punto singular p está en alguno de los lados del triángulo o bien en su interior, siempre se puede dividir el triángulo dado en tres subtriángulos tales que el punto singular quede en uno de los tres vértices de uno de los subtriángulos, tal como se indica en las dos figuras siguientes. Con lo cual la situación quedaría reducida al caso anterior y se verificaría el teorema.




## 03.El Teorema original de Cauchy para una curva cualquiera en un abierto simplemente conexo

Dado un abierto simplemente conexo D y una curva simple cerrada $\gamma$ contenida en D, se verifica que si $f(z)$ es holomorfa en D con derivada continua entonces

$$\oint_{\gamma} f(z).dz = 0$$

Incluimos dos formas de demostración del teorema. La primera usando la definición de derivada compleja con la propiedad de independencia del camino, y la segunda, más usual, utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann y el teorema de Green.

### 03.1. Demostración del teorema usando la definición de derivada:

Sabemos que si una función $f(z)$ es derivada de otra función $F(z)$, $f(z) = F'(z)$, entonces la integral $f(z)$de sobre un contorno cerrado es cero. Vamos a ver que podemos establecer una función cuya derivada es $f(z)$

Consideremos un punto cualquiera *p* del abierto conexo D y el segmento *pz* contenido en D.
Sea

$$F(z) = \int_{pz} f(z).dz$$

a lo largo del segmento *pz* y veamos que $f(z) = F'(z)$.
Se tiene que

$$F(z) = \int_{pz} f(u).du \text{ y } F(z_0) = \int_{pz_0} f(u).du, \quad \forall z_0 \in D$$

entonces:

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)=\frac{1}{z-z_0}\left[\int_{pz} f(u).du-\int_{pz_0} f(u).du-(z-z_0)f(z_0)\right]=$$

$$=\frac{1}{z-z_0}\left[-\int_{zp} f(u).du-\int_{pz_0} f(u).du-(z-z_0)f(z_0)\right]=\frac{1}{z-z_0}\left[-\int_{zz_0} f(u).du-(z-z_0)f(z_0)\right]=$$

$$=\frac{1}{z-z_0}\left[\int_{z_0z} f(u).du-f(z_0)\int_{z_0z} du\right]=\frac{1}{z-z_0}\int_{z_0z}[f(u)-f(z_0)]du$$

En definitiva:

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)=\frac{1}{z-z_0}\int_{z_0z}[f(u)-f(z_0)]du$$

como $f(z)$ es continua:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0/|u-z_0|<\delta\to|f(u)-f(z_0)|<\varepsilon,$$

y si $|z-z_0|<\delta$ entonces también $|u-z_0|<\delta,\ \forall u\in z_0z$

y se tiene que

$$\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)\right|=\left|\frac{1}{z-z_0}\int_{z_0z}[f(u)-f(z_0)]du\right|\le\frac{1}{|z-z_0|}\int_{z_0z}|f(u)-f(z_0)||du|\le$$

$$\le\frac{1}{|z-z_0|}\int_{z_0z}\varepsilon|du|=\frac{1}{|z-z_0|}\varepsilon|z-z_0|=\varepsilon$$

como $\varepsilon$ es arbitrario: $\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)\right|\to 0$, es decir:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}=f(z_0)\to F'(z_0)=f(z_0),\ \forall z_0\in D$$

### 03.2. Demostración del teorema usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

Puesto que es $z=x+iy\to dz=dx+idy,\ f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$

Se tiene que

$$f(z).dz=(u(x,y)+iv(x,y))(dx+idy)=\big(u(x,y)dx-v(x,y)dy\big)+i\big(u(x,y)dy+v(x,y)dx\big)$$

de lo cual

$$\oint_\Gamma f(z).dz=\oint_\Gamma\big[\big(u(x,y)dx-v(x,y)dy\big)+i\big(u(x,y)dy+v(x,y)dx\big)\big]=$$

$$=\oint_\Gamma\big[\big(u(x,y)dx-v(x,y)dy\big)\big]+i\oint_\Gamma\big[\big(u(x,y)dy+v(x,y)dx\big)\big]$$

y teniendo en cuenta la expresión del teorema de Green:

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

donde $S$ es la superficie encerrada por la curva $\Gamma$, se tendrá finalmente que

$$\oint_\Gamma f(z).dz=\iint_S\left(-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)dxdy+i\iint_S\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right)dxdy$$

con lo que, aplicando las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

se tiene

$$\oint_{\Gamma} f(z).dz = \iint_S 0dxdy + i\iint_S 0dxdy = 0 + i.0 = 0$$

**04. Bibliografía**

Ahlfors, L. V.; Análisis de variable compleja, McGraw-Hill, New York 1979.
Apostol, T.M.; Análisis Matemático, Editorial Reverté, Barcelona, 1986
Caratheodory; Theory of functions of a complex variable, Chelsea, 2001.
Cartan, H.; Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas, Madrid, Selecciones Científicas, 1968.
Copson, E. T.: An introduction to the theory of functions of a complex variable, Oxford University Press, 1970.
Goursat, E.; Cours d'analyse Mathematique, Gauthier Villars, Imprimeur Libraire, 1905, Paris.
Markushevich, A. I; Teoría de las funciones analíticas, Editorial Mir: Moscú 1970.
Philips, E. G.; Funciones de una variable compleja, Dossat, Madrid, 1963.